

Elektrodynamik

Übungsblätter

ETH Zürich, 2024 FS

PROF. N. BEISERT

© 2014–2024 Niklas Beisert, ETH Zürich.

Dieses Dokument sowie seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Reproduktion eines Teils dieses Werks in beliebiger Form ohne vorgängige schriftliche Erlaubnis der ETH Zürich ist nur zum privaten, wissenschaftlichen und nicht-gewerblichen Gebrauch gestattet.

Die aktuelle Version dieses Werks befindet sich unter:
<http://people.phys.ethz.ch/~nbeisert/lectures/>.

Inhaltsverzeichnis

Übungsblatt 1	1.1
1.1. Vektoranalysis	1.1
1.2. Satz von Gauß	1.2
1.3. Satz von Stokes	1.2
1.4. Potential und elektrische Feldstärke	1.2
Übungsblatt 2	2.1
2.1. Stabiles Gleichgewicht	2.1
2.2. Energie im Plattenkondensator	2.1
2.3. Elektrische Feldstärke in einer Hohlkugel	2.1
2.4. delta-Funktion	2.1
2.5. Eindimensionale Greensche Funktion	2.2
Übungsblatt 3	3.1
3.1. Kapazitäten	3.1
3.2. Imaginäre Dipole	3.1
3.3. Leitende Kugel im elektrischen Feld	3.2
3.4. Innenraum der Kugel mit Neumann-Randbedingung	3.2
Übungsblatt 4	4.1
4.1. Greensche Funktionen in der Elektrostatik	4.1
4.2. Kugelförmiger Hohlraum	4.1
4.3. Multipolmomente eines Würfels	4.2
Übungsblatt 5	5.1
5.1. Entwicklung des Potentials in Legendre-Polynomen	5.1
5.2. Rotationsübungen	5.2
5.3. Magnetisches Feld einer endlichen Spule	5.2
5.4. Stromdurchflossener Leiter	5.2
Übungsblatt 6	6.1
6.1. Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten	6.1
6.2. Kondensator mit Dielektrikum	6.1
6.3. Magnetfeld einer kreisförmigen Leiterschleife	6.2
6.4. Magnetisches Moment einer rotierenden Kugelschale	6.2
6.5. Vektorpotential einer Leiterschleife	6.2
6.6. Eisenrohr im Magnetfeld	6.3
6.7. Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld	6.3
Übungsblatt 7	7.1
7.1. Elektrisches Feld eines beweglichen Drahtes	7.1
7.2. Gegeninduktivität	7.1
7.3. Induktion im Magnetfeld	7.2
7.4. Selbstinduktion eines Koaxialkabels	7.2
Übungsblatt 8	8.1
8.1. Der Poynting-Vektor	8.1
8.2. Gesamtkraft mittels Spannungstensor	8.1

8.3. Invarianter Abstand	8.2
Übungsblatt 9	9.1
9.1. Elektromagnetischer Feldtensor	9.1
9.2. Relativistische Kraft	9.2
9.3. Fourier-Transformation	9.2
9.4. Teilweise polarisiertes Licht	9.3
9.5. Gruppengeschwindigkeit	9.4
Übungsblatt 10	10.1
10.1. Wellenpakete und Fourier-Raum	10.1
10.2. Elliptisch polarisierte Wellen	10.2
10.3. Energie- und Impulsfluss einer ebenen Welle	10.2
Übungsblatt 11	11.1
11.1. Strahlung einer linearen Antenne	11.1
11.2. Strahlung in relativistischer Kreisbewegung	11.2
Übungsblatt 12	12.1
12.1. Liénard-Wiechert Potential	12.1
12.2. Reflexion an einem idealen Leiter	12.1
12.3. Brechung von ebenen Wellen	12.1
12.4. Lichtstreuung	12.2
Übungsblatt 13	13.1
13.1. Rechteckiger Hohlleiter	13.1
13.2. TEM-Mode des Koaxialen Wellenleiters	13.1
13.3. Optik gemäss dem Prinzip der kleinsten Wirkung	13.2

1.1. Vektoranalysis

In der Elektrodynamik treten häufig Standardidentitäten der Vektoranalysis auf. Diese sollen mit dieser Aufgabe wieder ins Gedächtnis zurückgerufen werden.

Definitionen/Konventionen: Wir schreiben die bekannten vektoriellen Ableitungsoperatoren grad, div, rot i.d.R. mittels des Vektors $\vec{\partial}$ partieller Ableitungen $\partial_i := \partial/\partial x_i$ als

$$\text{grad } F = \vec{\partial}F, \quad \text{div } \vec{A} = \vec{\partial} \cdot \vec{A}, \quad \text{rot } \vec{A} = \vec{\partial} \times \vec{A}. \quad (1.1)$$

Die Komponenten eines dreidimensionalen Vektorprodukts $\vec{a} \times \vec{b}$ sind gegeben durch

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_j b_k. \quad (1.2)$$

Hier ist ε_{ijk} der total antisymmetrische Tensor für \mathbb{R}^3 mit $\varepsilon_{123} = +1$.

a) Zeige zunächst, dass

$$\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \quad \text{und} \quad \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijl} = \delta_{kl}. \quad (1.3)$$

b) Zeige nun die folgenden Identitäten für beliebige Vektoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} :

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}), \\ \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}, \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}). \end{aligned} \quad (1.4)$$

c) Beweise schliesslich die folgenden Identitäten für beliebige skalare Felder F und vektorielle Felder \vec{A} :

$$\begin{aligned} \vec{\partial} \times (\vec{\partial} F) &= 0, \\ \vec{\partial} \cdot (\vec{\partial} \times \vec{A}) &= 0, \\ \vec{\partial} \times (\vec{\partial} \times \vec{A}) &= \vec{\partial}(\vec{\partial} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}, \\ \vec{\partial} \cdot (F \vec{A}) &= (\vec{\partial} F) \cdot \vec{A} + F \vec{\partial} \cdot \vec{A}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

→

1.2. Satz von Gauß

Betrachte folgende Vektorfelder \vec{A}_i in zwei Dimensionen

$$\begin{aligned}\vec{A}_1 &= (3xy(y-x), x^2(3y-x)), \\ \vec{A}_2 &= (x^2(3y-x), 3xy(x-y)), \\ \vec{A}_3 &= (x/(x^2+y^2), y/(x^2+y^2)) = \vec{x}/\|\vec{x}\|^2.\end{aligned}\tag{1.6}$$

- a) Berechne den Fluss von \vec{A}_i durch den Rand des Quadrats Q mit den Eckpunkten $\vec{x} = (\pm 1, \pm 1)$

$$I_i = \oint_{\partial Q} dx \vec{n} \cdot \vec{A}_i.\tag{1.7}$$

- b) Berechne die Divergenz von \vec{A}_i und dessen Integral über die Fläche desselben Quadrats Q

$$I'_i = \int_Q dx^2 \vec{\partial} \cdot \vec{A}_i.\tag{1.8}$$

1.3. Satz von Stokes

Betrachte das Vektorfeld

$$\vec{A} = (x^2y, x^3 + 2xy^2, xyz).\tag{1.9}$$

- a) Berechne das Integral entlang eines Kreises S um den Ursprung in der x,y -Ebene mit Radius R

$$I = \oint_S d\vec{x} \cdot \vec{A}.\tag{1.10}$$

- b) Berechne die Rotation \vec{B} des Vektorfeldes \vec{A}

$$\vec{B} = \vec{\partial} \times \vec{A}.\tag{1.11}$$

- c) Berechne nun den Fluss der Rotation \vec{B} durch die von S berandete Kreisscheibe D , $\partial D = S$

$$I' = \int_D dx^2 \vec{n} \cdot \vec{B}.\tag{1.12}$$

1.4. Potential und elektrische Feldstärke

Vier Punktladungen sind an den Ecken $(a, 0)$, (a, a) , $(0, a)$, $(0, 0)$ eines Quadrates angebracht. Bestimme das Potential und die elektrische Feldstärke in der Ebene dieses Quadrates. Skizziere die Feldlinien und die Äquipotentiallinien für folgende Ladungsverteilungen:

- a) $+q, +q, +q, +q$;
- b) $-q, +q, -q, +q$;
- c) $+q, +q, -q, -q$.

Hinweis: In Mathematica sind die Befehle `ContourPlot` und `StreamPlot` nützlich.

2.1. Stabiles Gleichgewicht

Zwei Kugeln, jeweils mit Ladung $+q$, liegen auf einer Isolatorplatte in der Ebene $z = 0$ und können sich dort reibungsfrei bewegen. Unter der Platte befindet sich bei $\vec{x} = (0, 0, -b)$ eine weitere Kugel mit Ladung $-2q$ fest fixiert. Behandle die Kugeln als Punktladungen und finde stabile Positionen für die Kugeln auf der Platte.

2.2. Energie im Plattenkondensator

Zwei Platten mit Ladung $+Q$ und $-Q$ und Fläche A sind parallel zueinander im (kleinen) Abstand d angeordnet. Wie gross ist die Energie, die im elektrischen Feld zwischen den Platten gespeichert ist?

2.3. Elektrische Feldstärke in einer Hohlkugel

Eine geladene Kugel mit homogener Ladungsdichte ρ und Radius R_A enthalte einen um den Vektor \vec{a} gegen den Mittelpunkt verschobenen, kugelförmigen Hohlraum mit Radius $R_I < R_A - \|\vec{a}\|$. Berechne die elektrische Feldstärke im Hohlraum.

Hinweis: Verwende den Satz von Gauß sowie das Superpositionsprinzip zur Berechnung der elektrischen Feldstärke.

2.4. delta-Funktion

Die delta-Funktion wird oft gebraucht, um in einer Ladungsdichte Punktladungen darzustellen. Sie ist definiert durch die folgende Eigenschaft bei Integration über eine glatte Testfunktion f mit kompakten Träger:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x - a) = f(a). \quad (2.1)$$

a) Zeige, dass sie als Grenzwert $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} g_\epsilon(x) = \delta(x)$ geschrieben werden kann, wobei

$$g_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} e^{-x^2/(2\epsilon)}. \quad (2.2)$$

b) Zeige ebenso $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_\epsilon(x) = \delta(x)$ mit

$$h_\epsilon(x) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{x - i\epsilon} - \frac{1}{x + i\epsilon} \right). \quad (2.3)$$

c) Zeige, dass die Ableitung der delta-Funktion die folgende Eigenschaft besitzt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta'(x - a) = -f'(a). \quad (2.4)$$

Die Eigenschaften von Testfunktionen sorgen dafür, dass keine asymptotische Beiträge (Randterme) auftreten.

→

2.5. Eindimensionale Greensche Funktion

Man betrachte den Raum zwischen zwei unendlich grossen, geerdeten Leiterplatten, die parallel zueinander an den Punkten $x = 0$ und $x = d$ aufgestellt sind. Eine weitere Platte mit Flächenladungsdichte σ befindet sich bei $x = a$ mit $0 < a < d$.

- a) Zeige, dass die Herleitung des Potentials $\Phi(\vec{x})$ für $0 \leq x \leq d$ äquivalent ist zur Berechnung einer eindimensionalen Greenschen Funktion und somit zur Lösung der folgenden Gleichung,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, a) = -\delta(x - a) \quad (2.5)$$

mit den Dirichlet Randbedingungen $G(0, a) = G(d, a) = 0$.

Um die Lösung der folgenden Teilaufgaben zu vereinfachen, bietet es sich an, das Koordinatensystem so zu verschieben, dass die geladene Platte sich bei $x = 0$ und die geerdeten Leiterplatten sich bei $x = -a$ bzw. $x = d - a$ befinden.

- b) Teile den Raum in zwei ladungsfreie Regionen $-a < x < 0$ und $0 < x < d - a$ auf, und löse dort die zwei separaten, homogenen Laplace-Gleichungen für das Potential. Integriere dann die Poisson-Gleichung von $x = -\epsilon$ bis $x = +\epsilon$, und betrachte den Grenzwert $\epsilon \rightarrow 0$, um die Bedingungen zu finden, welche die zwei Lösungen für das Potential in $x = 0$ verbinden. Bestimme schliesslich das Potential für den gesamten Bereich $-a < x < d - a$.
- c) Bestätige das obige Resultat, indem Du die Differentialgleichung für das Potential unter Berücksichtigung der Randbedingungen bei $x = -a$ und $x = d - a$ direkt integrierst.

$$\theta(x) = 1 - \theta(-x), \quad 2x\theta(x) = x + |x|. \quad (2.6)$$

- d) Führe eine Fouriertransformation der Differentialgleichung für das Potential durch, löse die transformierte Gleichung im Fourier-Raum und transformiere die Lösung zurück in den Ortsraum. Überzeuge Dich von der Existenz einer partikulären Lösung, welche mit den vorherigen übereinstimmt.

3.1. Kapazitäten

Ein einfacher Kondensator besteht aus zwei isolierten Leitern, auf denen gleich grosse entgegengesetzte Ladungen $Q_1 = +Q$ und $Q_2 = -Q$ sitzen. Die beiden Leiter haben dann im Allgemeinen unterschiedliches elektrisches Potential, und $U = \Phi_1 - \Phi_2$ bezeichne die Potentialdifferenz. Eine charakteristische Grösse des Kondensators ist die Kapazität C , die definiert ist durch

$$C = \frac{|Q|}{|U|}. \quad (3.1)$$

Berechne die Kapazität für die folgenden Anordnungen:

- zwei grosse parallele Ebenen mit Fläche A und kleinem Abstand $d \ll \sqrt{A}$;
- zwei konzentrische, leitende Kugeloberflächen mit Radien $a < b$;
- zwei koaxiale, leitende Zylinderflächen der Länge L mit den Radien $a < b \ll L$.

3.2. Imaginäre Dipole

Gegeben sind zwei Punktladungen q und q' im Abstand d sowie eine Ebene im Abstand αd von q , die auf der Verbindung von q und q' senkrecht steht.

- Zeige, dass die Ebene genau dann eine Äquipotentialebene ist, wenn $q' = -q$ und $\alpha = 1/2$ gilt.

Hinweis: Betrachte zuerst das Potential in grosser Entfernung.

Betrachte nun eine Punktladung q mit den kartesischen Koordinaten $(a, b, 0)$ im freien Bereich eines Raumes, der ausser für positive x und y mit einem geerdeten Leiter gefüllt ist.

- Begründe, dass zwei Spiegelladungen – eine bezüglich der Ebene $x = 0$, eine bezüglich $y = 0$ – nicht genügen, um die Randbedingungen für den Leiter zu erfüllen.
- Führe unter Ausnutzung der Symmetrie der Anordnung eine zusätzliche Spiegelladung ein und zeige explizit, dass diese die begrenzenden Ebenen zu Äquipotentialebenen macht. Skizziere die Ladungsanordnung.

Betrachte schliesslich eine Punktladung im freien Segment eines Raumes, der bis auf den Bereich des Winkels $0 \leq \varphi \leq \pi/n$ (n ganzzahlig) mit einem geerdeten Leiter gefüllt ist.

- Bestimme graphisch eine Verteilung von Spiegelladungen, die das elektrische Feld dieser Ladung im freien Raumsegment reproduziert. Was ist die elektrische Feldstärke auf der Schnittgeraden der beiden Begrenzungsebenen?
- optional:* Skizziere die Feldlinien der Ladungsverteilung aus Teil d).

→

3.3. Leitende Kugel im elektrischen Feld

Eine leitende Kugel, auf der die Gesamtladung Q sitzt, wird in ein homogenes elektrisches Feld $\vec{E} = E\vec{e}_z$ gebracht. Wie verändert sich das elektrische Feld durch die Anwesenheit der Kugel? Wie ist die Ladung auf der Oberfläche der Kugel verteilt?

Hinweis: Motiviere den folgenden Ansatz in Kugelkoordinaten

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = f_0(r) + f_1(r) \cos \vartheta, \quad (3.2)$$

und löse die Poisson-Gleichung im Aussenraum $\Delta\Phi = 0$ mit dem Laplace-Operator

$$\Delta\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}. \quad (3.3)$$

Benutze anschliessend die folgenden Randbedingungen, um die gesuchte Lösung zu finden:

- Weit weg von der Kugel soll das homogene Feld dominieren.
- Die Oberfläche der leitenden Kugel muss eine Äquipotentialfläche sein.
- Das elektrische Feld muss den Satz von Gauß erfüllen.

3.4. Innenraum der Kugel mit Neumann-Randbedingung

Die Greensche Funktion für den Innenraum einer Kugel $B := \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| \leq R\}$ mit Radius R und Neumann-Randbedingung lautet

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi\|x - y\|} + \frac{R}{4\pi\|y\|\|x - y'\|} - \frac{1}{4\pi R} \log \frac{\|y\|\|x - y'\| - \vec{y} \cdot (\vec{x} - \vec{y}')}{R^2}, \quad (3.4)$$

wobei $\vec{y}' := R^2\vec{y}/\|y\|^2$ die Inversion des Punktes \vec{y} an der Kugeloberfläche beschreibt.

- a) Zeige, dass sie die Laplace-Gleichung fast überall erfüllt, und dass sie der Neumann-Randbedingung für Greensche Funktionen genügt.
- b) Zeige, dass sie symmetrisch in ihren beiden Argumenten ist. Interpretiere den Wert von $\vec{n}_y \cdot \vec{\partial}_y G$ auf dem Rand $y \in \partial B$.
- c) Bestätige, dass $G(x, y)/\varepsilon_0$ das Potential der Summe einer Einheits-Ladung bei y , einer Ladung $q' = R/\|y\|$ bei y' sowie einer linearen Ladungsverteilung mit homogener Ladungsdichte $\lambda = 1/R$ auf dem Strahl von y' radial nach aussen bis Unendlich beschreibt.

Hinweis: Summiere und integriere das Potential der angegebenen Ladungsverteilung und vergleiche. Beschränke zunächst die lineare Ladungsverteilung bis zu einem maximalen Radius L . Wie kann man das divergente Integral verstehen bzw. reparieren?

4.1. Greensche Funktionen in der Elektrostatik

In dieser Aufgabe werden wir die Greensche Funktion der Elektrostatik genauer analysieren. Wir betrachten Greensche Funktionen G auf einem Volumen V mit Dirichlet- bzw. Neumann-Randbedingungen auf der Oberfläche ∂V .

- a) Drücke die Differenz $G(y, z) - G(z, y)$ als Integral über die Oberfläche ∂V aus. Verwende dazu die zweite Greensche Identität

$$\int_V dx^3 (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) = \oint_{\partial V} dx^2 \vec{n} \cdot (\phi \vec{\partial} \psi - \psi \vec{\partial} \phi) \quad (4.1)$$

mit $\phi(x) = G(y, x)$ and $\psi(x) = G(z, x)$. Benutze, dass $\Delta_x G(y, x) = -\delta^3(x - y)$.

- b) Zeige, dass die Greensche Funktion $G_D(x, y)$ mit Dirichlet-Randbedingung $G_D(x, y) = 0$ für alle $y \in \partial V$ symmetrisch in x und y ist.
- c) Begründe, dass $\vec{n}_y \cdot \vec{\partial}_y G_D(x, y) \rightarrow -\delta^2(x - y)$ für $x \rightarrow \partial V$ und $y \in \partial V$. Im Fall $x \not\rightarrow y$ nutze die Dirichlet-Randbedingung für $G_D(x, y)$. Um den Spezialfall $x \rightarrow y$ zu verstehen, integriere den obigen Ausdruck über alle $y \in \partial V$ vor Ausführung des Grenzwerts.
- d) Betrachte nun die (alternative Formulierung der) Neumann-Randbedingung

$$\vec{\partial}_x [\vec{n}_y \cdot \vec{\partial}_y G_N(x, y)] = 0 \quad \text{für alle } y \in \partial V. \quad (4.2)$$

Zeige, dass $G_N(x, y)$ im Allgemeinen nicht symmetrisch in x und y ist. Konstruiere eine Greensche Funktion $\tilde{G}_N(x, y) = G_N(x, y) + H(y) + K(x)$, welche symmetrisch in x und y ist. Was muss für H und K gelten damit \tilde{G}_N weiterhin eine geeignete Greensche Funktion ist?

4.2. Kugelförmiger Hohlraum

Das Potential auf der Oberfläche eines kugelförmigen Hohlraumes mit Radius R sei gegeben durch eine beliebige Funktion $U(\vartheta, \varphi)$.

- a) Zeige, dass sich das Potential im Inneren der Hohlkugel schreiben lässt als

$$\Phi(x) = \int \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi' \frac{R(R^2 - r^2) U(\vartheta', \varphi')}{4\pi(r^2 + R^2 - 2rR \cos \gamma)^{3/2}}, \quad (4.3)$$

wobei γ den Winkel zwischen x und x' bezeichnet. Bestimme $\cos \gamma$ in Abhängigkeit der Variablen $\vartheta, \varphi, \vartheta'$ und φ' .

Hinweis: Bestimme die Greensche Funktion unter Verwendung der Spiegelladungsmethode und verwende Kugelkoordinaten.

- b) Gib die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung mit Hilfe der Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell, m}$ an. Verwende dann die Orthonormalitätsrelationen, um die Koeffizienten für die gegebenen Randbedingungen zu bestimmen.
- c) Finde das Potential $\Phi(x)$ innerhalb der Hohlkugel explizit für die Randbedingung

$$U(\vartheta, \varphi) = U_0 \cos \vartheta. \quad (4.4)$$

→

4.3. Multipolmomente eines Würfels

Es seien positive und negative Punktladungen $\pm q$ auf den Ecken eines Würfels mit Kantenlänge a angeordnet. Das Zentrum des Würfels liegt im Koordinatenursprung und die Kanten sind parallel zu den x, y, z -Achsen ausgerichtet. Die Ladung an der Ecke mit $x, y, z > 0$ sei positiv. Ladungen auf benachbarten Ecken haben entgegengesetztes Vorzeichen.

- a) Bestimme die Lage der Ladungen in kartesischen Koordinaten und in Kugelkoordinaten.
- b) Bestimme die Ladungsdichte in kartesischen Koordinaten und anschliessend in Kugelkoordinaten. Verwende hierbei

$$\delta^3(x - x_0) = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \delta(r - r_0) \delta(\vartheta - \vartheta_0) \delta(\varphi - \varphi_0), \quad (4.5)$$

sowie $\sin \vartheta = \sin(\pi - \vartheta)$ und $\cos(\pi - \vartheta) = -\cos \vartheta$.

- c) Berechne die sphärischen Dipol-, Quadrupol- und Oktupolmomente dieser Ladungsverteilung. Verwende hierbei

$$Q_{\ell, m} = \int dx^3 \rho(x) r^\ell Y_{\ell, m}^*(\vartheta, \varphi), \quad m = -\ell, -(\ell - 1), \dots, +(\ell - 1), +\ell. \quad (4.6)$$

Die benötigten Kugelflächenfunktionen lauten:

$$\begin{aligned} Y_{00} &= 1, & Y_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{2}} \sin \vartheta e^{i\varphi}, \\ Y_{10} &= \sqrt{3} \cos \vartheta, & Y_{22} &= \sqrt{\frac{15}{8}} \sin^2 \vartheta e^{2i\varphi}, \\ Y_{21} &= -\sqrt{\frac{15}{2}} \cos \vartheta \sin \vartheta e^{i\varphi}, & Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{4}} (3 \cos^2 \vartheta - 1), \\ Y_{33} &= -\sqrt{\frac{35}{16}} \sin^3 \vartheta e^{3i\varphi}, & Y_{32} &= \sqrt{\frac{105}{8}} \cos \vartheta \sin^2 \vartheta e^{2i\varphi}, \\ Y_{31} &= -\sqrt{\frac{21}{16}} (5 \cos^2 \vartheta - 1) \sin \vartheta e^{i\varphi}, & Y_{30} &= \sqrt{\frac{7}{4}} (5 \cos^3 \vartheta - 3 \cos \vartheta). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Weiter gilt: $Y_{\ell, -m} = (-1)^m Y_{\ell, m}^*$, und somit $Q_{\ell, -m} = (-1)^m Q_{\ell, m}^*$.

5.1. Entwicklung des Potentials in Legendre-Polynomen

Man nehme an, dass das Potential auf einer Kugelschale bei Radius R nur vom Polarwinkel ϑ abhängt und gegeben ist durch $\Phi_0(\vartheta)$. Innerhalb und ausserhalb der Kugel sei der Raum leer.

- a) Finde Ausdrücke für das Potential $\Phi(r, \vartheta)$ innerhalb und ausserhalb der Kugelschale und für die Ladungsdichte $\sigma(\vartheta)$ auf der Kugelschale.

Hinweis: Für die Legendre-Polynome gelten die Beziehungen:

$$\int_0^\pi P_n(\cos \vartheta) P_m(\cos \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta = \delta_{n,m} \frac{2}{2n+1}. \quad (5.1)$$

- b) Werte die in Teil a) hergeleiteten Ausdrücke für $\Phi_0(\vartheta) = U \cos^2 \vartheta$ aus.

Hinweis: Die ersten drei Legendre-Polynome lauten:

$$P_0(\cos \vartheta) = 1, \quad P_1(\cos \vartheta) = \cos \vartheta, \quad P_2(\cos \vartheta) = \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2}. \quad (5.2)$$

Betrachte nun eine Kugelfläche vom Radius R mit konstanter Ladungsverteilung $\sigma = Q/(4\pi R^2)$ bis auf einen runden Bereich am Nordpol, der durch den Kegel $\vartheta < \alpha$ definiert ist und in dem die Ladungsdichte verschwindet.

- c) Zeige, dass das Potential innerhalb der Kugel ausgedrückt werden kann durch:

$$\Phi(r, \vartheta) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2\ell+1} [P_{\ell+1}(\cos \alpha) - P_{\ell-1}(\cos \alpha)] \frac{r^\ell}{R^{\ell+1}} P_\ell(\cos \vartheta), \quad (5.3)$$

wobei für $\ell = 0$ gilt $P_{\ell-1}(x) = -1$. Wie lautet das Potential ausserhalb der Kugel?

Hinweis: Benutze die folgende Identität für die Legendre-Polynome:

$$P_n(x) = \frac{1}{2n+1} (P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)). \quad (5.4)$$

- d) Finde den Betrag und die Richtung des elektrischen Feldes am Ursprung für die Konfiguration in Teil c).

→

5.2. Rotationsübungen

Die Rotationsgruppe (in N Dimensionen) wird als Gruppe der linearen Abbildungen eines Vektorraumes definiert, welche das kanonische Skalarprodukt erhalten.

- a) Zeige, dass eine lineare Transformation, die die Norm aller Vektoren erhält, auch das Skalarprodukt zweier beliebiger Vektoren erhält. Zeige dann, dass eine Matrix, die die Norm aller Vektoren erhält, orthogonal ist.
- b) Zeige, dass die Determinante jeder orthogonalen Matrix $+1$ oder -1 ist.

Orthogonale Matrizen mit negativer Determinante stellen Transformationen dar, die eine Spiegelung beinhalten. Da wir hier nur Rotationen betrachten wollen, beschränken wir uns auf die Gruppe von Matrizen mit positiver Determinante, d.h. auf die spezielle orthogonale Gruppe $SO(N)$.

- c) Gib die Matrizen an, die in drei Dimensionen Rotationen um einen infinitesimalen Winkel $\delta\varphi$ um die i -te Koordinatenachse beschreiben. Finde nach Abspaltung der Einheitsmatrix einen einfachen Ausdruck der resultierenden Matrizen unter Verwendung des total antisymmetrischen Tensors ijk .
- d) Zeige, dass infinitesimale Rotationen bis auf Terme höherer Ordnung kommutieren, während makroskopische Rotationen typischerweise nicht kommutieren.
- e) Gib die infinitesimale Rotation um den Winkel $\delta\varphi$ um eine beliebige Achse mit Einheitsvektor \vec{n} an (verwende dabei, dass \vec{n} invariant unter dieser Rotation ist). Erweitere das Resultat auf Rotationen um makroskopische Winkel φ um \vec{n} durch eine grosse Zahl von sukzessiven infinitesimalen Rotationen. Zeige, dass jede Rotation mit $\varphi \in (0, 2\pi)$ und beliebigem \vec{n} (genau) eine weitere Darstellung mit anderem φ' , \vec{n}' hat.

5.3. Magnetisches Feld einer endlichen Spule

Betrachte einen zylindrisch aufgewickelten Draht entlang der z -Achse. Der Radius dieser zylindrischen Spule sei R , ihre Länge sei L (von $z = -L/2$ bis $z = +L/2$). Sei nun $n = N/L$ die Windungszahl pro Längeneinheit und I der (konstante) Gesamtstrom, der durch den Draht fließt. Randeffekte dürfen vernachlässigt werden.

Berechne die z -Komponente der magnetischen Flussdichte B für Punkte auf der Symmetrieachse. Bestimme das magnetische Feld für $L \rightarrow \infty$ bei konstantem n .

5.4. Stromdurchflossener Leiter

Betrachte einen geraden, zylindrischen Draht mit Radius R entlang der z -Achse. Der Betrag der Stromdichte innerhalb des Drahtes hat die folgende Abhängigkeit vom Abstand zur Drahtmitte:

$$j(\rho) = j_0 e^{-\rho^2/R^2} \theta(R - \rho), \quad (5.5)$$

wobei $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\theta(x)$ die Einheits-Stufenfunktion ist.

- a) Bestimme den Gesamtstrom I , der durch den Draht fließt, und drücke die Stromdichte j_0 durch I aus.
- b) Bestimme das magnetische Feld innerhalb und ausserhalb des Drahtes als Funktion des Gesamtstromes. Skizziere die Feldlinien und gib ihre Richtung an. Nimm dabei an, dass der Strom in die positive z -Richtung fließt.

6.1. Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten

Wir rufen uns zunächst die Multipolentwicklung des Potentials in Erinnerung. Gegeben sei eine räumlich begrenzte Ladungsverteilung $\rho(x')$. Das zugehörige Potential $\Phi(x)$ kann ausserhalb der Region, in der $\rho(x')$ nicht verschwindet, wie folgt entwickelt werden:

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Q_{\ell,m}}{2\ell+1} \frac{1}{r^{\ell+1}} Y_{\ell,m}(\vartheta, \varphi), \tag{6.1}$$

wobei $Y_{\ell,m}(\vartheta, \varphi)$ die Kugelflächenfunktionen bezeichnet und $Q_{\ell,m}$ die Multipolmomente. Letztere sind definiert durch

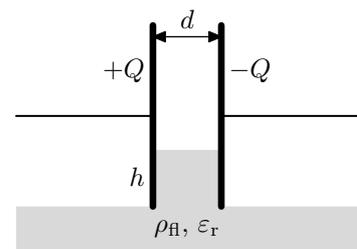
$$Q_{\ell,m} = \int dx'^3 Y_{\ell,m}^*(\vartheta', \varphi') r'^{\ell} \rho(x'). \tag{6.2}$$

Betrachte nun eine kreisförmige Schleife mit Radius R in der x,y -Ebene, deren Mitte am Ursprung liegt und welche eine lineare Ladungsdichte $\lambda = \lambda_0 \cos \varphi$ trägt. φ ist der Azimutwinkel gemessen in der x,y -Ebene.

- a) Finde einen Ausdruck in Kugelkoordinaten für die Ladungsdichte $\rho(x')$ der Schleife.
- b) Berechne die Multipolmomente $Q_{\ell,m}$ und benutze sie um die Multipolentwicklung von $\Phi(x)$ für $\|x\| > R$ bis zur Ordnung $\ell = 3$ zu bestimmen. Diskutiere die Eigenschaften der resultierenden Multipole.
- c) Berechne das elektrische Feld $\vec{E}(x)$ für $\|x\| > R$, welches zu den Dipol- und Quadrupolmomenten aus Teil b) gehört.

6.2. Kondensator mit Dielektrikum

Betrachte einen Plattenkondensator mit quadratischen Platten der Kantenlänge a und Abstand d . Der Kondensator werde mit der Ladung $\pm Q$ aufgeladen und anschliessend von der Spannungsquelle getrennt. Bringt man den geladenen Kondensator nun oberhalb einer dielektrischen Flüssigkeit (Dichte ρ_{fl} , Permittivität ϵ_r) an, so steigt die Flüssigkeit zwischen den Platten bis zu einer Maximalhöhe h_0 nach oben.



- a) Bestimme die im Kondensator gespeicherte elektrostatische Energie $W_{el}(h)$ in Abhängigkeit von der Steighöhe h und den oben definierten Grössen.
- b) Bestimme die potentielle Energie $W_{pot}(h)$ der Flüssigkeit zwischen den Platten als Funktion von h .
- c) Leite aus der Bedingung, dass die Gesamtenergie minimiert wird, eine Bestimmungsgleichung für h_0 her. Welche Ladungsmenge muss man bei $a = 20 \text{ cm}$, $d = 5 \text{ mm}$, $\epsilon_r = 3$, $\rho_{fl} = 0.8 \text{ g/cm}^3$ auf den Kondensator aufbringen, damit die Flüssigkeit bis zur Hälfte steigt?

→

6.3. Magnetfeld einer kreisförmigen Leiterschleife

Betrachte einen leitenden Draht in der Form eines Kreises mit Radius R im Zentrum der x,y -Ebene. Ein konstanter Strom I fliesse gegen den Uhrzeigersinn durch diese Schleife.

- Berechne das Magnetfeld \vec{B} an einem beliebigen Punkt auf der z -Achse.
- Berechne nun das Magnetfeld \vec{B} an einem beliebigen Punkt in der x,y -Ebene. Das Ergebnis sollte ein elliptischer Integral der nicht analytisch lösbar ist. Prüfe dass er im Ursprung mit dem Resultat aus Teil a) übereinstimmt.

6.4. Magnetisches Moment einer rotierenden Kugelschale

Eine Kugelschale mit Radius R und Ladung Q (homogen auf der Oberfläche verteilt) rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$.

- Berechne die Stromdichte $\vec{j}(x) = \vec{v}(x)\rho(x)$.
- Berechne das magnetische Moment $\vec{m} = \frac{1}{2} \int dx^3 (\vec{x} \times \vec{j}(x))$ der Kugelschale.
- Zeige, dass das von dieser Kugelschale erzeugte Feld für $\|x\| \gg R$ das Feld eines magnetischen Dipols ist, und gib den führenden Term von \vec{B} an.
Hinweis: Verwende das Biot-Savart-Gesetz und betrachte nur die führenden nicht-verschwindenden Terme in $R/\|x\|$.
- Sei nun \vec{x}' ein Vektor mit $\vec{x}' \perp \vec{\omega}$ und $\|x'\| \gg R$. Berechne in niedrigster Ordnung die Kraft, die das in der vorangehenden Teilaufgabe berechnete Magnetfeld auf eine zweite gleichartige Kugelschale ausübt, die am Ort \vec{x}' mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ parallel zu $\vec{\omega}$ rotiert. Aufgrund des grossen Abstandes der beiden Kugelschalen ist es zulässig, sie als punktförmige Objekte mit magnetischem Moment zu behandeln.

6.5. Vektorpotential einer Leiterschleife

Eine kreisförmige Leiterschleife mit Radius a und einer vernachlässigbaren Dicke führe einen Strom I . Das Koordinatensystem sei so gewählt, dass der Draht in der x,y -Ebene liegt. Wir wollen das Vektorpotential der Stromdichte und daraus die zugehörige magnetische Induktion ausrechnen.

- Finde ein Vektorpotential für den Stromkreis anhand der Formel

$$\vec{A} = \mu_0 \int dx'^3 \frac{\vec{j}(x')}{4\pi\|x - x'\|}. \quad (6.3)$$

Hinweis: Entwickle $1/\|x - x'\|$ in den $Y_{\ell,m}$ und benütze $Y_{\ell,-m} = (-1)^m Y_{\ell,m}^*$.

- Berechne aus dem Vektorpotential die magnetische Induktion an der Stelle x mit $\|x\| < a$. In Aufgabe 6.3 haben wir gesehen, dass die magnetische Induktion a) auf der z -Achse und b) in der x,y -Ebene der Schleife jeweils in die z -Richtung zeigt. Kannst du diese Resultate bestätigen?

Hinweis: Verwende, dass

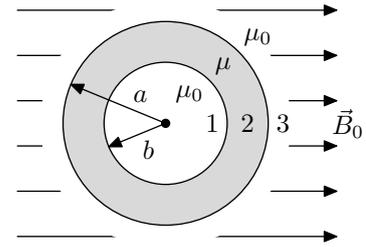
$$P_\ell^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_\ell(x). \quad (6.4)$$

- Nimm nun an, dass die Leiterschleife von einem Eisenmantel mit unendlicher relativer Permeabilität umgeben wird. Was ändert sich für die magnetische Induktion? Wie würde man vorgehen um das Problem zu lösen (keine Rechnung)?

→

6.6. Eisenrohr im Magnetfeld

Ein unendlich langer Hohlzylinder (Innenradius b , Außenradius a) werde mit seiner Achse senkrecht zu einer ursprünglich homogenen magnetischen Flussdichte \vec{B}_0 platziert. Der Hohlzylinder sei aus Eisen (Permeabilität μ). Es wird angenommen, dass die ursprüngliche Flussdichte \vec{B}_0 klein genug ist, dass das Eisen nicht saturiert wird, und dass die Permeabilität μ in dem relevanten Bereich konstant ist.



- a) Leite einen Ausdruck für \vec{B} im Hohlraum ($r < b$) her.

Hinweis: Verwende die Abwesenheit freier Ströme, um das Magnetfeld H über ein skalares Potential Φ mit $\vec{H} = -\vec{\nabla}\Phi$ zu ausdrücken. Die Laplace-Gleichung gilt in allen drei relevanten Raumbereichen. In Zylinderkoordinaten (r, φ, z) gilt für den Laplace-Operator

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (6.5)$$

Die Randbedingungen von H und B an den Grenzflächen sowie das Verhalten für $r \rightarrow 0$ und $r \rightarrow \infty$ fixieren die Konstanten in der Lösung der Differentialgleichung.

- b) Skizziere die magnetischen Feldlinien im gesamten Raumgebiet, bevor und nachdem der Zylinder im Feld platziert wird. Betrachte auch die Fälle eines paramagnetischen ($\mu_r > 1$), eines diamagnetischen ($\mu_r < 1$), und eines supraleitenden ($\mu_r = 0$) Zylinders.

6.7. Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld

Betrachte ein Punktteilchen mit Ladung q in einem elektromagnetischen Feld, beschrieben durch ein Vektorpotential A und ein skalares Potential Φ . Die Lagrange-Funktion des Teilchens ist gegeben durch

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + q \dot{x} \cdot \vec{A}(x, t) - q \Phi(x, t), \quad (6.6)$$

wobei x die Position des Teilchens beschreibt und m seine Masse.

- a) Bestimme den kanonischen Impuls \vec{p} ,

$$p_i = \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}_i}. \quad (6.7)$$

Was ist die Relation zwischen dem kanonischen Impuls p und dem kinetischen Impuls $m\dot{x}$? Bestimme die Hamilton-Funktion mithilfe einer Legendre-Transformation,

$$H(x, p, t) = \vec{p} \cdot \dot{x} - L(x, \dot{x}, t). \quad (6.8)$$

- b) Leite aus $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ her, dass

$$\sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) \dot{x}_j = (\dot{x} \times \vec{B})_i. \quad (6.9)$$

- c) Leite aus den Hamiltonschen Gleichungen

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (6.10)$$

die Bewegungsgleichung für ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld her

$$m \ddot{x} = q (\vec{E} + \dot{x} \times \vec{B}). \quad (6.11)$$

7.1. Elektrisches Feld eines beweglichen Drahtes

Stelle dir einen unendlich langen Draht in z -Richtung vor, der einen konstanten Strom I führt und sich in y -Richtung mit konstanter Geschwindigkeit v bewegt. Unser Ziel ist es, das elektrische Feld dieser Konfiguration zu bestimmen.

- Berechne das Magnetfeld eines statischen Drahtes in Zylinderkoordinaten.
- Transformiere die y -Koordinate so, dass der Draht sich mit Geschwindigkeit v bewegt, und berechne das koordinatentransformierte Magnetfeld B .
- Berechne die Rotation des elektrischen Feldes, das von diesem zeitabhängigen Magnetfeld erzeugt wird.
- Verwende die Translationssymmetrie in z -Richtung und die Maxwell-Gleichungen um das elektrische Feld zu bestimmen.

7.2. Gegeninduktivität

Eine kleine Drahtschleife mit Radius a wird in einem Abstand z über der Mitte einer grossen Schleife mit Radius b gehalten. Die Ebenen der beiden Schleifen verlaufen parallel und senkrecht zur gemeinsamen Achse.

- Zeige, dass das Magnetfeld im Abstand z über dem Mittelpunkt einer kreisförmigen Schleife mit Radius R und konstantem Strom I die folgende Form hat:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z. \quad (7.1)$$

- Ein Strom I fliesse in der grossen Schleife. Bestimme den magnetischen Fluss durch die kleine Schleife. Die kleine Schleife ist so klein, dass man das Feld der grossen Schleife im Wesentlichen als konstant betrachten kann.
- In der kleinen Schleife fliesse nun ein Strom I . Bestimme den magnetischen Fluss durch die grosse Schleife. Die kleine Schleife ist so klein, dass man sie als magnetischen Dipol betrachten kann.

Hinweis: Das Magnetfeld eines magnetischen Dipols $m\vec{e}_z$ hat in sphärischen Koordinaten die Form:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \vartheta \vec{e}_r + \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta). \quad (7.2)$$

- Berechne die Gegeninduktivitäten und bestätige, dass $L_{12} = L_{21}$.

→

7.3. Induktion im Magnetfeld

Gegeben sei ein homogenes, parallel zur z -Achse ausgerichtetes Magnetfeld B . Im Magnetfeld befinde sich ein leitender Draht in der Form eines Kreises mit Radius R , der mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ rotiere. Die Rotationsachse liege in der Ebene des Leiters und verlaufe durch seinen Mittelpunkt. Sie bilde mit der Magnetfeldrichtung den Winkel ϑ . Berechne die im Leiter induzierte Spannung U als Funktion der Zeit.

7.4. Selbstinduktion eines Koaxialkabels

Ein Koaxialkabel bestehe aus zwei koaxialen leitenden Zylinderschalen mit den Radien R_1 und R_2 mit $R_1 < R_2$. Durch jede der beiden Zylinderschalen fließe entlang ihrer Achsen ein Strom I in entgegengesetzter Richtung. Berechne das Magnetfeld des Kabels und skizziere die entsprechenden Magnetfeldlinien. Berechne die Selbstinduktion pro Längeneinheit für das Koaxialkabel. Überprüfe dann, ob die Formel für die magnetische Energie des Kabels gilt:

$$W = \frac{1}{2}LI^2. \quad (7.3)$$

Hinweis: Bestimme die Selbstinduktion aus dem magnetischen Fluss durch eine vom Stromdurchgang umschlossene Fläche

$$\Psi = LI. \quad (7.4)$$

8.1. Der Poynting-Vektor

Die Maxwell-Gleichungen im Vakuum sind gegeben durch

$$\vec{\partial} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}, \quad \vec{\partial} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E}, \quad (8.1)$$

und die Lichtgeschwindigkeit beträgt $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$.

a) Zeige die folgende Identität,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (c^2 \vec{B}^2 + \vec{E}^2) = -c^2 \vec{\partial} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{E} \cdot \vec{j}. \quad (8.2)$$

b) Betrachte ein Teilchen der Ladung q , welches sich mit der Geschwindigkeit \vec{v} in einem elektromagnetischen Feld bewege. Zeige, dass die Zeitableitung seiner kinetischen Energie gegeben ist durch

$$\dot{W}_{\text{kin}} = q \vec{v} \cdot \vec{E}. \quad (8.3)$$

Was ist das Äquivalent für eine kontinuierliche Ladungsverteilung?

Der Poynting-Vektor ist definiert als

$$\vec{S} := \varepsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B}. \quad (8.4)$$

c) Beweise den Satz von Poynting,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_V dx^3 (c^2 \vec{B}^2 + \vec{E}^2) + W_{\text{kin}} \right) = - \oint_{\partial V} dx^2 \vec{n} \cdot \vec{S}, \quad (8.5)$$

wobei V ein beliebiges, zeitlich konstantes Volumen und ∂V dessen Oberfläche sei. Interpretiere die physikalische Bedeutung eines jeden Terms.

8.2. Gesamtkraft mittels Spannungstensor

Betrachte das elektrostatische Feld \vec{E} , das durch eine gleichmässig geladene Kugel mit Radius R und Ladung Q induziert wird. Berechne mittels des Maxwell'schen Spannungstensors und Symmetrieüberlegungen die Gesamtkraft \vec{F}_H , die das elektrische Feld auf die nördliche Halbkugel H mit $z > 0$ ausübt.

Hinweis: Die Komponenten des Spannungstensors T_{jk} mit $j, k = x, y, z$ haben die Form

$$T_{jk} = \varepsilon_0 (E_j E_k - \frac{1}{2} \delta_{jk} \vec{E}^2). \quad (8.6)$$

Berechne die Normalkomponenten von T auf der Oberfläche ∂H und integriere.

→

8.3. Invarianter Abstand

Ein Lorentz-Boost mit beliebiger Richtung und Geschwindigkeit ist gegeben durch

$$t' = \gamma t - \frac{\gamma}{c^2} \vec{x} \cdot \vec{v}, \quad \vec{x}' = \vec{x} - \gamma \vec{v} t + (\gamma - 1) \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v}, \quad \text{wobei} \quad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (8.7)$$

- a) Finde eine Matrix $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu$ (in 1 + 3 Block-Form), so dass die obige Transformation von der Form $x'^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x^\nu$ ist.
- b) Bestätige, dass die Matrix $\Lambda^\mu{}_\nu$ aus Teil a) die folgende Relation erfüllt

$$\Lambda^\lambda{}_\mu \eta_{\lambda\sigma} \Lambda^\sigma{}_\nu = \eta_{\mu\nu}. \quad (8.8)$$

Hinweis: O.b.d.A. kann man annehmen, dass $\vec{v} = v\vec{e}_z$.

- c) Das Abstandsquadrat zwischen zwei Raumzeit-Punkten x_1 und x_2 ist gegeben durch $s^2 = s^\mu s_\mu$ mit dem Abstandsvektor $s^\mu := x_1^\mu - x_2^\mu$. Zeige, dass es eine skalare Grösse unter Lorentz-Transformationen ist und zudem invariant unter Poincaré-Transformationen.

9.1. Elektromagnetischer Feldtensor

Der elektromagnetische Feldtensor ist gegeben durch

$$F_{\mu\nu} = -\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & c^{-1}E_x & c^{-1}E_y & c^{-1}E_z \\ -c^{-1}E_x & 0 & -B_z & +B_y \\ -c^{-1}E_y & +B_z & 0 & -B_x \\ -c^{-1}E_z & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.1)$$

- a) Zeige, dass der elektromagnetische Feldtensor invariant ist unter der folgenden Eichtransformation mit einem beliebigen skalaren Feld Λ

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda. \quad (9.2)$$

- b) Der duale elektromagnetische Feldtensor sei definiert als

$$\tilde{F}_{\mu\nu} := \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}. \quad (9.3)$$

Bestimme die Matrixelemente von $\tilde{F}_{\mu\nu}$ analog zu dem obigen Ausdruck für $F_{\mu\nu}$.

- c) Bestätige, dass die homogenen Maxwell-Gleichungen $\vec{\partial} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$ und $\vec{\partial} \cdot \vec{B} = 0$ ausgedrückt werden können als

$$\partial^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0. \quad (9.4)$$

- d) Berechne die Kontraktionen $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$ und $\tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$.

→

9.2. Relativistische Kraft

Zwei Teilchen im Abstand d bewegen sich mit identischer Geschwindigkeit v in eine Richtung senkrecht zu ihrem Abstand. Beide Teilchen tragen die Ladung q .

- a) Transformiere das elektromagnetische Feld eines der Teilchen aus dem Ruhesystem der Teilchen in das Bezugssystem des Beobachters. Berechne dann die Kraft zwischen den Teilchen im Bezugssystem des Beobachters.
- b) Die relativistische Vierer-Kraft ist definiert als $K^\mu := dp^\mu/d\tau$ mit der Eigenzeit τ des Teilchens. Zeige, dass $d/d\tau = \gamma d/dt$, wobei t die Zeit im Bezugssystem des Beobachters ist. Benutze dies um zu zeigen, dass die Komponenten der Vierer-Kraft im Bezugssystem des Beobachters die folgende Form haben

$$K^\mu = \gamma(\vec{F} \cdot \vec{v}/c, \vec{F}), \quad (9.5)$$

wobei \vec{F} die Kraft auf das Teilchen im Bezugssystem des Beobachters bezeichne.

Hinweis: Leite die Invariante $p^\mu p_\mu$ nach t ab.

- c) Stelle die Transformationsregel für K^μ zwischen dem Ruhesystem der Teilchen und dem Bezugssystem des Beobachters auf. Bestätige, dass die Kraft aus Teil a) konsistent mit der transformierten Kraft aus dem Ruhesystem der Teilchen ist.

9.3. Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation in einem dreidimensionalen Raum und ihre Inverse seien gegeben durch

$$\tilde{f}(\vec{k}) = \int dx^3 f(\vec{x}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \quad f(\vec{x}) = \int \frac{dk^3}{(2\pi)^3} \tilde{f}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}. \quad (9.6)$$

Zeige die folgenden Identitäten für die Fourier-Transformation:

- a) $h(x) = af(x) + bg(x) \implies \tilde{h}(k) = a\tilde{f}(k) + b\tilde{g}(k)$ ($a, b \in \mathbb{C}$).
- b) $\vec{h}(x) = \vec{\partial}f(x) \implies \tilde{\vec{h}}(k) = i\vec{k}\tilde{f}(k)$.
- c) $h(x) = f(x)g(x) \implies \tilde{h}(k) = (2\pi)^{-3}(\tilde{f} * \tilde{g})(k) := (2\pi)^{-3} \int dk'^3 \tilde{f}(k') \tilde{g}(k - k')$. This is also known as the convolution theorem.
- d) $h(x) = f^*(x) \implies \tilde{h}(k) = \tilde{f}^*(-k)$.
- e) $h(x) = \delta^3(x) \implies \tilde{h}(k) = 1$.
- f) $\vec{h}(x) = \vec{\partial}\delta^3(x) \implies \tilde{\vec{h}}(k) = i\vec{k}$.

→

9.4. Teilweise polarisiertes Licht

Eine fast monochromatische elektromagnetische Welle, die sich in z -Richtung ausbreitet, sei in komplexer Notation beschrieben durch

$$\vec{B} = \vec{e}_z \times \vec{E}, \quad \vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}(t - z/c), \quad \vec{E}(t) = \vec{E}_0(t) e^{-i\omega_0 t}, \quad \vec{E}_0(t) = \begin{pmatrix} E_1(t) \\ E_2(t) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9.7)$$

Wir nehmen an, dass die charakteristische Zeitskala von \vec{E}_0 (genannt Kohärenzzeit τ), über welche die Schwankungen von \vec{E}_0 korreliert sind, viel grösser als eine Periode mit Zeitskala $2\pi/\omega_0$, jedoch rasch veränderlich auf der Zeitskala optischer Polarisationsmessungen ist. Das erlaubt uns, die Fluktuationen zu mitteln und die Amplituden \vec{E}_0 als Zufallsvariablen aufzufassen. Wir bezeichnen Mittelwerte mit dem Symbol $\langle \cdot \rangle$. Wir wollen zeigen, dass die gesamte Information über die Polarisation der Welle in der folgenden hermiteschen Matrix enthalten ist

$$S = \begin{pmatrix} \langle E_1 E_1^* \rangle & \langle E_1 E_2^* \rangle \\ \langle E_2 E_1^* \rangle & \langle E_2 E_2^* \rangle \end{pmatrix} = S^\dagger. \quad (9.8)$$

a) Zeige, dass S wie folgt parametrisiert werden kann

$$S = s_0 \sigma_0 + s_1 \sigma_1 + s_2 \sigma_2 + s_3 \sigma_3, \quad (9.9)$$

mit den Stokesschen Parametern $s_i \in \mathbb{R}$ sowie den Einheits- und Pauli-Matrizen σ_i

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (9.10)$$

Hinweis: Die Matrizen der Form S bilden einen Vektorraum der reellen Dimension 4.

b) Zeige unter Verwendung der Relation $\sigma_i \sigma_j = \sum_k i \varepsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij} \sigma_0$ ($i, j \neq 0$), dass die Matrizen σ_i eine Orthonormalbasis für hermitesche 2×2 Matrizen bezüglich des Skalarprodukts $A \cdot B := \frac{1}{2} \text{tr}(AB)$ bilden.

c) Drücke die Stokesschen Parameter s_i durch die Mittelwerte $\langle E_j E_k^* \rangle$ aus.

d) Zeige, dass die Matrix S positiv definit ist und bestimme ihre Eigenwerte. Folgere die Gültigkeit der Ungleichung $\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} \leq s_0$.

e) Zeige, dass $s_0 = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}$ im Fall einer konstanten Polarisation $\vec{E}_0 = \text{const}$ der elektromagnetischen Welle gilt.

f) Berechne die Stokesschen Parameter für eine linear polarisierte Welle mit Winkel α in der x, y -Ebene sowie für beide zirkular polarisierte Moden.

Interpretiere alle Stokesschen Parameter s_i anhand ihrer physikalischen Bedeutung. Was bedeutet der Fall $s_1 = s_2 = s_3 = 0$?

→

9.5. Gruppengeschwindigkeit

Ein eindimensionales Wellenpaket $\phi(x, t)$ bewege sich in einem dispersiven Medium, d.h. die Kreisfrequenz $\omega(k)$ hängt nicht-linear von der Wellenzahl k ab. Zum Zeitpunkt $t = 0$ habe es ein Gaußsches Profil

$$\phi(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2(\Delta x)^2}\right), \quad (9.11)$$

wobei wir Δx als Mass für die räumliche Ausdehnung des Wellenpakets auffassen. Die Zeitentwicklung ist gegeben durch

$$\phi(x, t) = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{\phi}(k) e^{ikx - i\omega(k)t}, \quad (9.12)$$

wobei $\tilde{\phi}(k)$ die Fourier-Transformierte von $\phi(x)$ bei der Zeit $t = 0$ sei.

- a) Zeige mittels quadratischer Ergänzung, dass das Fourier-transformierte Wellenpaket bei $t = 0$ ebenfalls ein Gaußsches Profil hat. Welches Verhältnis besteht zwischen Δx und dem analog definierten Δk ? Was bedeutet dies?

Hinweis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) = \sqrt{2\pi} |\sigma|. \quad (9.13)$$

- b) Zeige, dass sich das Maximum des Wellenpakets innerhalb der Zeit t um die Strecke $v_g t$ vom Ursprung fortbewegt, wobei die *Gruppengeschwindigkeit* v_g gegeben ist durch

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0}. \quad (9.14)$$

Hier sei k_0 die Wellenzahl am Maximum von $\tilde{\phi}(k)$.

Hinweis: Entwickle $\omega(k)$ bis zur ersten Ordnung in k um k_0 , und ermittle die Änderung des Maximums des Wellenpakets mittels (9.12). Benutze weiterhin (9.13).

- c) Mit welcher Geschwindigkeit bewegen sich die einzelnen Phasen? Unter welcher Bedingung sind Phasen- und Gruppengeschwindigkeit der Welle gleich?
- d) Schätze ab, wie schnell sich das Wellenpaket verbreitert, indem Du einen Ausdruck für die Variation der Gruppengeschwindigkeit innerhalb des Pulses findest. Benutze dann die Relation zwischen Δk und Δx aus Teil a) und interpretiere das Ergebnis dementsprechend.

Hinweis: Schätze die Variation als Differenz Δv_g der Gruppengeschwindigkeiten für k_0 und $k_0 + \Delta k$ (analog zu (9.14)) ab und bestimme Δv_g durch Entwicklung von $\omega(k)$ um k_0 bis zur ersten beitragenden Ordnung.

10.1. Wellenpakete und Fourier-Raum

In dieser Aufgabe werden wir die explizite Zeitentwicklung eines ebenen elektromagnetischen Wellenpakets mittels Transformation in den Fourier-Raum lösen. Das Wellenpaket zur Zeit $t = 0$ hat die folgende Form:

$$\vec{E}_0 = \frac{2A}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma}\right) \vec{e}_x, \quad \vec{B}_0 = 0, \quad (10.1)$$

wobei $\sigma > 0$ seine Breite und $A \in \mathbb{R}$ seine Amplitude beschreibt.

- a) Transformiere das Wellenpaket in den Fourier-Raum.

Eine elektromagnetische Welle nimmt im Fourier-Raum die folgende allgemeine Form an:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \int \frac{dk^3}{(2\pi)^3} [\vec{\alpha}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-i\omega t} + \vec{\alpha}(\vec{k})^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}+i\omega t}], \\ \vec{B} &= \int \frac{dk^3}{(2\pi)^3} [\vec{\beta}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-i\omega t} + \vec{\beta}(\vec{k})^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}+i\omega t}], \end{aligned} \quad (10.2)$$

wobei $\omega = \omega(\vec{k}) := \|\vec{k}\|c$ die zu einer gegebenen Wellenzahl \vec{k} zugehörige Kreisfrequenz bezeichnet.

- b) Zeige, dass das Wellenpaket im Fourier-Raum mit der allgemeinen Form einer elektromagnetischen Welle bei $t = 0$ übereinstimmt, wenn $\vec{\alpha}$ und $\vec{\beta}$ wie folgt gewählt sind:

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} &= (2\pi)^2 A \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma k_z^2\right) \delta(k_x) \delta(k_y) \vec{e}_x, \\ \vec{\beta} &= (2\pi)^2 \frac{A}{c} \text{sign}(k_z) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma k_z^2\right) \delta(k_x) \delta(k_y) \vec{e}_y. \end{aligned} \quad (10.3)$$

- c) Bestätige, dass die freien Maxwell-Gleichungen im Fourier-Raum erfüllt sind:

$$\vec{k}\cdot\vec{\alpha} = \vec{k}\cdot\vec{\beta} = 0, \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{k}\times\vec{\alpha}}{\omega}, \quad \vec{\alpha} = -\frac{c^2\vec{k}\times\vec{\beta}}{\omega}. \quad (10.4)$$

- d) Berechne die elektromagnetischen Felder $\vec{E}(\vec{x}, t)$ und $\vec{B}(\vec{x}, t)$ als explizite Ausdrücke im Ortsraum, und zeige, dass sie die Maxwell-Gleichungen erfüllen.

- e) Berechne die elektromagnetische Energiedichte je Flächeneinheit in der x, y -Richtung

$$\frac{d^2W}{d^2A} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int dz (\vec{E}^2 + c^2\vec{B}^2). \quad (10.5)$$

Überzeuge dich, dass sie zeitunabhängig ist.

→

10.2. Elliptisch polarisierte Wellen

Eine Welle $\vec{E}(\vec{x}, t)$ mit Wellenvektor $\vec{k} = k\vec{e}_z$ ist gegeben durch

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} A \cos(kz - \omega t) \\ B \cos(kz - \omega t + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10.6)$$

- a) Die Bahn des Vektors $\vec{E}(0, t)$ beschreibt die Polarisation der Welle. Zeige, dass sie eine Ellipse ist. Für welche Werte von A , B und φ ist diese Bahn ein Kreis?

Hinweis: Die Gleichung einer Ellipse lautet

$$aE_x^2 + 2bE_xE_y + cE_y^2 + f = 0, \quad (10.7)$$

wobei $b^2 - ac > 0$ und $f < 0$.

- b) Zeige, dass für allgemeine A und B die Welle als Superposition

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_+(z, t) + \vec{E}_-(z, t) \quad (10.8)$$

zweier entgegengesetzt zirkular polarisierten Wellen

$$E_{\pm}(z, t) = \text{Re}(A_{\pm}\vec{e}_{\pm} e^{ikz - i\omega t}) \quad (10.9)$$

mit $\vec{e}_{\pm} := \vec{e}_x \pm i\vec{e}_y$ und den Konstanten A_{\pm} geschrieben werden kann. Bestimme A_{\pm} als Funktion von A , B und φ .

Hinweis: Schreibe die Welle als Realteil eines komplexen Vektors mit der Phase $e^{ikz - i\omega t}$ einer komplexen ebenen Welle und drücke \vec{e}_x and \vec{e}_y durch \vec{e}_{\pm} aus.

10.3. Energie- und Impulsfluss einer ebenen Welle

Wir betrachten eine reelle monochromatische ebene Welle, die sich in z -Richtung ausbreitet, in x -Richtung polarisiert ist und die Amplitude E_0 hat.

- a) Berechne den Poynting-Vektor \vec{S} , und zeige, dass die Intensität $I := \langle \|\vec{S}\| \rangle$ der Welle gegeben ist durch

$$I = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E_0^2. \quad (10.10)$$

- b) Der Maxwellsche Spannungstensor T ist definiert als

$$T_{ij} := \varepsilon_0(E_i E_j - \frac{1}{2}\delta_{ij} \vec{E}^2) + \frac{1}{\mu_0}(B_i B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij} \vec{B}^2). \quad (10.11)$$

Berechne T für die gegebene ebene Welle. Was sagt dies über den Impulsfluss aus?

- c) Wie sind Impulsflussdichte und Energieflussdichte in diesem Fall verknüpft?

11.1. Strahlung einer linearen Antenne

Betrachte eine dünne, lineare Antenne der Länge $2d$, welche auf der z -Achse liegt und im Ursprung zentriert ist. Durch die Antenne verlaufe ein oszillierender Strom, dessen Wellenlänge der Länge der Antenne entspreche. Daher gilt $\lambda = 2d$ und $\omega = \pi c/d$, und die Amplitude des Stromes sei I_0 .

Hinweis: Diese Antenne unterscheidet sich von der in der in der Vorlesung diskutierten. Dort ist der oszillierende Strom symmetrisch um den Ursprung verteilt, hier dagegen antisymmetrisch.

- a) Zeige, dass das Vektorpotential $A(x, t)$ die folgende Form besitzt:

$$\vec{A}(x, t) = \mu_0 I_0 \vec{e}_z e^{-i\omega t} \int_{-d}^d dz' \frac{\sin(kz')}{4\pi r'} e^{ikr'}, \quad (11.1)$$

wobei $r' = \|x - x'\|$ mit $\vec{x}' = z'\vec{e}_z$ und $k = \omega/c$ der Wellenvektor ist.

Im Folgenden betrachten wir die Strahlungszone, für die $r \gg 2d = \lambda$ gilt mit $r = \|x\|$. Mit dem Einheitsvektor \vec{n} in Richtung \vec{x} können wir hier folgende Näherung annehmen:

$$\|x - x'\| = r - \vec{n} \cdot \vec{x}' + \dots, \quad (11.2)$$

- b) Berechne den exakten Ausdruck für die emittierte Strahlungsleistung je Raumwinkelement, und zeichne die Winkelverteilung als Funktion des Polarwinkels ϑ auf.

Hinweis: Verwende die folgende Identität für die Berechnung des Vektorpotentials:

$$\int dx \sin(ax) e^{-ibx} = \frac{e^{-ibx}}{b^2 - a^2} (a \cos(ax) + ib \sin(ax)). \quad (11.3)$$

Weiterhin ist es hilfreich, einen Ausdruck für die abgestrahlte Leistung je Raumwinkelement anhand des Poynting-Vektors zu benutzen.

- c) Betrachte nun die Multipolentwicklung des Vektorpotentials,

$$e^{ik\vec{n} \cdot \vec{x}'} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} (\vec{n} \cdot \vec{x}')^m, \quad (11.4)$$

und behalte nur die führenden Terme in k . Berechne die Strahlungsleistung je Raumwinkelement in dieser Näherung und zeichne die Winkelverteilung als Funktion von ϑ .

- d) Vergleiche die Ergebnisse in Teil b) und Teil c). Diskutiere und Begründe die Gültigkeit der Näherung in der Multipolentwicklung.

→

11.2. Strahlung in relativistischer Kreisbewegung

Eine Punktladung q bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit $v \approx c$ auf einer Kreisbahn mit Radius R in der x, z -Ebene. Zur Zeit t' durchläuft sie den Ursprung mit Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} = v\vec{e}_z$ und wird mit $\vec{a} = a\vec{e}_x = (v^2/R)\vec{e}_x$ beschleunigt.

Das elektrische Feld an der Stelle \vec{x} zur Zeit $t = t' + \|\vec{x} - \vec{x}'\|/c$ einer relativistischen Punktladung am Orte \vec{x}' mit Geschwindigkeit \vec{v} und Beschleunigung \vec{a} ist gegeben durch

$$\vec{E}(x, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\|\vec{x} - \vec{x}'\|}{((\vec{x} - \vec{x}') \cdot \vec{w})^3} \left[(1 - \beta^2)\vec{w} + \frac{1}{c^2} (\vec{x} - \vec{x}') \times (\vec{w} \times \vec{a}) \right], \quad (11.5)$$

wobei $\vec{w} := (\vec{x} - \vec{x}')/\|\vec{x} - \vec{x}'\| - \vec{v}/c$ und $\beta := v/c$.

- a) Mithilfe von Kugelkoordinaten und unter Vernachlässigung von Termen in (11.5), die schneller als $1/r$ abfallen, zeige dass das elektrische Feld, welches von einem Beobachter an der Position $\vec{x} = r\vec{e}_r$ mit grosser Distanz r gemessen wird, gegeben ist durch

$$\vec{E}_{\text{rad}}(x, t) = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \frac{(\beta - \cos \vartheta) \cos \varphi \vec{e}_\vartheta + (1 - \beta \cos \vartheta) \sin \varphi \vec{e}_\varphi}{(1 - \beta \cos \vartheta)^3}. \quad (11.6)$$

Für Strahlungsfelder ist \vec{E}_{rad} orthogonal zu $\vec{x} - \vec{x}'$ und der Poynting-Vektor für die Strahlungskomponenten der Felder ist

$$\vec{S}_{\text{rad}} = \frac{1}{\mu_0 c} \vec{E}_{\text{rad}}^2 \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|}. \quad (11.7)$$

- b) Benutze (11.6) und (11.7) um zu zeigen, dass der Poynting-Vektor am Ort des Beobachters gegeben ist durch

$$\vec{S}_{\text{rad}} = \frac{\mu_0 q^2 v^4}{16\pi^2 c r^2 R^2} \frac{(1 - \beta \cos \vartheta)^2 - (1 - \beta^2) \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta}{(1 - \beta \cos \vartheta)^6} \vec{e}_r. \quad (11.8)$$

Wir betrachten nun die gesamte nach Unendlich abgestrahlte Strahlungsleistung der Punktladung gemessen auf einer zum Orbit konzentrischen Sphäre

$$P = r^2 \oint d^2\Omega \vec{e}_r \cdot \vec{S}_{\text{rad}} \frac{\vec{x} \cdot \vec{w}}{r}. \quad (11.9)$$

- c) Da sich das Teilchen relativistisch bewegt, weicht die Leistung am Beobachtungspunkt zur retardierten Zeit t_{ret} von der vom Teilchen abgegebenen Leistung zur Zeit t ab. Zeige, dass die durch die Beziehung $c(t - t_{\text{ret}}) = \|\vec{x} - \vec{x}'\|$ definierten Retardierungseffekte den Faktor $(\partial t_{\text{ret}}/\partial t)^{-1} = \vec{x} \cdot \vec{w}/r$ in der obigen Formel für die abgestrahlte Leistung erklären.
- d) Zeige, dass sich für die gesamte abgestrahlte Leistung folgendes ergibt:

$$P = \frac{\mu_0 q^2 v^4}{6\pi c R^2 (1 - \beta^2)^2}. \quad (11.10)$$

- e) Berechne die nach Unendlich abgestrahlte Energie während eines Kreisumlaufs. Welche Menge Energie wird von einem Elektron ($m_e = 511 \text{ keV}/c^2$) mit $\beta = 0.8$ and $R = 20 \text{ m}$ während eines Kreisumlaufs abgestrahlt? Vergleiche diesen Wert mit der gesamten relativistischen Energie des Teilchens.

12.1. Liénard-Wiechert Potential

Betrachte eine Ladung, die sich mit konstanter Geschwindigkeit v geradlinig entlang der positiven z -Achse ausgehend von $z = 0$ bei $t = 0$ bewege. Wir wollen zeigen, dass ihr skalares Potential gegeben ist durch

$$\Phi(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(z - vt)^2 + (1 - v^2/c^2)(x^2 + y^2)}}. \quad (12.1)$$

- Berechne das Liénard-Wiechert Potential direkt im Bezugssystem des Beobachters.
- Berechne das Potential zunächst im Ruhesystem der Ladung und transformiere es dann zurück in das Ruhesystem des Beobachters.

12.2. Reflexion an einem idealen Leiter

Eine monochromatische Welle mit elektrischem Feld $\vec{E}_1 = \text{Re}[E e^{i(kz - \omega t)} \vec{e}_x]$ mit $\omega = kc$ im leeren Raum $z < 0$ falle auf einen idealen Leiter, welcher den Raum $z > 0$ ausfüllt.

- Berechne das magnetische Feld der Welle aus den Maxwell-Gleichungen.
- Bestimme die Felder der reflektierten Welle, \vec{E}_2 und \vec{B}_2 , sodass die gesamten Felder die Randbedingungen $E_{\parallel} = 0$ und $B_{\perp} = 0$ auf der Oberfläche des Leiters erfüllen. Berechne den Oberflächenstrom in der Ebene $z = 0$.
- Berechne den über die Zeit gemittelten Druck auf den Leiter aufgrund der induzierten Lorentz-Kraftdichte. Vergleiche dein Ergebnis mit dem Strahlungsdruck der Welle.
Hinweis: Nimm an, dass $\theta(z < 0)\delta(z) = \frac{1}{2}\delta(z)$.

12.3. Brechung von ebenen Wellen

Eine ebene Welle falle senkrecht auf eine ebene Schicht zwischen zwei Medien. Die Brechungsindizes der drei nichtmagnetischen Medien seien n_1 , n_2 und n_3 . Die Dicke der Zwischenschicht sei d , während die anderen beiden Medien jeweils einen Halbraum füllen.

- Berechne die Reflektions- und Transmissionskoeffizienten (d.h. den reflektierten bzw. transmittierten Energiestrom bezogen auf den einfallenden Energiestrom).

Hinweis: Die zeitlich gemittelte Energiestromdichte einer komplexen Welle ist gegeben durch

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{B}^*). \quad (12.2)$$

- Das Medium mit dem Brechungsindex n_1 sei Teil eines optischen Systems (z.B. einer Linse), während das Medium mit Brechungsindex n_3 aus Luft bestehe ($n_3 = 1$). Die Oberfläche des ersten Mediums soll mit einer Schicht (Brechungsindex n_2) versehen werden, so dass bei einer bestimmten Frequenz ω_0 keine reflektierende Welle auftritt. Welche Dicke d und welchen Brechungsindex n_2 muss diese Schicht haben?

→

12.4. Lichtstreuung

Die klassische Theorie der Lichtstreuung (bekannt als Rayleigh-Theorie) wird verwendet, um die Streuung von Licht an kleinen Molekülen (mit einer im Vergleich zur Wellenlänge λ des einfallenden Lichtes viel kleineren Ausdehnung) zu beschreiben. Hier betrachten wir die elektrischen und magnetischen Felder sowie die Intensität von Licht, das an kleinen Teilchen gestreut wird.

- a) Betrachte zunächst eine ebene monochromatische Lichtwelle, die sich in x -Richtung ausbreitet und in z -Richtung polarisiert ist. Diese Welle wird an einem kleinen polarisierbaren, aber nicht magnetisierbaren Teilchen im Ursprung gestreut. Die einfallende Welle induziert im Teilchen ein Dipolmoment, das zum lokalen Feld proportional ist, $\vec{p}(t) = \alpha \vec{E}(0, t)$, wobei α seine Polarisierbarkeit ist. Bestimme elektrisches und magnetisches Feld der gestreuten Welle an einem Punkt \vec{x} im Fernfeld in Abhängigkeit vom einfallenden Feld E_0 , dem Abstand vom Ursprung r und dem Winkel ϑ zwischen \vec{x} und der z -Achse.
- b) Berechne die Intensität dieser gestreuten Lichtwelle an einem solchen Punkt \vec{x} im Fernfeld des streuenden Teilchens
Hinweis: Verwende den Poynting-Vektor.
- c) Verwende die in der vorigen Aufgabe hergeleitete Wellenlängenabhängigkeit ($\propto 1/\lambda^4$) der Streuwelle, um die blaue Farbe des wolkenlosen Himmels sowie die rote Farbe von Sonnenaufgang und Sonnenuntergang qualitativ zu erklären.

13.1. Rechteckiger Hohlleiter

Betrachte einen unendlich langen Hohlleiter entlang der z -Achse, der einen rechteckigen Querschnitt $0 < x < d_x$ und $0 < y < d_y$ habe. Die Wände seien ideale Leiter. Aufgrund der Geometrie können wir folgenden Ansatz für die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen machen,

$$\begin{aligned}\vec{E}_4(x, y, z, t) &= \text{Re}(\vec{E}_3(x, y) e^{ikz - i\omega t}), \\ \vec{B}_4(x, y, z, t) &= \text{Re}(\vec{B}_3(x, y) e^{ikz - i\omega t}).\end{aligned}\tag{13.1}$$

- a) Die 3-Vektoren \vec{E}_3, \vec{B}_3 zerfallen in 2-Vektoren \vec{E}, \vec{B} (hier: x - und y -Komponenten) und Skalare e, b (z -Komponente). Leite die Gleichungen für die x - und y -Komponenten \vec{E}, \vec{B} in Abhängigkeit ihrer z -Komponenten e, b aus den Maxwell-Gleichungen her und zeige, dass die folgenden Gleichungen gelten,

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2 \right] e &= 0, \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2 \right] b &= 0.\end{aligned}\tag{13.2}$$

- b) Drücke die Randbedingungen $\vec{E}_{\parallel} = B_{\perp} = 0$ als Bedingungen an die z -Komponenten der Felder aus.
- c) Bestimme die Lösungen für sogenannte transversal-magnetische Wellen (TM-Wellen) mit $b = 0$.
- d) Zeige, dass es im rechteckigen Hohlleiter keine transversal-elektromagnetischen Wellen (TEM-Wellen) mit $e = b = 0$ gibt.
Hinweis: Benutze den Satz von Gauß und das Faradaysche Gesetz, sowie die Randbedingungen für \vec{E}_{\parallel} , um zu zeigen, dass es keine TEM-Wellen in diesem Hohlleiter gibt.

13.2. TEM-Mode des Koaxialen Wellenleiters

Eine elektromagnetische Welle propagiert als TEM-Mode entlang der z -Richtung zwischen zwei koaxialen zylindrischen Leitern mit Radien $R_2 > R_1$ um die z -Achse.

- a) Finde die Feldkonfiguration für die TEM-Mode explizit.
- b) Ist die Frequenz für diese Mode beschränkt? Wie lautet die Dispersionsrelation?
- c) Berechne die durchschnittliche Leistung, die entlang des Zylinders transportiert wird.

→

13.3. Optik gemäss dem Prinzip der kleinsten Wirkung

Das Fermatsche Prinzip besagt, dass Licht, welches sich zwischen zwei Raumpunkten \vec{x}_1 und \vec{x}_2 bewegt, den Pfad wählt, der die optische Weglänge minimiert. Letztere ist gegeben durch

$$S = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} n(\vec{x}) d\ell, \quad (13.3)$$

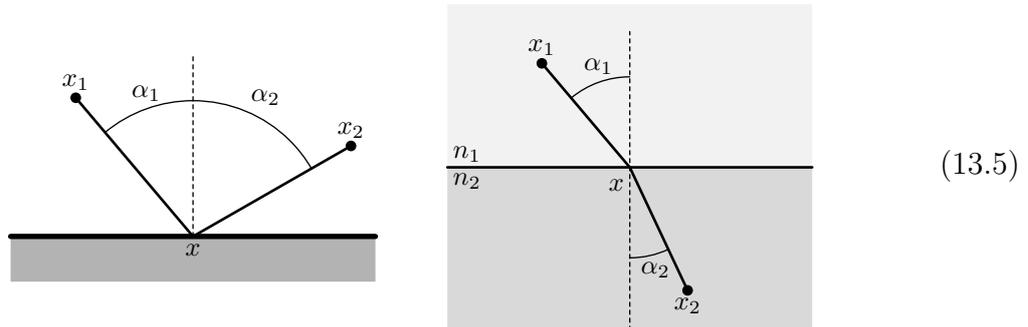
wobei $n(\vec{x})$ den Brechungsindex des Mediums bezeichnet und $d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ die Länge des infinitesimalen Teilstückes der Trajektorie ist, die \vec{x}_1 mit \vec{x}_2 verbindet. Dies ist analog zum Prinzip der kleinsten Wirkung des Lagrange-Formalismus.

Hinweis: Es empfiehlt sich, die Trajektorie für das Integral mit einer Variablen σ zu parametrisieren

$$S = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} n(\vec{x}(\sigma)) \frac{d\ell}{d\sigma} d\sigma = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} n(\vec{x}(\sigma)) \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} d\sigma. \quad (13.4)$$

Da die Wahl von σ nicht zu dem Integral beiträgt, kann man σ (lokal) mit einer der Koordinaten identifizieren.

- a) Bestimme die Trajektorie eines Lichtstrahles zwischen zwei Raumpunkten in einem homogenen Medium.



- b) Betrachte nun Licht, das von einem ebenen Spiegel reflektiert wird. Der Lichtstrahl bewege sich von \vec{x}_1 im Vakuum zu einem Punkt \vec{x} auf der Oberfläche des Spiegels und von dort wieder im Vakuum zum Punkt \vec{x}_2 . Minimiere die optische Weglänge über alle möglichen Punkte \vec{x} auf dem Spiegel und vergleiche für den resultierenden Punkt \vec{x} Einfallswinkel- und Ausfallswinkel.
- c) Betrachte schliesslich Licht, das sich zwischen zwei Medien mit verschiedenen Brechungsindizes n_1 und n_2 bewegt. Die Begrenzungsfläche zwischen den beiden Medien sei eben. Betrachte einen Lichtweg von Punkt \vec{x}_1 im Medium mit n_1 zu einem Punkt \vec{x}_2 im Medium mit n_2 , der die Begrenzungsfläche an dem Punkt \vec{x} passiert, der die Wirkung minimiert. Bestimme die Beziehung zwischen Einfallswinkel- und Ausfallswinkel (Snelliussches Brechungsgesetz).