Allgemeine Mechanik

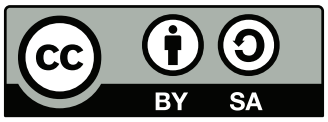
Vorlesungsskript

ETH Zürich, 2017 HS

Prof. N. Beisert

© 2017 Niklas Beisert.

Dieses Dokument sowie seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Dieses Werk ist lizensiert unter der Creative Commons Lizenz „Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International“ (CC BY-SA 4.0).



Die Lizenz kann eingesehen werden unter:
`https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/`.

Die aktuelle Version dieses Werks befindet sich unter:
`http://people.phys.ethz.ch/~nbeisert/lectures/`.

Dieses Werk basiert auf Vorlesungsskripten „Allgemeine Mechanik“ von Matthias Gaberdiel, Gian Michele Graf, Walter Hunziker und Renato Renner.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis **3**

Einführung **5**
0.1 Mechanik und Theoretische Physik 5
0.2 Physikalische Modelle 7
0.3 Übersicht 8
0.4 Inhalt 9
0.5 Literatur 9

I Klassische Mechanik I

1 Newtonsche Mechanik **1.1**
1.1 Mechanische Systeme 1.1
1.2 Grundlagen der Dynamik 1.4
1.3 Inertialsysteme 1.7
1.4 Das Galileische Relativitätsprinzip 1.12
1.5 Erhaltungssätze 1.15
1.6 Beschleunigte Bezugssysteme 1.19

2 Zweikörper-Probleme **2.1**
2.1 Allgemeine Zweiteilchen-Systeme 2.1
2.2 Bahntypen 2.3
2.3 Das Kepler-Problem 2.8
2.4 Gleichgewichtslagen des Zweikörper-Systems 2.14
2.5 Bewegung des Mondes 2.20

3 Schwingungsprobleme **3.1**
3.1 Lineare Bewegungsgleichungen 3.1
3.2 Eigenschwingungen 3.5
3.3 Erzwungene Schwingungen 3.10
3.4 Parametrische Resonanz 3.12

4 Starrer Körper **4.1**
4.1 Der Kreisel 4.1
4.2 Der freie Kreisel 4.3
4.3 Euler-Winkel 4.8
4.4 Der schwere symmetrische Kreisel 4.10

II Relativitätstheorie **II**

5 Spezielle Relativitätstheorie **5.1**
5.1 Die Spezielle Relativitätstheorie 5.1
5.2 Lorentz- und Poincaré-Gruppe 5.3
5.3 Geometrie der Raumzeit 5.5
5.4 Eigenschaften der Lorentz-Transformationen 5.11
5.5 Relativistische Mechanik 5.15
5.6 Relativistische Effekte 5.19

III Analytische Mechanik **III**

6 Lagrange-Formalismus **6.1**
6.1 Minimierungsprobleme 6.1
6.2 Die Euler-Lagrange-Gleichungen 6.6
6.3 Lagrange-Multiplikatoren 6.11
6.4 Prinzip der stationären Wirkung 6.14
6.5 Holonome Zwangsbedingungen 6.18
6.6 Relativistisches Teilchen 6.23
6.7 Das Prinzip von Maupertuis 6.25

7 Symmetrien **7.1**
7.1 Zyklische Koordinaten 7.1
7.2 Das Noethersche Theorem 7.3
7.3 Verallgemeinerungen 7.7
7.4 Rekonstruktion der Symmetrie 7.12

8 Hamilton-Formalismus **8.1**
8.1 Die Legendre-Transformation 8.1
8.2 Die Hamiltonschen Gleichungen 8.3
8.3 Poisson-Klammern 8.7
8.4 Geometrie des Phasenraums 8.9
8.5 Kanonische Transformationen 8.15
8.6 Zeitentwicklung 8.18
8.7 Erhaltungsgrössen 8.23

9 Hamilton-Jacobi-Gleichung **9.1**
9.1 Erzeugung kanonischer Transformationen 9.1
9.2 Zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung 9.5
9.3 Separable Probleme 9.6
9.4 Zeitabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung 9.9

IV Anhang **IV**

Index **11**

Plan der Vorlesungen **16**

0 Einführung

Herzlich willkommen zu dem ersten Kurs in theoretischer Physik, der Theorie der mechanischen Systeme! Wir beginnen mit einem kleinen Überblick, wie sich die Mechanik in die theoretische Physik einordnen lässt und was theoretische Physik überhaupt ist.

0.1 Mechanik und Theoretische Physik

Die klassische Mechanik stellt einen ersten Rahmen zur Beschreibung der physikalischen Realität zur Verfügung. Sie beschreibt die grundlegenden Begriffe und Konzepte der Physik wie

- Körper, Raum, Zeit
- Position, Geschwindigkeit, Beschleunigung,
- Masse, Kraft, Impuls, Energie, Dynamik,
- Schwingungen, Rotationen, periodische Bahnen, Streuprozesse, ...

Viele dieser Konzepte sind intuitiv ersichtlich und aus einführenden Vorlesungen der Physik, der Schule und dem Alltag bekannt.

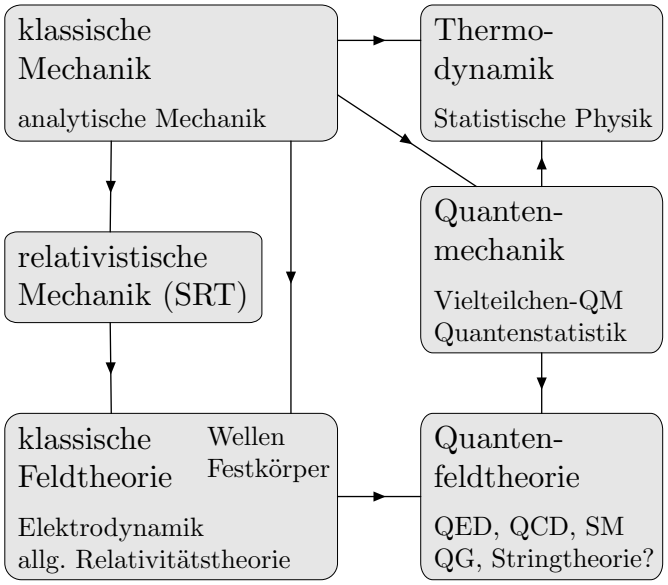
In der theoretischen Physik werden wir diese Konzepte wieder aufgreifen und zu einer theoretischen (mathematischen, analytischen und abstrakten) Beschreibung physikalischer Modelle gelangen. Dazu gehören Konzepte wie

- Freiheitsgrade, Zustände, Potentiale,
- analytische Methoden zur Beschreibung und Lösungsfindung,
- Geometrie, Transformationen, Symmetrien, Erhaltungsgrössen,
- Näherungsmethoden,
- ...

Die klassische Mechanik bildet offensichtlich auch historisch das Fundament der Physik. Beginnend mit dem Verständnis von elementaren mechanischen Prozessen, wie z.B. Flugbahnen von Objekten (...) oder der Statik von Bauwerken, konnten mit fortschreitenden Wissensstand immer weitere Aspekte der physikalischen Realität mithilfe der Mechanik erklärt werden. Dazu gehören sicherlich die Astronomie in Form der Mechanik der Himmelskörper, aber auch die Strömungslehre, Theorie der Wärme und die Akustik. Bis in das 19. Jahrhundert konnten somit viele der beobachteten und gemessenen physikalischen Phänomene sehr gut mechanisch erklärt werden,[1] und man konnte damals die Mechanik durchaus als fundamentale Beschreibung der Realität ansehen.

[1] Die Optik stellt wohl die wichtigste Ausnahme dar, selbst wenn sie konzeptionell sehr gut zu der klassischen Mechanik passt.

Allerdings traten in immer genaueren Experimenten mit der Zeit immer mehr Befunde zutage, die sich nicht mit den Annahmen und Konzepten der klassischen Mechanik in Einklang bringen lassen. Dies führte dann zur Entwicklung moderner Gebiete der Physik und den zugehörigen Beschreibungen in der theoretischen Physik. Diese ersetzen bestimmte Annahmen und Konzepte der klassischen Mechanik, und gelangen so zu einer genaueren Beschreibung der Realität. Die wichtigsten Verallgemeinerungen der Mechanik sind:



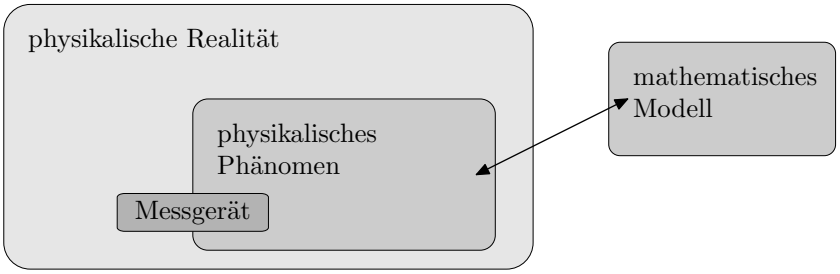
- *Spezielle Relativitätstheorie* (Teil dieser Vorlesung):
  Einheit von Raum und Zeit in der Raumzeit
- *Allgemeine Relativitätstheorie*:
  moderne Theorie der Gravitation; Weiterentwicklung der SRT mit gekrümmter Raumzeit und ihrer Geometrie
- *klassische Feldtheorie*:
  Felder anstelle diskreter Freiheitsgrade, Wellen; Formulierung der *Elektrodynamik* und bestimmter Aspekte der *Festkörperphysik*
- *Quantenmechanik*:
  Beschreibung der Physik auf mikroskopischen Skalen; neues Konzept von Zuständen, Messungen und Determinismus
- *Quantenfeldtheorie*:
  Quantenmechanische Beschreibung von Teilchen und Anregungen; Vereinigung der Quantenmechanik und Feldtheorie
- *Thermodynamik*, *Statistische Physik*:
  Physik vieler Freiheitsgrade; Temperatur, Entropie, Statistik

Selbst wenn diese Theorien z.T. die klassische Mechanik komplett ersetzen, ist ein gutes Verständnis der klassischen Mechanik und ihrer Methoden unerlässlich, um die moderne Physik zu begreifen und formulieren zu können.

0.2 Physikalische Modelle

Da diese Vorlesung den ersten Kurs in theoretischer Physik darstellt, wird es gut sein, etwas über physikalische Modelle als solche nachzudenken.

In der Physik bestehen Modelle im Wesentlichen aus drei Komponenten:



- ein mathematisches System bestehend aus einer Menge mathematischer Objekte mit abstrakt definierten Relationen,
- ein bestimmten Teil der physikalischen Realität welcher durch das Modell beschrieben werden soll,
- eine Abbildung, die das mathematische Modell auf die physikalische Realität anhand konkreter Vorschriften abbildet.

Je genauer und allgemeiner ein solches Modell die physikalische Realität mit möglichst einfachen Regeln beschreiben kann, desto besser wird es angesehen. Allerdings gibt es prinzipielle Einschränkungen an die zu erreichende Genauigkeit, und es ist wichtig diese nicht aus den Augen zu verlieren, selbst wenn dies im Rahmen der Mechanik zunächst wenig relevant ist.

Erstens stellt das Modell ein (hoffentlich) mathematisch wohldefiniertes und selbstkonsistentes System von Regeln dar. Allerdings ist das perfekte mathematische Modell meist nur eine Idealisierung der physikalischen Realität und nur also solche gedacht um das System der Regeln nicht unnötig kompliziert gestalten zu müssen. So bestehen Körper aus Atomen, deren Granularität für viele Aspekte der Mechanik keine entscheidende Rolle spielt und deshalb vernachlässigt werden kann. Demnach wird ein Körper meist als geometrisches Objekt mit fester Form betrachtet. Wirken aber extrem grosse Kräfte auf einen beliebigen Körper ein, so wird er zerbrechen, selbst wenn das Modell diesen Fall nicht vorsieht und andere ggf. unsinnige Vorhersagen macht. Ein anderes brauchbares Beispiel für eine Idealisierung sind zwei klassische Punktteilchen mit gegensätzlicher elektrischer Ladung. Sie ziehen sich gegenseitig an und beschleunigen aufeinander zu. Dabei erreichen sie beliebig grosse Geschwindigkeiten, zum Zeitpunkt des Aufeinandertreffens sind sie sogar unendlich schnell. Aus diversen Gründen können wir dies nicht als physikalisch sinnvoll betrachten. Das Problem liegt in der Idealisierung der Punktteilchen ohne geometrisches Ausmass. Letztlich kann es klassische Punktteilchen nicht geben.

Eng verwandt damit ist der zweite Punkt, dass jedes physikalische Modell ein Gültigkeitsbereich hat, in dem es akkurate Vorhersagen machen soll. Jenseits davon muss die Beschreibung nicht gut oder überhaupt nicht mit der Realität

übereinstimmen. Die Mechanik ist ein Modell für Phänomene auf (für Menschen) alltäglichen Skalen. Wendet man sie z.B. auf Atome an, so erhält man zwar (bestenfalls) mathematisch konsistente Ergebnisse, die aber oft nicht mit der Realität übereinstimmen. Um Atome korrekt zu beschreiben, benötigen wir die Quantenmechanik, welche bestimmte Konzepte der Mechanik radial abändert. Das bedeutet dennoch nicht, dass die klassische Mechanik ein schlechtes Modell der Realität ist, und komplett durch die Quantenmechanik abgelöst gehört. Die klassische Mechanik liefert weiterhin akkurate Ergebnisse in ihrem Gültigkeitsbereich. Insbesondere ist sie ein bestimmter Grenzfall der Quantenmechanik. Sie bleibt somit eine valide Theorie, unabhängig von vergangenen und künftigen Entdeckungen in der Quantenmechanik und jenseits von ihr. Hierbei muss man beachten, dass der Gültigkeitsbereich einer Theorie in der Regel nicht scharf zu definieren ist, sondern die Vorhersagen kontinuierlich schlechter werden, wenn man ihn verlässt. Es ist also wichtig abschätzen zu können, wie gross der Fehler durch eine reine klassische Betrachtung jeweils ausfällt.

Eine dritte, prinzipielle Schwierigkeit ist, dass jede Messung letztlich in demselben physikalischen System stattfindet, welches durch das Modell beschrieben wird. Ein Meterstab misst nicht nur einen Meter, er ist auch immer ein mechanisches Objekt mit bestimmter Masse, auf das Kräfte wirken, welches mit den zu messenden Objekten interagieren kann und welches konstruktionsbedingt nicht genauer als den Abstand seiner Atome messen kann. Im Rahmen der Mechanik mag diese Problematik unwichtig erscheinen: ein Meter hat eine gewisse Länge, die Vorlesung dauert 90 Minuten und der Ball ist rund. Sie wird aber sehr relevant im Rahmen der Quantenmechanik, in der der Prozess der Messung immer auch den Zustand des Gesamtsystems beeinflusst.[2]

In der theoretischen Physik beschäftigen wir uns mit der Konstruktion und der Untersuchung der mathematisch abstrakten Modelle. Dies suggeriert Exaktheit, aber wir sollten nicht vergessen, dass aufgrund der obigen Einschränkungen es im Sinne der Physik nicht immer sinnvoll ist, besonders genaue oder gar exakte Lösungen zu finden. Eine mathematische Herausforderung ist es aber dennoch oft.

0.3 Übersicht

Die Vorlesung besteht grob aus drei Teilen:

I Klassische Mechanik (ca. 6 Wochen):
Wir beginnen mit der Beschreibung der grundlegenden Prinzipien der klassischen Mechanik. Hier liegt unserer Diskussion die klassische Vorstellung von Raum und Zeit zu Grunde, die bis zur Formulierung der speziellen Relativitätstheorie (1905) das Fundament der Mechanik und der Physik

[2]Und selbst wenn man das System samt Messgerät akkurat modellieren könnte, so müsste letzteres immer noch ausgelesen werden, was einen weiteren Prozess im System selbst darstellt. Sobald es allerdings um die Wahrnehmung des Messergebnisses und Bewusstseinszustände geht, verlassen wir endgültig die Physik bzw. ihren aktuellen Forschungsstand.

überhaupt war. Wir werden bereits bekannte Modelle wie Mehrkörper-Systeme, Schwingungen und den starrer Körper auf abstraktere Art untersuchen und dabei viele Methoden der theoretischen Physik kennenlernen.

II Relativitätstheorie (ca. 2 Wochen):
Im zweiten Teil werden wir die spezielle Relativitätstheorie kennenlernen, die Raum und Zeit in der Raumzeit mit vier Dimensionen vereinigt.

III Analytische Mechanik (ca. 5.5 Wochen):
Im letzten Teil führen wir zwei abstrakte Formulierungen der Mechanik nach Lagrange und nach Hamilton ein. Diese Formulierungen helfen sehr, komplexe mechanische Systeme einheitlich zu beschreiben und nach bestimmten Regeln zu untersuchen. Insbesondere Systeme mit Zwangsbedingungen lassen sich hiermit bequem formulieren. Weiterhin werden wir sehen, wie Symmetrien mit Zwangsbedingungen zusammenhängen. Der Formalismus bildet auch die Schnittstelle zur Quantenmechanik.

0.4 Inhalt

Teil I: Klassische Mechanik

1. Newtonsche Mechanik (235 Minuten)
2. Zweikörper-Probleme (355 Minuten)
3. Schwingungsprobleme (205 Minuten)
4. Starrer Körper (225 Minuten)

Teil II: Relativitätstheorie

5. Spezielle Relativitätstheorie (295 Minuten)

Teil III: Analytische Mechanik

6. Lagrange-Formalismus (330 Minuten)
7. Symmetrien (180 Minuten)
8. Hamilton-Formalismus (350 Minuten)
9. Hamilton-Jacobi-Gleichung (145 Minuten)

Vermerkt ist die ungefähre Vorlesungsdauer der Kapitel in Minuten. Insgesamt besteht der Kurs aus 54 Vorlesungen von je 45 Minuten.

0.5 Literatur

Die Mechanik ist ein Standardthema der theoretischen Physik; es gib viele gute Lehrbücher und Skripten, je nach Geschmack. Einige Beispiele zur Orientierung:

- R. Renner: Allgemeine Mechanik, Vorlesungsskript, ETH Zürich, FS13
- W. Nolting: Grundkurs Theoretische Physik 1 – Klassische Mechanik, Springer, 8. Auflage, E-Book
- W. Nolting: Grundkurs Theoretische Physik 2 – Analytische Mechanik, Springer, 7. Auflage, E-Book
- F. Kuypers: Klassische Mechanik, Wiley-VCH

- M. Bartelmann, B. Feuerbacher, T. Krüger, D. Lüst, A. Rebhan, A. Wipf: Theoretische Physik, Springer, E-Book
- V. I. Arnol'd: Mathematische Methoden der klassischen Mechanik, Birkhäuser
- L. D. Landau, E. M. Lifschitz: Lehrbuch der theoretischen Physik 1 – Mechanik, Europa-Lehrmittel
- D. Morin, Introduction to Classical Mechanics, Cambridge University Press

Dieses Vorlesungsskript basiert auf Skripten zur Vorlesung „Allgemeine Mechanik“ von Prof. Matthias Gaberdiel, Prof. Gian Michele Graf, Prof. Walter Hunziker, Prof. Renato Renner an der ETH Zürich. Ich möchte meinen Kollegen herzlich für die Überlassung ihrer Notizen danken.

Teil I

Klassische Mechanik

1 Newtonsche Mechanik

Wir beginnen damit, die grundlegenden Prinzipien, auf die sich die Formulierung der Mechanik stützt, zu formulieren.

1.1 Mechanische Systeme

Als Erstes beschäftigen wir uns mit der allgemeinen Beschreibung eines mechanischen Systems anhand seiner Freiheitsgrade.

Freiheitsgrade. Allgemein wird ein *mechanisches System* beschrieben durch einen Satz von *Freiheitsgraden* q^α, $\alpha = 1, \dots, N$

$$(q^\alpha) \in \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N. \tag{1.1}$$

Die Menge der erlaubten Werte für die Freiheitsgrade wird *Konfigurationsraum* $\mathcal{M}$ genannt. Die Geometrie des Konfigurationsraums wird vom mechanischen System und seiner mathematischen Beschreibung bestimmt, wir können aber davon ausgehen, dass die q^α kontinuierliche Werte annehmen. Vor allem aber sind die Freiheitsgrade veränderlich, d.h. sie hängen von der *Zeit* t ab, und die *Bahn* $q^\alpha(t)$ beschreibt somit einen parametrisierte Kurve im Konfigurationsraum des Systems

$$(q^\alpha) : \mathbb{R} \to \mathcal{M}, \qquad t \mapsto q^\alpha(t). \tag{1.2}$$

Wir werden immer annehmen, dass die *Zeitachse* die Menge $\mathbb{R}$ ist. Das Ziel der Mechanik ist es, den *Zeitentwicklung* $q^\alpha(t)$ zu analysieren, z.B. anhand gegebener Anfangsbedingungen. Man wird den Pfad zwar meist nicht exakt mittels bekannter mathematischer Funktionen berechnen können,[1] aber es lassen sich dennoch oft exakte Aussagen zu gewissen Aspekten der Dynamik des Systems treffen. So werden wir in der Mechanik viele Methoden kennenlernen, um die Dynamik des Systems zu besprechen. Dies umfasst Erhaltungssätze und Näherungsmethoden für verschiedene Situationen.

Punktteilchen. Als erstes Beispiel dient ein *Punktteilchen* im Raum. Es wird durch ein Tripel von Koordinaten beschrieben, z.B.

$$(q^\alpha) = (q^1, q^2, q^3). \tag{1.3}$$

[1] Viele Beispiele in der theoretischen Physik sind so gewählt, dass man sie exakt berechnen kann. Dies dient im wesentlichen der Anschaulichkeit, soll aber nicht darüber hinwegtäuschen, dass physikalische Systeme in der Realität kaum jemals theoretisch exakt zu erfassen sind.

Im Rahmen der Mechanik hat der Raum zumeist Euklidische Geometrie und man wählt *kartesische Koordinaten*, die man in einem Dreier-Vektor zusammenfasst

$$(q^\alpha) = \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \tag{1.4}$$

gelegentlich auch als $\vec{x} = (x, y, z)$. In diesem Fall ist die Bahn eine Funktion

$$\vec{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad t \mapsto \vec{x}(t). \tag{1.5}$$

Koordinatensysteme. Nun werden Punkte im (Euklidischen) Raum nicht exklusiv mittels kartesischer Koordinaten beschrieben. Für bestimmte Probleme mag es günstiger sein, ein anderes Koordinatensystem zu wählen, z.B. *Kugelkoordinaten*

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r \sin\vartheta \cos\varphi \\ r \sin\vartheta \sin\varphi \\ r \cos\vartheta \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Die Mechanik lässt sich ebenso gut in beliebigen anderen Koordinatensystemen formulieren, die Gesetze haben dann jeweils eine etwas andere Form aber dieselbe allgemeine Struktur, siehe Abschnitt 1.2. Für Kugelkoordinaten lauten die Freiheitsgrade eines Punktteilchens demnach

$$\big(q^\alpha(t)\big) = \big(r(t), \vartheta(t), \varphi(t)\big). \tag{1.7}$$

Die Kugelkoordinaten haben einen kleineren Wertebereich $\mathcal{M}$ als den gesamten $\mathbb{R}^3$ der kartesischen Koordinaten

$$0 \le r, \qquad 0 \le \vartheta \le \pi, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi. \tag{1.8}$$

Der Konfigurationsraum entspricht aber lokal (bis auf die singuläre Nord-Süd-Achse) dem dreidimensionalen $\mathbb{R}^3$.

Eine Komplikation, die mit der Wählbarkeit des Koordinatensystems einhergeht, ist, dass dessen genaue Festlegung auch von der Zeit abhängen kann. Zum Beispiel kann das Zentrum der Kugelkoordinaten (oben wurde der Einfachheit halber der Ursprung der kartesischen Koordinaten gewählt) zeitabhängig gewählt werden. Ebenso kann der Ursprung der Winkelkoordinate φ zeitabhängig gewählt werden. Mittels solcher Übergänge erhält man bewegte und beschleunigte Bezugssysteme, mit denen wir uns etwas später im Abschnitt 1.6 beschäftigen werden. In diesem Zusammenhang bilden die nicht-beschleunigten Bezugssysteme, die sogenannten Inertialsysteme, eine ausgezeichnete Klasse, die wir in Abschnitt 1.3 einführen und beschreiben werden.

Mehrteilchen-Systeme und Einschränkungen. Eine direkte Verallgemeinerung des Punktteilchens ist das *Mehrteilchen-System*. Hier bestehen die Freiheitsgrade aus den Koordinaten $\vec{x}_k$ für jedes der n individuellen Teilchen mit $k = 1, \ldots, n$. Alle Teilchen teilen dieselbe Zeitkoordinate t zur Beschreibung ihrer Bahn. Die Bahn ist dann durch n Tripel gegeben

$$(\vec{x}_k) : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}^3)^n. \tag{1.9}$$

Man wird gewöhnlich für alle Teilchen dasselbe Koordinatensystem wählen, wie oben z.B. kartesische Koordinaten in einem Dreier-Vektor $\vec{x}_k$ je Teilchen k. Die Teilchen können aber durchaus unterschiedliche physikalische Eigenschaften haben. Wir werden uns in diesem Kapitel weiter mit allgemeinen Mehrteilchen-Systemen beschäftigen und im folgenden Kapitel 2 auf das spezielle Zweiteilchen-System und Näherungsmethoden für Dreiteilchen-Systeme eingehen.

Das Mehrteilchen-System ist im Wesentlichen das fundamentale System der Mechanik: Man kann jedes klassische mechanische Objekt als Ansammlung vieler kleiner Teilchen (je nach Genauigkeit der Betrachtung Moleküle, Atome, Elementarteilchen oder andere Einheiten) verstehen, die miteinander in Beziehung stehen. Jedes Teilchen trägt dann drei Freiheitsgrade zum System bei, und die Mechanik beschreibt die Bahnen aller Teilchen. Allerdings ist eine solche Beschreibung wenig effizient und lässt ausser Acht, dass die Teilchen meist untereinander sehr stark aneinander gebunden sind. Aufgrund der stark verschiedenen Skalen der auftretenden Kräfte, kann man die Bindungen der Teilchen untereinander als Zwangsbedingungen betrachten und somit die Anzahl der effektiven Freiheitsgrade reduzieren. Ein Körper aus fester Materie lässt sich so meist sehr effektiv allein durch seinen Schwerpunkt und seine Orientierung beschreiben. Dabei werden interne Schwingungsmoden der Atome vernachlässigt, die aber für viele mechanische Aufgabenstellungen nicht von direkter Relevanz sind. Unabhängig von der Anzahl der Atome werden nur $3 + 3$ Freiheitsgrade für einen solchen starren Körper benötigt. Wir werden ihn in Kapitel 4 behandeln.

Weiterhin werden wir Systeme mit mechanischen Einschränkungen betrachten, zum Beispiel einen Wagen auf einer Schiene oder eine Masse, die mit einem Seil an einem Punkt aufgehängt ist. Soweit die Einschränkungen nicht durch Überbeanspruchung des Systems gebrochen werden, stellen sie weitere Zwangsbedingungen dar. Können die Zwangsbedingungen gelöst werden, so erhält man einen entsprechend kleineren Konfigurationsraum: Der Wagen auf einer Schiene hat lediglich einen Längen-Freiheitsgrad, während die aufgehängte Masse durch zwei Winkelkoordinaten beschrieben wird. Sind die Zwangsbedingungen nicht praktisch lösbar, können sie auch in die Formulierung der Mechanik aufgenommen werden. Dies führt zu etwas komplizierteren Beziehungen, ist aber oft die einzige Möglichkeit, die Zwangsbedingungen zu implementieren. Wir werden Zwangsbedingungen im Rahmen des Lagrange-Formalismus in Kapitel 6 weiter diskutieren.

All dies erklärt, warum der Konfigurationsraum stark vom betrachteten System abhängt, selbst wenn alle Systeme auf mikroskopischer Ebene letztlich aus vielen Teilchen bestehen, für die jeweils die gleichen Gesetzmässigkeiten gelten sollten. Zusammenfassend wird ein mechanisches System also mit den Konfigurationsgrössen (q^α) und ihrer Zeitabhängigkeit $q^\alpha(t)$ beschrieben.

Einheiten. Offensichtlich tragen die oben erwähnten physikalischen Grössen Einheiten. Die Zeit t wird gewöhnlich in Sekunden (s) angegeben, während Ortskoordinaten x_k meist in Metern (m) ausgedrückt werden. Letztlich spielen solche Einheiten für die theoretische Formulierung der Mechanik eine

untergeordnete Rolle. Korrekterweise kann man Einheiten in allen Rechnungen mitführen. Man erhält so eine Konsistenzprüfung,[2] und man kann allenfalls an geeigneter Stelle zwischen verschiedenen Einheiten umrechnen. Alternativ kann man generell auf Einheiten verzichten, z.B. indem man alle Grössen (konsequent) in der entsprechenden SI-Einheit angibt. Weiterhin ist die Wahl konkreter Einheiten für die Methoden der Mechanik und für viele der abstrakten Beispiele nicht relevant. Wir werden korrekte Einheiten je nach Bedarf angeben und dafür das SI-System verwenden.

1.2 Grundlagen der Dynamik

Wir haben gesehen, dass man die Konfiguration eines mechanischen Systems und seine zeitliche Entwicklung mittels Funktionen $q^\alpha(t)$ der Zeit beschreiben kann. Ein Ziel der Mechanik ist es aber, diese Funktionen ausgehend von gewissen Anfangsbedingungen zu berechnen. Wir werden sehen, dass die Funktionen $q^\alpha(t)$ in jedem mechanischen System gewisse Differentialgleichungen zweiter Ordnung erfüllen müssen. Kennt man also die momentane Konfiguration des Systems und ihre erste Zeitableitung, so kann man daraus (im Prinzip) ihre gesamte Zeitentwicklung berechnen.

Masse, Impuls und Kraft. Wir wenden uns nun wieder allgemeinen Mehrteilchen-Systemen in kartesischen Koordinaten zu. Neben den Orten $\vec{x}_k(t)$ geben die Bahnen auch Auskunft zu den *Geschwindigkeiten* $\vec{v}_k(t)$ und den *Beschleunigungen* $\vec{a}_k(t)$ der Teilchen, die weitere relevante kinematische Grössen darstellen. Sie sind über die ersten beiden Zeitableitungen des Ortes definiert

$$\vec{v}_k(t) := \dot{\vec{x}}_k(t), \qquad \vec{a}_k(t) := \ddot{\vec{x}}_k(t) = \dot{\vec{v}}_k(t), \tag{1.10}$$

Für eine zeitabhängige Grösse $X = X(t)$ bezeichnet hier und im Folgenden die gepunktete Grösse $\dot{X} := \mathrm{d}X/\mathrm{d}t$ ihre Zeitableitung;[3] die zweifach gepunktete Grösse $\ddot{X} := \mathrm{d}^2X/\mathrm{d}t^2$ bezeichnet dementsprechend die zweifache Zeitableitung.

Wir führen jetzt drei weitere Grössen ein, die für die Dynamik ausschlaggebend sind. Jedes Teilchen wird durch seine (träge) *Masse* m_k charakterisiert. Sie ist skalar, positiv, konstant[4] und trägt die SI-Masseneinheit kg.

Das Produkt der Masse m_k und der Geschwindigkeit $\vec{v}_k$ eines Teilchens bezeichnet dessen *Impuls*

$$\vec{p}_k(t) := m_k\dot{\vec{x}}_k(t) = m_k\vec{v}_k(t). \tag{1.11}$$

[2]Man beachte aber, dass gewisse Paare unverwandter Grössen dieselben Einheiten besitzen, z.B. Energie und Drehmoment.

[3]Wir werden diese Notation auf die Zeitentwicklung der Freiheitsgrade und direkt verwandter Grössen beschränken.

[4]Es gibt auch mechanische Systeme mit nicht-konstanten Massen, z.B. eine Rakete, die kontinuierlich Treibstoff ausstösst (die Masse des Treibstoffs ändert sich dabei zwar insgesamt nicht, wohl aber die gewünschte Aufteilung in unverbrauchten Treibstoff innerhalb der Rakete und ausgestossenen Treibstoff). In diesen Systemen befinden sich die Massen m_k unter den Freiheitsgraden (q^α) und man muss an geeigneten Stellen Zeitableitungen der Masse $\dot{m}_k$ einfügen.

Er ist vektoriell und trägt die SI-Einheit $\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$. Wie die Geschwindigkeit $\vec{v}_k$ und Beschleunigung $\vec{a}_k$ stellt er eine abhängige Grösse des Pfades $\vec{x}_k(t)$ dar.

Auf jedes Teilchen wirkt eine *Kraft* $\vec{F}_k(t)$. Sie ist vektoriell, zeitabhängig und trägt die SI-Einheit $\mathrm{N} = \mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$. Mit dem Ursprung dieser Kräfte werden wir uns später beschäftigen, zunächst sollen sie als von Aussen gegebene Funktionen betrachtet werden. Die Kraft $\vec{F}_k$ bestimmt die Impulsänderung $\dot{\vec{p}}_k$ und damit die Beschleunigung $\vec{a}_k$ jedes Teilchens über das *Bewegungsgesetz* (zweites Newtonsches Gesetz)

$$\vec{F}_k(t) \stackrel{!}{=} \dot{\vec{p}}_k(t) = m_k \vec{a}_k(t). \tag{1.12}$$

Determiniertheit. Ein Prinzip der Mechanik von Mehrteilchen-Systemen ist, dass die Kräfte $\vec{F}_k(t)$ vollständig durch die Orte $\vec{x}_i(t)$ und die Geschwindigkeiten $\vec{v}_i(t)$ der Teilchen des Systems zu demselben Zeitpunkt bestimmt sind, d.h. es gibt Funktionen $\vec{F}_k$ der Art[5]

$$\vec{F}_k = \vec{F}_k\big(\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t); \vec{v}_1(t), \ldots, \vec{v}_n(t); t\big). \tag{1.13}$$

Wir können das obige Bewegungsgesetz (1.12) somit als Differentialgleichung schreiben

$$m_k \ddot{\vec{x}}_k(t) = \vec{F}_k\big(\vec{x}_i(t); \dot{\vec{x}}_i(t); t\big). \tag{1.14}$$

Dies sind die sogenannten Newtonschen *Bewegungsgleichungen*, wobei die Funktionen $\vec{F}_k$ das *Kraftgesetz* des Systems beschreiben. Die Bewegungsgleichungen bilden somit ein System gewöhnlicher *Differentialgleichungen* zweiter Ordnung. Es folgt aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen, dass (unter schwachen Voraussetzungen an die $\vec{F}_k$) die Bahnen $\vec{x}_k(t)$ durch die Differentialgleichung (1.14) und Anfangsbedingungen an die Orte $\vec{x}_k(t_0)$ und die Geschwindigkeiten $\dot{\vec{x}}_k(t_0)$ zu einem Zeitpunkt t_0 (zumindest für ein kleines Zeitintervall um t_0) eindeutig bestimmt sind. Dies ist das *Newtonsche Prinzip der Determiniertheit*.

Beispiele. Wir wollen zur Erläuterung einige Beispiele mechanischer Systeme erwähnen.

Offensichtlich ist das freie Teilchen ein mechanisches System mit trivialem Kraftgesetz $\vec{F} = 0$. Es gibt aber eine wichtige Subtilität zu beachten, die wir im folgenden Abschnitt 1.3 besprechen werden.

Ein wichtiges Beispiel eines Mehrteilchen-Systems ist das Sonnensystem mit der

[5] In physikalischen Systemen hängt die Funktionen $\vec{F}_k$ in der Regel maximal quadratisch von den Geschwindigkeiten $\vec{v}_i$ ab (oft überhaupt nicht). Das bedeutet, dass in der Bewegungsgleichung (1.14) auf beiden Seiten maximal zwei Zeitableitungen auftreten.

Gravitationskonstanten G und dem Kraftgesetz[6]

$$\vec{F}_k = -G \sum_{i \neq k} m_k m_i \, \frac{\vec{x}_k - \vec{x}_i}{\|\vec{x}_k - \vec{x}_i\|^3} \, . \tag{1.15}$$

Ganz ähnlich ist das System elektrisch geladener Teilchen, für das das Kraftgesetz lautet

$$\vec{F}_k = \sum_{i \neq k} \frac{q_k q_i}{4\pi\varepsilon} \, \frac{\vec{x}_k - \vec{x}_i}{\|\vec{x}_k - \vec{x}_i\|^3} \, , \tag{1.16}$$

wobei q_k die elektrische Ladung des Teilchens k ist und ε die Dielektrizitätskonstante. Beide dieser Systeme sind isolierte und zeitunabhängige Systeme, und die Kraft $\vec{F}_k$ auf Teilchen k hängt nur von den Positionen der Teilchen ab. Zudem ist $\vec{F}_k$ einfach eine Superposition von *Zweiteilchen-Kräften*

$$\vec{F}_k = \sum_{i \neq k} \vec{F}_{ki}(\vec{x}_k - \vec{x}_i), \tag{1.17}$$

wobei $\vec{F}_{ki}$ die vom Teilchen i auf das Teilchen k wirkende Kraft ist. Wir werden uns in Kapitel 2 eingehender mit diesen Systemen beschäftigen. Für isolierte physikalische Systeme gilt in der Regel das *Prinzip von Actio und Reactio* (drittes Newtonsches Gesetz)

$$\vec{F}_{ik} + \vec{F}_{ki} = 0. \tag{1.18}$$

Beispiele nicht-isolierter mechanischer Systeme sind ein Teilchen mit elektrischer Ladung q in einem externen *elektromagnetischen Feld* $\vec{E}(\vec{x}, t)$ und $\vec{B}(\vec{x}, t)$ mit *Lorentz-Kraft*

$$\vec{F}(t) = q\vec{E}\big(\vec{x}(t), t\big) + q\dot{\vec{x}}(t) \times \vec{B}\big(\vec{x}(t), t\big), \tag{1.19}$$

oder ein gedämpfter Oszillator mit externer Anregung

$$F = -kx - r\dot{x} + f(t). \tag{1.20}$$

Die Beschreibung dieser Systeme als mechanische Systeme setzt häufig Näherungen voraus (selbst im Rahmen der klassischen Mechanik). Zum Beispiel sind in (1.19) $\vec{E}(\vec{x}, t)$ und $\vec{B}(\vec{x}, t)$ vorgegebene äussere elektromagnetische Felder, und der Einfluss des geladenen Teilchens auf sie wurde ignoriert. In (1.20) ist $-r\dot{x}$ eine summarische Beschreibung der Dämpfung, ohne Berücksichtigung der Dynamik des dämpfenden Mediums.

[6] Bekanntermassen besagt das klassische Gravitationsgesetz, dass die Kraft zwischen zwei massiven Körpern proportional zu den schweren Massen beider Körper ist. Die schwere Masse in (1.15) steht a priori in keinem Zusammenhang mit der trägen Masse im allgemeinen Bewegungsgesetz (1.12). Experimentell (Eötvös-Experiment und folgende) findet man allerdings bei einem relativen Messfehler von 10^{-12}, dass beide Grössen in allen untersuchten Fällen proportional zueinander sind. Durch geeignete Wahl der Gravitationskonstanten G können wir den Proportionalitätsfaktor gleich 1 setzen und damit die schwere Masse mit der trägen Masse identifizieren.

Allgemeine mechanische Systeme. Wir haben zuvor argumentiert, dass allgemeine mechanische Systeme eine effektive Beschreibung von Mehrteilchen-Systemen darstellen. Demnach können wir davon ausgehen, dass die Bewegungsgleichungen im Allgemeinen auch gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung sind. Wir nennen also ein System mit N Freiheitsgraden $q^\alpha(t)$ ein *mechanisches System*, falls es Bewegungsgleichungen der folgenden Form genügt[7]

$$\ddot{q}^\alpha(t) = a^\alpha\big(q^\beta(t); \dot{q}^\beta(t); t\big). \tag{1.21}$$

Diese Form erlaubt offensichtlich Transformationen der Freiheitsgrade der Art $q^\alpha(t) \mapsto Q^\alpha(q^\beta(t), t)$. Eine solche Transformation erzeugt einige zusätzliche Terme, die aber wieder in derselben Form (1.21) ausgedrückt werden, denn es können keine höheren Zeitableitungen generiert werden. Allerdings müssen hierbei auch die Funktionen a^α entsprechend transformiert werden, wir wollen diese Transformation jetzt aber noch nicht konkret untersuchen. Dies gilt insbesondere auch für Transformationen zwischen verschiedenen Koordinatensystemen für Teilchensysteme. Im Folgenden werden wir solche Bezugssysteme und Übergänge zwischen ihnen genauer untersuchen.

1.3 Inertialsysteme

Die konkrete Formulierung von Mehrteilchen-Systemen hängt von der Wahl des Bezugssystems ab. Vom Standpunkt der Mechanik sind jedoch nicht alle diese Koordinatensysteme äquivalent.

Freie Teilchen und Inertialsysteme. Die besondere Klasse der *Inertialsysteme* ist durch das *Trägheitsgesetz* (erstes Newtonsches Gesetz) ausgezeichnet: In einem Inertialsystem bewegt sich ein *freies Teilchen*, d.h. ein Teilchen, das keinen physikalischen Kräften ausgesetzt ist, geradlinig und gleichförmig

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}\,t. \tag{1.22}$$

Hier drückt $\vec{v}$ die Geschwindigkeit des Teilchens aus und $\vec{x}_0$ die Position zur Zeit $t = 0$. Diese funktionale Form der Bahn eines Teilchens ist äquivalent zur differentiellen Bedingung

$$\ddot{\vec{x}} = 0. \tag{1.23}$$

Diese Differentialgleichung stimmt mit den obigen Bewegungsgleichungen (1.14) überein, wenn man die $\vec{F}_k$ als physikalische Kräfte in einem Inertialsystem

[7] Es ist durchaus möglich, dass einige oder alle der Bewegungsgleichungen nur von erster Ordnung in Zeitableitungen sind (oder einige Gleichungen ganz ohne Zeitableitungen auskommen). Diese Verallgemeinerung ändert wenig an der Definition mechanischer Systeme. Zum Beispiel kann man formal die Geschwindigkeit v als unabhängigen Freiheitsgrad einführen und mit der Differentialgleichung $\dot{q} = v$ erster Ordnung an den Freiheitsgrad q koppeln. Das Bewegungsgesetz $\ddot{q} = a(q, \dot{q})$ wird dann ebenso zu einer Differentialgleichung erster Ordnung $\dot{v} = a(q, v)$. Der Hamiltonische Formalismus in Kapitel 8 beruht auf einer solchen Transformation.

interpretiert, und sie für ein freies Teilchen entsprechend auf Null setzt. Umgekehrt kann man ein freies Teilchen dadurch definieren, dass es sich in einem Inertialsystem geradlinig und gleichförmig bewegt, also die Bahn die Form (1.22) hat.

Zur Definition von Inertialsystemen ist es wichtig, zwischen *physikalischen* und *Scheinkräften* unterscheiden zu können. Physikalische Kräfte lassen sich einem bestimmten physikalischen Phänomen zuordnen, z.B. Elektromagnetismus, Gravitation, mechanischer Steifheit oder Reibung. Als Scheinkräfte bezeichnet man hingegen Beiträge zur Beschleunigung der Koordinaten $\ddot{\vec{x}}_k$, bzw. allgemeiner der Freiheitsgrade $\ddot{q}^\alpha$, die lediglich von der Wahl des Bezugssystems herrühren. Dies können scheinbare Beschleunigungen aufgrund von krummlinigen Koordinatensystemen sein. Man kann sie vermeiden, indem man zu jedem Zeitpunkt kartesische Koordinaten verwendet.[8] Es können aber auch Beschleunigungen aufgrund einer zeitabhängigen Wahl der Koordinatensysteme sein. Per Konstruktion sind Scheinkräfte immer proportional zu der trägen Masse des entsprechenden Teilchens, so dass die Beschleunigung unabhängig von der Masse ist. Wir werden Scheinkräfte konkreter in Abschnitt 1.6 behandeln.

Wir postulieren die Existenz zumindest eines Inertialsystems. In der Praxis werden unterschiedliche Bezugssysteme als Inertialsysteme verwendet. So kann man bei Labor-Experimenten auf kleinen Zeit- und Grössenskalen in erster Näherung die Erdoberfläche als Inertialsystem annehmen. Um Effekte der Erdrotation und Gravitation zu verringern, kann man stattdessen das Bezugssystem am Erdmittelpunkt fixieren und nach der Sonne ausrichten. Andererseits bildet bei der Betrachtung von Planetenbahnen in unserem Sonnensystem dessen Schwerpunkt mit nach Fixsternen orientierten Achsen (mit hoher Präzision) ein Inertialsystem. Auf noch grösseren Zeit- und Längenskalen müsste man dann beispielsweise zum Schwerpunkt unserer Milchstrasse übergehen.

Soweit nicht anders angegeben, werden wir im Folgenden annehmen, dass sich räumliche Koordinaten auf ein Inertialsystem beziehen und dass Kräfte rein physikalischer Natur sind.

Subtilität. Die obige Unterscheidung zwischen physikalischen Kräften und Scheinkräften mag intuitiv ersichtlich erscheinen, ist aber insbesondere im Hinblick auf die Gravitation subtil. Wir wollen diese Subtilität in diesem optionalen Abschnitt kurz erläutern

Die Definition eines zeitunabhängigen Koordinatensystems benötigt ein inertiales Referenzsystem (bzw. eine ausreichend grosse Menge fixer Referenzpunkte). Ein absolutes Referenzsystem ist aber a priori nicht gegeben, bzw. wir können lediglich postulieren, dass ein bestimmtes Referenzsystem ein Inertialsystem darstellt, aber wir können es nicht mit Sicherheit sagen. Die obige Definition von Inertialsystemen ist somit selbstreferenziell.

Die Subtiliät in Bezug auf die Gravitation kann man anhand eines Gedankenexperiments veranschaulichen. Man vergleiche ein frei fallendes

[8] Alternativ könnte man die Bedingung $\ddot{\vec{x}} = 0$ in krummlinige Koordinaten übersetzen.

Bezugssystem im (nahezu) homogenen Gravitationsfeld der Erde mit einem stationärem Bezugssystem weitab von Himmelskörpern (und somit ausserhalb der Reichweite von Gravitationfeldern). Beide Bezugssysteme kann man (nahezu) als Inertialsysteme ansehen, denn in beiden bewegen sich freie Testmassen geradlinig und gleichförmig, $\ddot{\vec{x}} = 0$. Formal gilt die Klassifizierung des frei fallenden Bezugssystems als Inertialsystem allerdings nur dann, wenn man die Gravitationskraft zu den Scheinkräften zählt. Wenn man sie hingegen als physikalische Kraft interpretiert, wäre stattdessen ein erdgebundenes Bezugssystem inertial. Ohne Berücksichtigung der Gravitationskraft bewegen sich dort freie Testmassen geradlinig und gleichmässig. In der Realität fallen aber alle (ansonsten) freien Testmassen aufgrund der Gravitation (die universell auf alle Massen wirkt) beschleunigt zur Erde hin. Auch wenn man die Gravitation auf den ersten Blick offensichtlich als physikalische Kraft ansehen möchte, so stellt es sich als physikalisch noch sinnvoller dar, das frei fallende Bezugssystem als Inertialsystem zu betrachten, denn dort verhalten sich Testmassen äquivalent zum gravitationsfreien Bezugssystem.[9] [10] Insbesondere im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie werden die Gravitationskräfte somit als Scheinkräfte aufgefasst, die dort von der intrinsischen Krümmung der Raumzeit stammen.

Transformationen zwischen Inertialsystemen. Die Existenz eines Inertialsystems impliziert die Existenz einer ganzen Familie solcher Inertialsysteme. Wir wollen im Folgenden verstehen, wie diese Inertialsysteme miteinander in Beziehung stehen, d.h. welche Koordinatentransformationen sie aufeinander abbilden.

Zunächst führen wir dazu die Kombination einer Zeit t und eines Ortes $\vec{x}$ als *Ereignis* $(t, \vec{x})$ ein. Der Raum der Ereignisse ist somit $\mathbb{R}^{1+3}$.[11] Transformationen zwischen Inertialsystemen können dann aufgefasst werden als Koordinatentransformationen dieses *Ereignisraums*.

Wir haben gesehen, dass sich ein freies Teilchen in Inertialsystemen geradlinig und gleichförmig bewegt. Für die *Bahnkurven* $\mathcal{C}[\vec{x}] := \{(t, \vec{x}(t)); t \in \mathbb{R}\}$ bedeutet dies, dass sie Geraden im Ereignisraum $\mathbb{R}^{1+3}$ sind

$$\{(t, \vec{x}_0 + \vec{v}\, t); t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{1+3}. \tag{1.24}$$

Umgekehrt beschreibt jede Gerade im $\mathbb{R}^{1+3}$, die nicht auf eine Zeitscheibe beschränkt ist,[12] die Bahnkurve eines freien Teilchens. Die gesuchten

[9] Ein Prinzip der Physik ist, dass zwei Systeme oder Grössen, die sich durch Messungen nicht unterscheiden lassen, als physikalisch äquivalent anzusehen. Alle weiteren Unterschiede sind dann nur philosophischer Natur, zumindest solange bis sie durch weitere Messungen signifikant unterschieden werden können.

[10] Der einzigen messbaren Unterschiede, die die Gravitationskräfte von Scheinkräften trennen, sind die hier vernachlässigten Gezeitenkräfte, sowie das schliessliche Auftreffen des Bezugssystems auf der Erdoberfläche. Die theoretische Physik arbeitet meist mit Idealisierungen, die bei strikter Anwendung gelegentlich irreführend sind.

[11] Wir werden den Ereignisraum im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie in Kapitel 5 als Raumzeit wieder antreffen.

[12] Eine solche Gerade würde ein seltsames Objekt beschreiben, welches lediglich zu einer genau bestimmten Zeit existiert, dann aber auf allen Punkten einer Gerade im Raum gleichzeitig.

Transformationen müssen also beliebige Geraden auf Geraden abbilden. Dies sind die affinen Transformationen des $\mathbb{R}^{1+3}$, die man allgemein schreiben kann als

$$\begin{aligned} t' &= \lambda t + \vec{c}^{\,\mathsf{T}}\vec{x} + a, \\ \vec{x}' &= \vec{v}t + M\vec{x} + \vec{b}. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Diese Transformationen sind allerdings noch allgemeiner als gewünscht, und wir werden sie mittels drei weiterer Kriterien einschränken. Zunächst müssen wir sicherstellen, dass die transformierte Bahnkurve jedes vorstellbaren freien Teilchens nicht auf einer einzelnen Zeitscheibe endet. Man kann sich dann überlegen, dass dies zu der Einschränkung $\vec{c} = 0$ führt. Weiterhin möchten wir fordern, dass alle Zeitabstände $|t_1 - t_2|$ von der Transformation erhalten werden. Intuitiv hängt dies mit der Messbarkeit von Zeitintervallen zusammen, z.B. dem beobachteten Zeitverlauf auf einer Uhr; die Zeit soll in jedem Inertialsystem gleich verlaufen. Dies impliziert $\lambda = \pm 1$.[13] Analog wollen wir fordern, dass (Euklidische) Raumabstände erhalten sind, da wir Abstände bzw. Längen messen können, und davon ausgehen wollen, dass sie in anderen Inertialsystemen dieselbe Gültigkeit besitzen. Dies schränkt die Matrix M auf eine *Rotation* oder *Spiegelung* ein. Rotationen und Spiegelungen R im dreidimensionalen Raum werden durch *orthogonale Matrizen* $R^{\mathsf{T}} = R^{-1}$ beschreiben, und sie bilden eine *Gruppe*, die O(3) genannt wird. Die Untergruppe der Rotationen mit $\det R = +1$ wird mit SO(3) bezeichnet.

Die Koordinatentransformationen zwischen Inertialsystemen haben also die Form

$$\begin{aligned} t' &= \lambda t + a, \\ \vec{x}' &= R\vec{x} + \vec{v}t + \vec{b}, \end{aligned} \tag{1.26}$$

wobei $\lambda = \pm 1$ und $a \in \mathbb{R}$ sowie $R \in \mathrm{O}(3)$ und $\vec{v}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Diese Abbildungen bilden wiederum eine Gruppe, die *Galilei-Gruppe* oder Gruppe der *Galilei-Transformationen*. Die Galilei-Gruppe besteht aus Kombinationen folgender Transformationen:

- *Translationen der Zeit* (a),
- *Translationen des Raums* ($\vec{b}$),
- zeitunabhängige *Rotationen* des Raumes (R),
- *Galilei-Boost*: uniforme Verschiebung von Geschwindigkeiten ($\vec{v}$),
- *Spiegelung des Raums* ($\det R = -1$),
- *Umkehrung der Zeitrichtung* ($\lambda = -1$).

Zusammen besitzen diese Transformationen $10 = 1 + 3 + 3 + 3$ kontinuierliche Parameter. Zusätzlich gibt es $4 = 2 \cdot 2$ getrennte Klassen bezüglich räumlicher und zeitlicher Spiegelungen.

Schliesslich merken wir noch an, wie die obigen Transformationen auf die Freiheitsgrade eines Mehrteilchen-Systems wirken. Hier sind die Orte Funktionen

[13] Die zwei diskreten Lösungen beschreiben zwei getrennte Klassen von Transformationen, solche die die Zeitrichtung respektieren, und solche die die Vergangenheit und Zukunft austauschen. Auch wenn nur die ersteren praktisch relevant erscheinen, werden beide Arten von Transformationen in der Diskussion mechanischer Systeme verwendet.

der Zeit, welche beide transformiert werden. Man erhält die transformierten Bahnen durch die Forderung, dass ihre Bahnkurve im Ereignisraum mit der transformierten Bahnkurve der ursprünglichen Bahn übereinstimmt $\mathcal{C}[\vec{x}'] \stackrel{!}{=} \mathcal{C}[\vec{x}]'$, d.h.

$$\begin{aligned}\big\{\big(t', \vec{x}'(t')\big); t' \in \mathbb{R}\big\} &= \big\{\big(t, \vec{x}(t)\big)'; t \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \big\{\big(\lambda t + a, R\vec{x}(t) + \vec{v}t + \vec{b}\big); t \in \mathbb{R}\big\}. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Wir identifizieren also den transformierten Pfad $\vec{x}'(t')$ zur transformierten Zeit t' mit der Transformation $\vec{x} \mapsto \vec{x}'$ des ursprünglichen Orts $\vec{x}(t)$ zur ursprünglichen Zeit t

$$\vec{x}'_k(t') = \vec{x}'_k(\lambda t + a) = R\vec{x}_k(t) + \vec{v}t + \vec{b}. \tag{1.28}$$

Alternativ geschrieben ergibt dies die funktionale Form

$$\vec{x}'_k(t) = R\vec{x}_k(\lambda t - \lambda a) + \lambda\vec{v}t + (\vec{b} - \lambda a\vec{v}). \tag{1.29}$$

Geometrie der Zeit und des Raums. Die Galilei-Gruppe verleiht dem Ereignisraum $\mathbb{R}^{1+3}$ eine bestimmte Geometrie, auf die wir hier kurz eingehen möchten.

In der klassischen Mechanik hat die Zeit und damit die Zeitkoordinate t eine nahezu universelle Bedeutung. Der *Zeitabstand* zwischen zwei Ereignissen zu den Zeiten t_1 und t_2 lässt sich eindeutig messen, er beträgt

$$|t_1 - t_2|. \tag{1.30}$$

Per Konstruktion erhalten Galilei-Transformationen diesen Zeitabstand. Dies bedeutet insbesondere, dass Gleichzeitigkeit, $t_1 = t_2$, absolut ist, und somit das Konzept der Zeit unabhängig vom Konzept des Raumes ist.

Bezüglich des Raumes legen wir für allgemeine Mehrteilchen-Systeme den dreidimensionalen *Euklidischen Raum* $\mathbb{R}^3$ zugrunde,[14] und beschreiben dessen Punkte mittels kartesischer Koordinaten $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Der *Abstand* zweier Punkte $\vec{x}$ und $\vec{y}$ im Euklidischen Raum ist gegeben durch die Euklidische Norm des Abstandsvektors

$$\big\|\vec{x} - \vec{y}\big\| := \sqrt{\big(x_1 - y_1\big)^2 + \big(x_2 - y_2\big)^2 + \big(x_3 - y_3\big)^2}. \tag{1.31}$$

In anderen, krummlinigen Koordinatensystemen hat der Abstand eine andere, kompliziertere Form, die aber den gleichen Informationsgehalt trägt.

Nun gibt es in der Mechanik aber eine entscheidende Einschränkung an die Eindeutigkeit von Abstandsmessungen: Im Gegensatz zum Zeitabstand erhalten die Galilei-Transformationen (1.26) den räumlichen Abstand $\|\vec{x} - \vec{y}\|$ zweier Ereignisse $(t, \vec{x})$ und $(s, \vec{y})$ im Allgemeinen nicht. Der räumliche Abstand zweier

[14] Man kann auch klassische Mechanik in anderen Geometrien betreiben. Dies würde aber den Rahmen dieses Kurses sprengen, und würde zudem einige Grundlagen der Differentialgeometrie bzw. allgemeinen Relativitätstheorie erfordern.

Ereignisse hängt demnach in der Regel von der Wahl des Inertialsystems ab. Das gilt insbesondere dann, wenn beide Inertialsysteme relativ zueinander bewegt sind, $\vec{v} \neq 0$.[15] Um eine Definition des räumlichen Abstands zu erhalten, welche unabhängig vom gewählten Inertialsystem gültig ist, muss man sich auf zwei gleichzeitige Ereignisse beschränken. Der *Raumabstand* zweier Ereignisse $(t, \vec{x})$ und $(s, \vec{y})$ beträgt also

$$\left\|\vec{x} - \vec{y}\right\| \qquad \text{falls} \qquad t = s; \tag{1.32}$$

ansonsten ist er undefiniert. Dies bedeutet, dass der Raum zu jeder Zeit Euklidische Geometrie hat, aber die räumlichen Geometrien zu unterschiedlichen Zeiten nicht miteinander in Beziehen stehen.

Beschleunigte Bezugssysteme. Mittels der oben beschriebenen Geometrie der Ereignisraums können wir eine allgemeinere Transformationsgruppe herleiten. Die Koordinatentransformationen, die den Zeit- und Raumabstand invariant lassen, sind

$$\begin{aligned} t' &= \lambda t + a, \\ \vec{x}' &= R(t)\vec{x} + \vec{b}(t). \end{aligned} \tag{1.33}$$

mit $\lambda = \pm 1$ und $a \in \mathbb{R}$ sowie $R(t) \in \mathrm{O}(3)$ und $\vec{b}(t) \in \mathbb{R}^3$. Diese Transformationen erlauben es uns insbesondere, das räumliche Bezugssystem (in zeitabhängiger Weise) zu rotieren und zu verschieben.[16]

Man kann leicht nachprüfen, dass die obigen Transformationen eine Gruppe bilden. Dies ist im wesentlichen eine Folge davon, dass sie durch die Invarianzen von des Zeitabstands (1.30) und des Raumabstands (1.32) charakterisiert sind.

Wendet man die Transformation auf ein Inertialsystem an, so erhält man ein allgemeines *beschleunigtes Bezugssystem*, in dem Scheinkräfte auftreten. Wir werden solche Bezugssysteme in Abschnitt 1.6 besprechen. Die obige Gruppe stellt also die allgemeinen Transformationen zwischen beschleunigten Bezugssystemen dar.

1.4 Das Galileische Relativitätsprinzip

Wir haben gesehen, dass aus jedem Inertialsystem weitere Inertialsysteme durch Galilei-Transformationen hervorgehen. Weiterhin verhalten sich freie Teilchen in

[15] Man stelle sich ein Objekt vor, welches sich geradlinig und gleichmässig von einem Startpunkt zu einem Zielpunkt bewegt. Im ruhenden Bezugssystem der Wegstrecke ist der Abstand zwischen Start und Ziel konstant. Im Bezugssystem des Objekts ist zu einem Zeitpunkt der Startpunkt im Ursprung, und zu einem anderen Zeitpunkt der Zielpunkt. Der räumliche Abstand zwischen Start und Ziel kann hier also durchaus Null betragen. Im allgemeinen ist er abhängig von den gewünschten Zeitkoordinaten.

[16] Es mag seltsam erscheinen, dass diese Gruppe grösser als die Galilei-Gruppe ist, die wir zur Herleitung der Geometrie des Ereignisraums verwendet haben. Um die Gruppe weiter auf die Galilei-Gruppe einzuschränken, muss man räumliche Abstände nicht nur innerhalb einer Zeitscheibe messen können, sondern auch zu zeitlich infinitesimal auseinanderliegenden Zeiten. Letzteres ist nötig zur Definition der Beschleunigung, die den Inertialsystemen zugrundeliegt.

jedem von ihnen vollständig analog. Das *Galileische Relativitätsprinzip* geht einen Schritt weiter und besagt, dass alle Naturgesetze invariant sind unter Galilei-Transformationen zwischen Inertialsystemen. Die Bewegungsgleichungen eines isolierten mechanischen Systems sind also in allen Inertialsystemen identisch, und damit sind alle Inertialsysteme vollkommen gleichberechtigt.[17] Im Folgenden betrachten wir die Einschränkungen des Relativitätsprinzips auf verschiedene Mehrteilchen-Systeme.

Allgemeine Systeme. Die Bewegungsgleichungen für Teilchen (1.14) lauten

$$m_k \ddot{\vec{x}}_k(t) = \vec{F}_k\big(\vec{x}_i(t); \dot{\vec{x}}_i(t); t\big). \tag{1.34}$$

Wir nehmen an, dass die Bahnen $\vec{x}_k(t)$ diese Gleichungen zu jeder Zeit erfüllen. Die Frage ist nun, unter welchen Bedingungen an die Kräfte $\vec{F}_k$ die transformierten Bahnen $\vec{x}'_k(t)$ die Bewegungsgleichung mit demselben Kraftgesetz $\vec{F}$ erfüllen

$$m_k \ddot{\vec{x}}'_k(t) = \vec{F}_k\big(\vec{x}'_i(t); \dot{\vec{x}}'_i(t); t\big)? \tag{1.35}$$

Wir setzen also die Galilei-transformierten Bahnen (1.29) ein

$$\begin{aligned} & m_k R \ddot{\vec{x}}_k(\lambda t - \lambda a) \\ &= \vec{F}_k\big(R\vec{x}_i(\lambda t - \lambda a) + \lambda \vec{v} t + \vec{b} - \lambda a \vec{v}; \lambda R \dot{\vec{x}}_i(\lambda t - \lambda a) + \lambda \vec{v}; t\big) \end{aligned} \tag{1.36}$$

und erhalten nach Rücktransformation der Zeit[18]

$$m_k R \ddot{\vec{x}}_k(t) = \vec{F}_k\big(R\vec{x}_i(t) + \vec{v} t + \vec{b}; \lambda R \dot{\vec{x}}_i(t) + \lambda \vec{v}; \lambda t + a\big). \tag{1.37}$$

Setzen wir hier schliesslich die Bewegungsgleichungen im ursprünglichen Bezugssystem ein, erhalten wir eine Bedingung an die Kräfte

$$\begin{aligned} & R\vec{F}_k\big(\vec{x}_i(t); \dot{\vec{x}}_i(t); t\big) \\ &= \vec{F}_k\big(R\vec{x}_i(t) + \vec{v} t + \vec{b}; \lambda R \dot{\vec{x}}_i(t) + \lambda \vec{v}; \lambda t + a\big). \end{aligned} \tag{1.38}$$

Dies ist die allgemeine Einschränkung an die Kräfte durch das Relativitätsprinzip. Wir wollen die Einschränkungen nun genauer untersuchen, indem wir bestimmte Transformationen anwenden.

Als Erstes betrachten wir eine reine Zeittranslation

$$\vec{F}_k\big(\vec{x}_i(t); \dot{\vec{x}}_i(t); t\big) = \vec{F}_k\big(\vec{x}_i(t); \dot{\vec{x}}_i(t); t + a\big) =: \vec{F}_k\big(\vec{x}_i(t); \dot{\vec{x}}_i(t)\big). \tag{1.39}$$

Man erkennt unmittelbar durch Einsetzen von $a = -t$, dass die Kräfte keine explizite Zeitabhängigkeit haben dürfen. Die Kräfte variieren also lediglich aufgrund der Bewegung der Teilchen. Die Bedingung an die Kräfte reduziert sich nun zu[19]

$$R\vec{F}_k\big(\vec{x}_i; \dot{\vec{x}}_i\big) = \vec{F}_k\big(R\vec{x}_i + \vec{b}; \lambda R \dot{\vec{x}}_i + \lambda \vec{v}\big). \tag{1.40}$$

Wir können nun kurz die verbleibenden Einschränkungen allgemein auflisten:

[17] Dieses fundamentale Prinzip wird in Kapitel 5 durch das Relativitätsprinzip der speziellen Relativitätstheorie ersetzt werden; für den Moment wollen wir jedoch damit arbeiten.

[18] Diese beiden Gleichungen entsprechen im Wesentlichen der passiven und aktiven Transformation.

[19] Der zeitabhängige Term $\vec{v}t$ kann effektiv in Translationen $\vec{b}$ absorbiert werden.

- Invarianz unter Translationen verlangt, dass $\vec{F}_k$ nur von Differenzen $\vec{x}_i - \vec{x}_j$ der Teilchenpositionen abhängen kann.
- Entsprechend bedeutet Invarianz unter Bezugssystemwecheln, dass $\vec{F}_k$ nur von Differenzen $\dot{\vec{x}}_i - \dot{\vec{x}}_j$ der Geschwindigkeiten abhängen kann.
- Invarianz unter Rotationen bedeutet, dass $\vec{F}_k$ eine Linearkombination der $\vec{x}_i - \vec{x}_j$ und der $\dot{\vec{x}}_i - \dot{\vec{x}}_j$ sowie ihrer Kreuzprodukte sein muss. Weiterhin müssen die Koeffizienten der Vektoren jeweils invariant unter Rotationen sein. Invarianten können als Skalarprodukte $\vec{a}\cdot\vec{b}$ oder Spatprodukte $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ obiger Differenzen gebildet werden.

Bezüglich der diskreten Transformationen lässt sich Folgendes aussagen:

- Invarianz unter Zeitinversionen ($\lambda = -1$) impliziert, dass die Geschwindigkeiten $\dot{\vec{x}}_i$ nur paarweise auftreten können.
- Invarianz unter Spiegelungen ($\det R = -1$) impliziert, dass Kreuzprodukte nur paarweise auftreten können. Da aber ein Produkt zweier Kreuzprodukte immer mittels Skalarprodukten geschrieben werden kann, kann man Kreuzprodukte gänzlich ausschliessen.

Zwar weisen viele mechanische Systeme diese beiden diskreten Symmetrien auf, es gibt aber durchaus Phänomene (z.B. in der quantenmechanischen Teilchenphysik), die nicht invariant unter solchen Spiegelungen sind.

Zweiteilchen-Systeme. Um die obigen Bedingungen im Detail zu verstehen, wollen wir einfachere Systeme betrachten.

In einem *Zweiteilchen-System*, dessen Kräfte nicht von den Geschwindigkeiten abhängen sollen, muss gelten

$$R\vec{F}_k\big(\vec{x}_1, \vec{x}_2\big) = \vec{F}_k\big(R\vec{x}_1 + \vec{b}, R\vec{x}_2 + \vec{b}\big). \tag{1.41}$$

Wir setzen $R = 1$ und $\vec{b} = -R\vec{x}_2$ und erhalten sofort

$$\vec{F}_k\big(\vec{x}_1, \vec{x}_2\big) = \vec{F}_k\big(\vec{x}_1 - \vec{x}_2, \vec{0}\big) =: \vec{F}_k(\vec{x}_1 - \vec{x}_2). \tag{1.42}$$

Invarianz unter Rotationen $R \in \mathrm{SO}(3)$ führt dann zu der Bedingung $R\vec{F}_k(\vec{x}) = \vec{F}_k(R\vec{x})$ mit $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$. Wählt man speziell eine Rotation R mit Achse in Richtung $\vec{x}$ der Verbindungsgeraden, d.h. $R\vec{x} = \vec{x}$, so folgt mit $R\vec{F}_k(\vec{x}) = \vec{F}_k(\vec{x})$ die Richtung der Kraft[20]

$$\vec{F}_k(\vec{x}) = f_k(\vec{x})\,\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\,. \tag{1.43}$$

Aus der Invarianzbedingung folgt weiter $f_k(\vec{x}) = f_k(R\vec{x})$ für jede Drehung R, also $f_k(\vec{x}) = f_k(\|\vec{x}\|)$. Dies bedeutet, dass die Kraft entlang der Verbindungslinie der beiden Teilchen wirkt und ihre Stärke nur von deren Abstand abhängt.

[20] Der Faktor $1/\|\vec{x}\|$ hätte natürlich auch in die Definition von $f(\vec{x})$ absorbiert werden können; für das Folgende ist jedoch die obige Form bequemer.

Potentiale. Wenn wir schliesslich noch das Prinzip von Actio und Reactio (1.18) anwenden, folgt für das Zweiteilchen-System $f_1(r) = -f_2(r) =: f(r)$, und somit

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = f\big(\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|\big)\,\frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|}\,. \tag{1.44}$$

Diese Kräfte lassen sich stets durch eine einzelne *Potential-Funktion* $V(r)$ ausdrücken[21]

$$\vec{F}_k = -\frac{\partial}{\partial \vec{x}_k}\,V\big(\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|\big), \qquad V'(r) = -f(r). \tag{1.45}$$

Für ein System, welches sich als Superposition von Zweiteilchen-Kräften ausdrücken lässt, gilt somit Entsprechendes für das Potential

$$\vec{F}_k = -\frac{\partial}{\partial \vec{x}_k}\,V(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n), \qquad V = \sum_{j<k} V_{jk}\big(\|\vec{x}_j - \vec{x}_k\|\big). \tag{1.46}$$

Etwas allgemeiner betrachten wir *konservative Kräfte*, die einem Potential V folgen

$$\vec{F}_k = -\frac{\partial}{\partial \vec{x}_k}\,V(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n; t), \tag{1.47}$$

d.h. wir verlangen nicht, dass sich die Kräfte als Summe von Zweiteilchen-Kräften schreiben lassen. Das Relativitätsprinzip verlangt dann, dass das Potential zeitunabhängig und invariant unter Euklidischen Transformationen ist,

$$V(R\vec{x}_1 + \vec{b}, \ldots, R\vec{x}_n + \vec{b}; t + a) = V(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n; t), \tag{1.48}$$

wobei $R \in \mathrm{O}(3)$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ sowie $a \in \mathbb{R}$. Das Potential lässt sich dann schreiben als Funktion von Skalarprodukten der Abstandsvektoren $\vec{x}_i - \vec{x}_j$.[22]

1.5 Erhaltungssätze

Mit Invarianzen eines physikalischen Systems gehen oft *erhaltene Grössen* einher. Dies gilt insbesondere, falls die Kräfte durch ein Potential bestimmt werden. Wir führen im Folgenden einige charakteristische Grössen ein, die den globalen Zustand des Systems beschreiben, und untersuchen ihre Dynamik.

Globale Grössen. Zwei charakteristische globale Grössen sind die *Gesamtmasse* M und der *Massen-Schwerpunkt* $\vec{X}$ des Systems

$$M := \sum_{k=1}^{n} m_k, \qquad \vec{X} := \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{M}\,\vec{x}_k. \tag{1.49}$$

[21] Die Notation $\partial/\partial\vec{x}$ ist ein Vektor von partiellen Ableitungen nach den kartesischen Koordinaten $\vec{x}$. Sie entspricht der Notation $\vec{\nabla}$, allerdings mit expliziter Angabe der Koordinaten $\vec{x}$ nach denen abgeleitet wird.

[22] Falls man nicht die Invarianz unter Raumspiegelungen fordern möchte, so kann das Potential auch von Spatprodukten abhängen.

Die Gesamtmasse ist per Konstruktion konstant und positiv. Die zeitliche Ableitung des Schwerpunkts

$$M \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \vec{X} = \vec{P} \tag{1.50}$$

definiert den *Gesamtimpuls* $\vec{P}$ des Systems

$$\vec{P} := \sum_{k=1}^{n} \vec{p}_k. \tag{1.51}$$

Die zeitliche Ableitung des Gesamtimpulses wiederum erhält man unmittelbar, indem man alle Bewegungsgleichungen (1.14) aufsummiert (*Impulssatz*)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \vec{P} = \vec{F}, \tag{1.52}$$

wobei $\vec{F}$ die *resultierende Kraft* ist, die auf das System insgesamt wirkt

$$\vec{F} := \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k, \tag{1.53}$$

Wir sehen also, dass sich der Schwerpunkt wie ein Punktteilchen $\vec{X}$ mit der Gesamtmasse M bewegt, auf das die resultierende Kraft $\vec{F}$ wirkt. Die Bewegung der individuellen Teilchen oder die individuellen Kräfte, die auf sie wirken, spielen hierfür keine Rolle. Diese Einsicht ist insofern relevant, als dass sie erlaubt, eine Ansammlung von Teilchen als eine einfache Einheit anzusehen, soweit die Wechselwirkungen mit anderen Objekten nur (oder zumindest dominant) vom Schwerpunkt abhängen.

Zwei weitere globale Grössen, die die Rotation eines Systems bezüglich des Koordinatenursprungs[23] beschreiben, sind der *Gesamtdrehimpuls* $\vec{L}$ und das *resultierende Drehmoment* $\vec{M}$

$$\vec{L} := \sum_{k=1}^{n} \vec{x}_k \times \vec{p}_k, \qquad \vec{M} := \sum_{k=1}^{n} \vec{x}_k \times \vec{F}_k. \tag{1.54}$$

Die zeitliche Ableitung des Drehimpulses ergibt das resultierende Drehmoment (*Drehimpulssatz*)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \vec{L} = \vec{M}. \tag{1.55}$$

Diese Beziehung ergibt sich durch Kreuzmultiplikation der Bewegungsgleichungen (1.14) mit $\vec{x}_k$ und Summierung über k. Man beachte hierbei, dass die Zeitableitung von $\vec{x}_k$ proportional zu $\vec{p}_k$ ist, und somit $\dot{\vec{x}} \times \vec{p} = 0$.

Nimmt man hingegen das Skalarprodukt der Bewegungsgleichung (1.14) mit $\dot{\vec{x}}_k$ und summiert über k erhält man den *Energiesatz*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T = P. \tag{1.56}$$

[23] Man kann auch einen anderen Referenzpunkt $\vec{x}_0$ wählen, indem man Terme $-\vec{x}_0 \times \vec{P}$ bzw. $-\vec{x}_0 \times \vec{F}$ zu den Definitionen hinzuaddiert.

Die *kinetische Energie* T und die *resultierende Leistung* P sind gegeben durch

$$T := \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{2} m_k \dot{\vec{x}}_k^2, \qquad P := \sum_{k=1}^{n} \dot{\vec{x}}_k \cdot \vec{F}_k. \tag{1.57}$$

Grössen im Schwerpunktsystem. Wir haben gesehen, dass sich der Schwerpunkt wie ein Punktteilchen bewegt. Wir können nun die Bewegung des Schwerpunkts abtrennen und somit die letzten paar Grössen im *Bezugssystem des Schwerpunkts* betrachten. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{X} \times \vec{P} + \vec{L}_{\mathrm{S}}, \\ \vec{M} &= \vec{X} \times \vec{F} + \vec{M}_{\mathrm{S}}, \\ T &= \frac{\vec{P}^2}{2M} + T_{\mathrm{S}}, \\ P &= \frac{\vec{P} \cdot \vec{F}}{M} + P_{\mathrm{S}}. \end{aligned} \tag{1.58}$$

Die linken Terme bezeichnen dabei jeweils Beiträge der Bewegungs des Schwerpunkts. Die rechten Terme beschreiben die inneren Grössen des Systems aufgrund der Bewegung relativ zum Schwerpunkt

$$\begin{aligned} \vec{L}_{\mathrm{S}} &= \sum_{k=1}^{n} (\vec{x}_k - \vec{X}) \times \Big(\vec{p}_k - \frac{m_k}{M} \vec{P} \Big), \\ \vec{M}_{\mathrm{S}} &= \sum_{k=1}^{n} (\vec{x}_k - \vec{X}) \times \Big(\vec{F}_k - \frac{m_k}{M} \vec{F} \Big), \\ T_{\mathrm{S}} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2m_k} \Big(\vec{p}_k - \frac{m_k}{M} \vec{P} \Big)^2, \\ P_{\mathrm{S}} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{m_k} \Big(\vec{p}_k - \frac{m_k}{M} \vec{P} \Big) \cdot \Big(\vec{F}_k - \frac{m_k}{M} \vec{F} \Big). \end{aligned} \tag{1.59}$$

Erhaltungssätze. Für Systeme, deren Kräfte aus einem Potential V (1.47) stammen,

$$\vec{F}_k = - \frac{\partial}{\partial \vec{x}_k} V(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n; t), \tag{1.60}$$

das zeitunabhängig und invariant unter Euklidischen Transformationen ist (1.48), gilt weiterhin Folgendes:

- die resultierende Kraft $\vec{F} = 0$ verschwindet,
- das resultierende Drehmoment $\vec{M} = 0$ verschwindet,
- die resultierende Leistung verringert das Potential $P = -\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$.

Um Ersteres zu beweisen drücken wir die resultierende Kraft formal mittels einer Verschiebung aller Argumente des Potentials um einen Vektor $\vec{b}$ aus. Dann

verwenden wir, dass das Potential unter Translationen invariant ist[24]

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_k} V(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) \\ &= -\frac{\partial}{\partial \vec{b}} V(\vec{x}_1 + \vec{b}, \ldots, \vec{x}_n + \vec{b})\Big|_{\vec{b}=0} \\ &= -\frac{\partial}{\partial \vec{b}} V(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = 0. \end{aligned} \tag{1.61}$$

Damit folgt die Kräftefreiheit.

Bezüglich des resultierenden Drehmoments betrachten wir eine Drehung $R(\varphi\vec{e})$ vom Winkel φ um einen festen Einheitsvektor $\vec{e}$. Dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} R(\varphi\vec{e})\,\vec{x}\Big|_{\varphi=0} = \vec{e}\times\vec{x}, \tag{1.62}$$

und daher also

$$\begin{aligned}\vec{e}\cdot\vec{M} &= \sum_k \vec{e}\cdot(\vec{x}_k\times\vec{F}_k) = \sum_k (\vec{e}\times\vec{x}_k)\cdot\vec{F}_k \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} V\big(R(\varphi\vec{e})\vec{x}_1, \ldots, R(\varphi\vec{e})\vec{x}_n\big)\Big|_{\varphi=0} = 0. \end{aligned} \tag{1.63}$$

Da $\vec{e}$ beliebig ist, folgt daraus, dass alle Komponenten des resultierenden Drehmoments verschwinden.

Der Beweis der dritten Aussage folgt direkt aus der Kettenregel und der expliziten Zeitunabhängigkeit des Potentials

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \dot{\vec{x}}_k \cdot \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_k} = -\sum_{k=1}^{n} \dot{\vec{x}}_k \cdot \vec{F}_k = -P. \tag{1.64}$$

Die *totale Zeitableitung* $\mathrm{d}X/\mathrm{d}t$ eines Ausdrucks $X(q,t)$, der sowohl von den Freiheitsgraden q^β als auch von der Zeit t abhängt, ist in der Mechanik zu verstehen als die Zeitableitung $\mathrm{d}X/\mathrm{d}t := \mathrm{d}\tilde{X}/\mathrm{d}t$ des Ausdrucks $\tilde{X}(t) := X(q(t),t)$ ausgewertet auf der Bahn.

Mittels der zuvor hergeleiteten Beziehungen, können wir diese drei Aussagen in 10 klassische *Erhaltungsgrössen* (*Integrale der Bewegung*) umschreiben:

- 3 Impulsintegrale $\vec{P}$,
- 3 Schwerpunktsintegrale $M\vec{X} - \vec{P}t$,
- 3 Drehimpulsintegrale $\vec{L}$ (bzw. $\vec{L}_\mathrm{S}$),

[24] In unserer Notation bezeichnet $(\partial/\partial\vec{a})X$ die Ableitung eines Ausdrucks X nach (den Komponenten von) dem Vektor $\vec{a}$. Falls $X = X(\ldots,\vec{a},\ldots)$ eine Funktion ist, die $\vec{a}$ als ein Argument hat, so ist dies genau die partielle Ableitung $\partial X/\partial\vec{a}$. Anderenfalls ist X ein zusammengesetzter Ausdruck, der auf vielfältige Weise von $\vec{a}$ abhängen kann. In diesem Fall fasse man den Ausdruck wieder als Funktion $X := X(\ldots,\vec{a},\ldots)$ seiner Abhängigkeiten auf und wende die Kettenregel für Differentiation an.

- 1 Energieintegral $E := T + V$ (bzw. $T_S + V$).

Diese 10 Erhaltungsgrössen stehen in Beziehung zu den 10 kontinuierlichen Parametern $\vec{b}$, $\vec{v}$, R und a $(3+3+3+1)$ der Galilei-Gruppe (1.26). Diese Beziehung ist nicht weiter verwunderlich, da wir zur Herleitung entsprechende Invarianzen des Potentials V verwendet haben. Wir werden diese Beziehungen später in Kapitel 6 noch allgemeiner behandeln.

Zum Abschluss betrachten wir noch die Erhaltungsgrösse $M\vec{X} - \vec{P}t$. Die Abwesenheit der resultierenden Kraft lässt sich als *Schwerpunktsatz* für isolierte Systeme umschreiben

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{X} = 0. \tag{1.65}$$

Der Schwerpunkt eines isolierten Systems bewegt sich daher gleichmässig auf einer Geraden

$$\vec{X}(t) = \vec{X}_0 + \frac{\vec{P}}{M}\,t. \tag{1.66}$$

Hier ist $\vec{P}/M$ die konstante Geschwindigkeit des Schwerpunkts und somit beschreibt der konstante Ort $\vec{X}_0 = (M\vec{X} - \vec{P}t)/M$ den Schwerpunkt zur Zeit $t = 0$.

1.6 Beschleunigte Bezugssysteme

Die Bewegungsgleichungen haben, wie wir gesehen haben, eine einfache Form in allen Inertialsystemen. Für ein einzelnes Teilchen lauten sie

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}_x. \tag{1.67}$$

Manchmal ist es jedoch bequem in Koordinatensystemen zu arbeiten, die keine Inertialsysteme sind. In solchen *beschleunigten Bezugssystemen* treten dann *Scheinkräfte* auf

$$m\ddot{\vec{y}} = \vec{F}_x + \vec{F}_{\mathrm{Sch}}. \tag{1.68}$$

Coriolis- und Zentrifugalkraft. Bezeichne $\vec{y}$ die Koordinaten eines beschleunigten Bezugssystems, welches mit dem Koordinaten $\vec{x}$ eines Inertialsystems mittels der zeitabhängigen Euklidischen Transformation (1.33) in Beziehung steht

$$\vec{x}(t) = R(t)\,\vec{y}(t) + \vec{b}(t). \tag{1.69}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}} &= \dot{R}\,\vec{y} + R\,\dot{\vec{y}} + \dot{\vec{b}},\\ \ddot{\vec{x}} &= \ddot{R}\,\vec{y} + 2\dot{R}\,\dot{\vec{y}} + R\,\ddot{\vec{y}} + \ddot{\vec{b}}.\end{aligned} \tag{1.70}$$

Wir lösen letzteres nach $\ddot{\vec{y}}$ auf und setzen die Bewegungsgleichung im Inertialsystem ein um eine erste Fassung der Bewegungsgleichung im beschleunigten Bezugssystem zu erhalten

$$m\ddot{\vec{y}} = R^{\mathsf{T}}\vec{F}_x - 2m\,R^{\mathsf{T}}\dot{R}\,\dot{\vec{y}} - mR^{\mathsf{T}}\ddot{R}\,\vec{y} - m\,R^{\mathsf{T}}\ddot{\vec{b}}. \tag{1.71}$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist der physikalische Kraftvektor in $\vec{y}$-Komponenten

$$\vec{F}_y := R^\intercal \vec{F}_x, \tag{1.72}$$

und der letzte bezieht sich auf die Beschleunigung des Punktes $\vec{y} = 0$ in $\vec{y}$-Komponenten

$$\vec{a} := R^\intercal \ddot{\vec{b}} \tag{1.73}$$

Weiterhin sieht man leicht, dass die Matrix $\Omega := R^\intercal \dot{R}$ antisymmetrisch ist, denn aus der Orthogonalität $R^\intercal R = 1$ folgt

$$R^\intercal \dot{R} + \dot{R}^\intercal R = \Omega + \Omega^\intercal = 0. \tag{1.74}$$

Somit hat Ω die Form

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^3 & +\omega^2 \\ +\omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & +\omega^1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.75}$$

welches sich auch mittels des Vektors $\vec{\omega} = (\omega^1, \omega^2, \omega^3)$ als $\Omega\,\vec{y} = \vec{\omega}\times\vec{y}$ ausdrücken lässt. Der Vektor $\vec{\omega}$ beschreibt die $\vec{y}$-Komponenten der Winkelgeschwindigkeit des $\vec{y}$-Systems relativ zum $\vec{x}$-System.[25] Um dies zu sehen, betrachte man einen im beschleunigten System ruhenden Punkt $\vec{y}$. Im Inertialsystem hat er die Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}} = \dot{R}\,\vec{y} + \dot{\vec{b}}$. Die $\vec{y}$-Komponenten dieser Geschwindigkeit sind daher $R^\intercal \dot{\vec{x}} = \vec{\omega}\times\vec{y} + R^\intercal \dot{\vec{b}}$.

Weiter gilt

$$R^\intercal \ddot{R} = \dot{\Omega} - \dot{R}^\intercal \dot{R} = \dot{\Omega} - \dot{R}^\intercal R\, R^\intercal \dot{R} = \dot{\Omega} + \Omega^2, \tag{1.76}$$

so dass $R^\intercal \ddot{R}\,\vec{y} = \dot{\vec{\omega}}\times\vec{y} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{y})$. Insgesamt lautet die Bewegungsgleichung (1.71) nun also

$$m\ddot{\vec{y}} = \vec{F}_y - 2m\,\vec{\omega}\times\dot{\vec{y}} - m\,\dot{\vec{\omega}}\times\vec{y} - m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{y}) - m\vec{a}. \tag{1.77}$$

Die rechts neben $\vec{F}_y$ auftretenden Terme heissen Scheinkräfte, insbesondere die *Coriolis-Kraft*

$$\vec{F}_{\mathrm{C}} = -2m\,\vec{\omega}\times\dot{\vec{y}}, \tag{1.78}$$

die *Zentrifugalkraft*[26]

$$\vec{F}_{\mathrm{Z}} = -m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{y}), \tag{1.79}$$

sowie die *Führungskraft*

$$\vec{F}_{\mathrm{F}} = -m\vec{a}. \tag{1.80}$$

Im Gegensatz zur Zentrifugalkraft, welche auch ein im beschleunigten System ruhender Körper spürt, wirkt die Coriolis-Kraft nur auf bewegte Körper. Letztere ist orthogonal zur Bewegungsrichtung und führt zum Beispiel zu Wirbeln in den Luftströmungen der Atmosphäre. Die Zentrifugal- und die Corliolis-Kraft sind die einzigen Scheinkräfte bei gleichförmiger Rotation des $\vec{y}$-Systems ($\omega = \mathrm{const}$). Bei ungleichmässiger Rotation tritt zusätzlich noch der weitere Term $-m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{y}$ auf, der manchmal als *Euler-Kraft* bezeichnet wird.

[25] Ein Vektor beschreibt eine Rotation insofern, dass die Richtung des Vektors die Rotationsachse vorgibt und die Länge den Winkel oder die Winkelgeschwindigkeit beschreibt.

[26] Die *Zentripetalkraft* ist die Kraft, die benötigt wird, um die Zentrifugalkraft genau auszugleichen. Sie hält somit ein Teilchen auf einer gekrümmten Bahn.

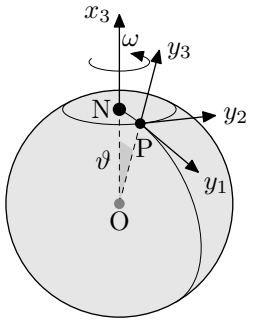
Freier Fall im homogenen Gravitationsfeld. Zur Illustration der Diskussion in Abschnitt 1.3 können wir ein frei fallendes Bezugssystem in einem homogenen Schwerefeld $\vec{g}$ betrachten. Das Bezugssystem rotiert nicht, $\vec{\omega} = 0$, und erfährt die konstante Beschleunigung $\vec{a} = \vec{g}$. Die Bewegungsgleichung eines Teilchens lautet dort

$$m\ddot{\vec{y}} = m_{\mathrm{S}}\vec{g} - m\vec{g} = 0. \tag{1.81}$$

Es sei darauf hingewiesen, dass alle Scheinkräfte proportional zur *trägen Masse* m des Teilchens sind, wohingegen die Gravitationskräfte formal proportional zur *schweren Masse* m_{S} sind. Aufgrund der experimentell nachgewiesen Gleichheit[27] von träger und schwerer Masse ist die Schwerkraft vollständig wegtransformiert, und das Teilchen bewegt sich als ob es frei ist. In einem inhomogenen Schwerefeld trifft dies nur lokal zu. Der Umstand, dass ein frei fallendes Bezugssystem lokal nicht von einem kräftefreien Inertialsystem unterschieden werden kann, ist eine wichtige Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie.

Freier Fall in der Nähe der Erdoberfläche. Als Anwendung betrachten wir den freien Fall in der Nähe der Erdoberfläche. Im mitrotierten Bezugssystem wird ein ruhendes Objekt aus einer gewissen Höhe $h > 0$ fallengelassen. Es fällt aber aufgrund der Erdrotation nicht genau vertikal, sondern wird durch Scheinkräfte der Rotation seitlich abgelenkt.[28] Wir wollen diese Ablenkung berechnen.

Sei P ein Punkt auf der Erdoberfläche, dessen geographische Breite ausgehend vom Nordpol durch ϑ beschrieben ist.



(1.82)

Die Koordinaten $\vec{x}$ beschreiben ein raumfestes Inertialsystem, dessen x_3-Achse in Richtung des Nordpols N zeigt. Das rotierende Koordinatensystem wird durch $\vec{y}$ bezeichnet. Es sei so ausgerichtet, dass die y_3-Achse nach oben in Richtung des ausgezeichneten Punkts P zeigt, die y_2-Achse nach Osten und die y_1-Achse nach Süden. Weiterhin zeigt der Vektor $\vec{b}(t)$ auf den Ursprung P des beschleunigten Koordinatensystems.

Wir machen in der Rechnung folgende Näherungen: Wir vernachlässigen die Bewegung der Erde um die Sonne, Polschwankungen, usw., und nehmen an, dass die Schwerebeschleunigung

$$g \approx 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}} \tag{1.83}$$

[27] Bzw. es genügt, dass sie proportional mit universellem Faktor m/m_{S} sind; in diesem Fall muss man $\vec{a} = (m_{\mathrm{S}}/m)\vec{g}$ setzen.

[28] Die Rechnung lässt sich ebenso gut im Inertialsystem durchführen. Dort hat das Objekt eine initiale Geschwindigkeit in Ostrichtung und wird vom Erdmittelpunkt angezogen.

annäherungsweise überall auf der Erde gleich gross ist, und nicht wesentlich von der Höhe abhängt. Weiterhin ist die Rotationsgeschwindigkeit ω der Erde

$$\omega \simeq 2\pi\,\mathrm{Tag}^{-1} \approx 7.27{\cdot}10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1} \tag{1.84}$$

hinreichend klein gegenüber der Fallzeit, $\omega T \ll 1$, und wir wollen lediglich Effekte der führenden Ordnung in ω betrachten.

Dann lauten die Bewegungsgleichungen für einen Massenpunkt in der Nähe von P

$$\ddot{\vec{y}} = \vec{g} - 2\,\vec{\omega}{\times}\dot{\vec{y}} + \mathcal{O}(\omega^2), \tag{1.85}$$

wobei die Rotationsachse und Erdbeschleunigung im $\vec{y}$-System lauten

$$\vec{\omega} = (-\omega\sin\vartheta, 0, \omega\cos\vartheta), \qquad \vec{g} = (0,0,-g). \tag{1.86}$$

Effekte der Zentrifugalkraft und der Führungskraft[29] können in führender Ordnung in ω vernachlässigt werden. Unsere Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ lauten $\vec{y} = (0,0,h)$ und $\dot{\vec{y}} = 0$.

Die Komponenten der obigen Bewegungsgleichung lauten

$$\begin{aligned}
\ddot{y}_1 &= 2\omega\cos\vartheta\,\dot{y}_2,\\
\ddot{y}_2 &= -2\omega\cos\vartheta\,\dot{y}_1 - 2\omega\sin\vartheta\,\dot{y}_3,\\
\ddot{y}_3 &= -g + 2\omega\sin\vartheta\,\dot{y}_2.
\end{aligned} \tag{1.87}$$

Integration der ersten und dritten Gleichung liefert dann

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= 2\omega\cos\vartheta\,y_2,\\
\dot{y}_3 &= -gt + 2\omega\sin\vartheta\,y_2,
\end{aligned} \tag{1.88}$$

wobei die Integrationskonstanten in Übereinstimmung mit den Anfangsbedingungen gewählt wurden. Einsetzen in die zweite Gleichung führt zu einer Differentialgleichung für y_2

$$\ddot{y}_2 + 4\omega^2 y_2 = 2g\omega\,t\sin\vartheta. \tag{1.89}$$

Die allgemeine Lösung davon ist

$$y_2 = \frac{g\sin\vartheta}{2\omega}\,t + A\sin(2\omega t) + B\cos(2\omega t). \tag{1.90}$$

Die Anfangsbedingungen für y_2 fixieren die Konstanten $B = 0$ und $A = -(2\omega)^{-2} g\sin\vartheta$, und wir finden die Lösung

$$y_2 = \frac{g\sin\vartheta}{2\omega}\left(t - \frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t)\right) = \tfrac{1}{3} g\omega\sin\vartheta\,t^3 + \mathcal{O}(\omega^3). \tag{1.91}$$

[29] Wir setzen $\vec{a} = R^{\intercal}\ddot{R}\,\vec{b}(0)$ und verwenden $R^{\intercal}\ddot{R} = \dot{\Omega} + \Omega^2$ (1.76) um zu sehen, dass $\vec{a} = \dot{\vec{\omega}}{\times}\vec{b}(0) + \vec{\omega}{\times}(\vec{\omega}{\times}\vec{b}(0)) = \mathcal{O}(\omega^2)$.

Für $t > 0$ ist $y_2 > 0$, d.h. es findet eine *Ostablenkung* statt, d.h. der Körper trifft in Rotationsrichtung der Erde etwas vor dem Lot seiner Startposition auf.[30]

Durch weitere Integration der ersten und dritten Differentialgleichung (1.88) können wir nun auch y_1 und y_3 bestimmen

$$\begin{aligned} y_1 &= \tfrac{1}{12} g\omega^2 \sin(2\vartheta)\, t^4 + \mathcal{O}(\omega^4), \\ \dot{y}_3 &= h - \tfrac{1}{2} g t^2 + \tfrac{1}{6} g\omega^2 \sin^2\vartheta\, t^4 + \mathcal{O}(\omega^4), \end{aligned} \tag{1.92}$$

der Effekt der Erdrotation ist aber nur von der Ordnung ω^2. Der Aufprall findet zur Zeit $t = \sqrt{2h/g} + \mathcal{O}(\omega^2)$ statt, und daher erhalten wir für die gesamte Ostablenkung

$$y_2 = \frac{2\sqrt{2}\, h^{3/2}\omega}{3g^{1/2}} \sin\vartheta + \mathcal{O}(\omega^2). \tag{1.93}$$

Zum Beispiel ist für $\vartheta = 42.6°$, $h = 100\,\mathrm{m}$ die Ostablenkung gerade $y_2 \approx 1.5\,\mathrm{cm}$.

[30] Dieser Effekt lässt sich anschaulich erklären damit, dass der Körper aufgrund seiner Höhe zu Beginn eine grössere Geschwindigkeitskomponente in Richtung der Erdrotation hat, als die Erdoberfläche selbst.

2 Zweikörper-Probleme

In den folgenden Kapiteln werden wir einige instruktive Klassen von Beispiel-Systemen und Phänomenen der Mechanik untersuchen. In Kapitel 6 und folgenden beschäftigen wir uns dann weiter mit der Struktur der klassischen Mechanik. Wir beginnen mit isolierten Systemen einiger Teilchen bzw. Körper, wobei der Fall von zwei Teilchen der einfachste Fall ist, da er exakt und vollständig lösbar ist.

2.1 Allgemeine Zweiteilchen-Systeme

Wie wir in Abschnitt 1.4 erklärt haben, wirkt die Kraft entlang der Verbindungslinie der beiden Teilchen und hängt in ihrer Stärke nur vom Abstand der beiden Teilchen ab. Die Bewegungsgleichungen sind daher von der Form

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{x}}_1 &= -\frac{1}{m_1}\frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} V\big(\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|\big),\\ \ddot{\vec{x}}_2 &= +\frac{1}{m_2}\frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} V\big(\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|\big),\end{aligned} \tag{2.1}$$

wobei $V(r)$ das Potential ist. Zum Beispiel gilt für zwei Teilchen, die nur durch die Gravitationskraft wechselwirken, das Potential $V(r) = -Gm_1m_2/r$. In guter Näherung gelten diese Bewegungsgleichungen auch für die Himmelskörper, und wir werden diesen Fall detailliert in Abschnitt 2.3 behandeln.

Relativkoordinaten. Um das obige Problem zu lösen, ist es hilfreich, die Schwerpunktbewegung zu separieren, welche in einem isolierten System linear und homogen ist, siehe Abschnitt 1.5. Dazu definiert man den Schwerpunkt $\vec{X}$ und die relative Position $\vec{x}$ als

$$\begin{aligned}\vec{X} &:= \frac{m_1}{M}\,\vec{x}_1 + \frac{m_2}{M}\,\vec{x}_2,\\ \vec{x} &:= \vec{x}_1 - \vec{x}_2.\end{aligned} \tag{2.2}$$

wobei $M := m_1 + m_2$ die Gesamtmasse bezeichnet. Die Schwerpunktbewegung $\vec{X}(t)$ ist dann einfach eine Trägheitsbahn. Die Gleichung für die Relativbewegung $\vec{x}(t)$

$$\mu\ddot{\vec{x}} = -\frac{\partial}{\partial \vec{x}} V\big(\|\vec{x}\|\big) \tag{2.3}$$

ist die *eines* Teilchens mit *reduzierter Masse* μ,

$$\mu := \frac{m_1m_2}{m_2 + m_1}\,, \tag{2.4}$$

unter dem Einfluss eines äusseren *Zentralpotentials* $V(r)$ mit Abstand $r := \|\vec{x}\|$.

Erhaltungsgrössen. Dieses System besitzt nun zwei Erhaltungsgrössen, den Drehimpuls und die Energie. Wir betrachten diese Grössen im Schwerpunktsystem, in dem die konstanten Beiträge der Schwerpunktbewegung herausgerechnet wurden.

Der Drehimpuls (im Schwerpunktsystem) lautet

$$\vec{L} := \mu\, \vec{x}\times\dot{\vec{x}} = \text{const}\,. \tag{2.5}$$

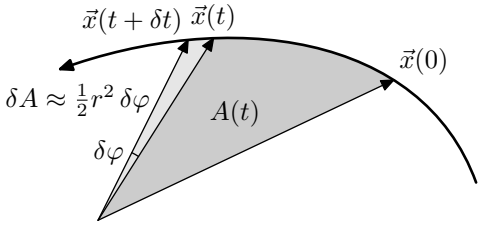
Da offensichtlich $\vec{L}\cdot\vec{x} = 0$, liegt die Bahn $\vec{x}(t)$ in der Ebene senkrecht zu $\vec{L}$, der *Bahnebene*. In dieser benützen wir *Polarkoordinaten* (r, φ) mit zugehörigen Einheitsvektoren $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\varphi$ in radialer bzw. azimutaler Richtung. Mit $\dot{\vec{e}}_r = \dot\varphi\vec{e}_\varphi$,[1] finden wir für

$$\vec{x} = r\,\vec{e}_r, \qquad \dot{\vec{x}} = \dot r\,\vec{e}_r + r\,\dot\varphi\,\vec{e}_\varphi, \tag{2.6}$$

und daher ist der Betrag des Drehimpulses

$$L := \big\|\vec{L}\big\| = \mu\, r^2\,\dot\varphi \stackrel{!}{=} \text{const}\,. \tag{2.7}$$

Dies ist der *Flächensatz* (*zweites Keplersches Gesetz*): Wenn $A(t)$ die vom Vektor $\vec{x}(t)$ (ausgehend vom Ursprung) in der Bahnebene überstrichene Fläche bezeichnet,



(2.8)

so ist

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \tfrac{1}{2} r^2\,\dot\varphi = \frac{L}{2\mu} = \text{const}\,. \tag{2.9}$$

Der Flächensatz wurde von Kepler ursprünglich für Planetenbahnen formuliert. Er gilt aber allgemein für Systeme, deren Drehimpuls erhalten ist, und nicht nur für das Gravitationsgesetz.

Die andere Erhaltungsgrösse ist die Energie (im Schwerpunktsystem)

$$\begin{aligned} E := T + V &= \tfrac{1}{2}\mu\dot{\vec{x}}^2 + V\big(\|\vec{x}\|\big) \\ &= \tfrac{1}{2}\mu\big(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2\big) + V(r) = \text{const}\,. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Integration. Wir können nun die beiden Erhaltungsgrössen (2.7) und (2.10) benutzen, um die Bewegung in der Bahnebene vollständig abzuleiten. Aufgelöst nach $\dot r$ und $\dot\varphi$ finden wir direkt[2]

$$\dot\varphi = \frac{L}{\mu\, r^2}\,, \qquad \dot r = \pm\sqrt{2\mu^{-1}(E - U(r))} \tag{2.11}$$

[1] Falls z.B. die Bahnebene die x,y-Ebene ist, so gilt $\vec{e}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ und $\vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$.

[2] Das Vorzeichen ergibt sich aus Stetigkeitsbetrachtungen.

mit einem *effektiven Potential* $U(r)$, welches die Rotationsbewegung einbezieht,

$$U(r) := \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r). \tag{2.12}$$

Die radiale Bewegung $r(t)$ ist somit diejenige eines Massenpunktes mit Masse μ auf der Halbachse $0 < r < \infty$ unter dem Einfluss des effektiven Potentials $U(r)$.[3]

Durch Integration von $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}r = \dot{\varphi}/\dot{r}$ nach r erhält man[4]

$$\varphi(r) - \varphi(r_0) = \pm \int_{r_0}^{r} \frac{L\,\mathrm{d}r'}{r'^2\sqrt{2\mu(E - U(r'))}}\,. \tag{2.13}$$

Dies beschreibt die *Trajektorie* $\{(r(t), \varphi(t)); t \in \mathbb{R}\}$ in der Ebene, d.h. die Bahn unbeachtet ihres zeitlichen Ablaufs.

Integration von $\dot{r} = \mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ führt zu

$$t(r) - t(r_0) = \pm \int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r'}{\sqrt{2\mu^{-1}(E - U(r'))}}\,. \tag{2.14}$$

Durch Integration und Auflösen findet man die Zeitentwicklung der radialen Koordinate $r(t)$ und damit auch diejenige des Winkels $\varphi(t)$. Durch die beiden Ausdrücke für $\varphi(r)$ in (2.13) und $t(r)$ in (2.14) ist die Bestimmung der Bahn auf die Berechnung von Integralen reduziert: Das System ist *integrabel*. In der Praxis sind Systeme nur selten integrabel und ihre Bewegungsgleichungen müssen im Allgemeinen numerisch oder durch Reihenentwicklung um bekannte Spezialfälle gelöst werden.[5]

2.2 Bahntypen

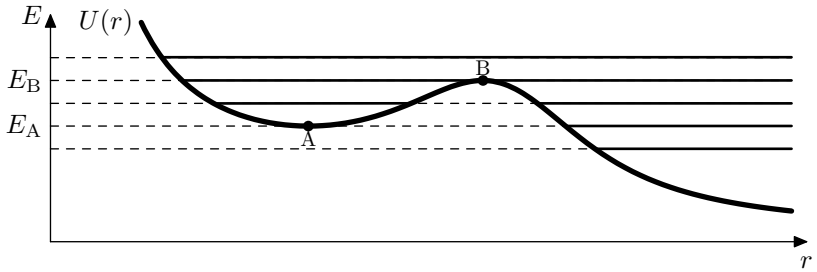
Wir haben gesehen, wie man das Zweiteilchen-System auf die Bewegung in einem eindimensionalen Potential $U(r)$ reduzieren kann. Hier wollen wir die Bewegungstypen in einer Dimension untersuchen und somit die Bahnen der beiden Teilchen klassifizieren.

[3] Die Singularität des effektiven Potentials $U(r)$ bei $r = 0$ aufgrund der Rotationsbewegung sorgt dafür, dass $r(t)$ nicht durch $r = 0$ läuft.

[4] Diese Lösung ist für einen gewissen Bereich um r_0 gültig, d.h. für einen gewissen Abschnitt der Bahn. Die gesamte Bahnkurve setzt sich zusammen aus ebensolchen Abschnitten mit unterschiedlichen $\varphi(r_0)$ und unterschiedlichen Vorzeichen.

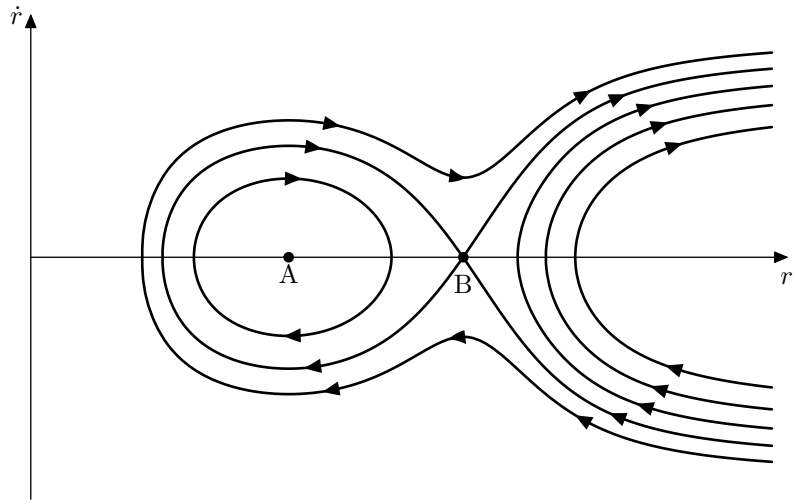
[5] Selbst in integrablen Problemen müssen die Integrale oft numerisch bestimmt werden, was aber meist einfacher und stabiler ist, als eine numerische Lösung von Differentialgleichungen.

Fallunterscheidung. Anhand eines Beispielpotentials $U(r)$ illustrieren wir mögliche Bewegungstypen in einer Dimension.



(2.15)

Im *Phasenraum* mit den Koordinaten $(r, \dot{r})$ ist die Bewegung für fünf verschiedene Energien E dargestellt (*Phasenportrait*).



(2.16)

Die Energie einer Bahn ist für alle Orte r stets mindestens so gross wie das Potential $U(r)$

$$E - U(r) = \tfrac{1}{2}\mu\dot{r}^2 \geq 0. \tag{2.17}$$

Bei Gleichheit kommt die radiale Bewegung zur Ruhe, $\dot{r} = 0$ (r-Achse im Phasenportrait); dort befinden sich also die *Umkehrpunkte* der Bahn. Damit $\dot{r} = 0$ wirklich ein Umkehrpunkt ist, muss weiterhin gelten

$$\mu\ddot{r} = -U'(r) \neq 0. \tag{2.18}$$

Falls $U'(r_0) = 0$ für ein r_0 gibt es eine Gleichgewichtslösung $r(t) = r_0$; das sind die Punkte A und B in den Abbildungen. Die Lösung bei A ist stabil, d.h. eine Bahn mit Anfangsbedingungen $(r, \dot{r})$ nahe bei A wird stets nahe bei A bleiben. Die Lösung bei B ist instabil, so dass sich benachbarte Lösungen letztlich von B entfernen. Allgemein unterscheiden wir *gebundene Bahnen*, die ganz im Endlichen verlaufen, und *Streubahnen* mit $r(t) \to \infty$ für $t \to \pm\infty$.

Gebundene Bahnen. Für gebundene Bahnen ist $r(t)$ periodisch mit der Periode[6] [7]

$$T_r(E) = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2\mu^{-1}(E - U(r))}}\,, \tag{2.19}$$

wobei $r_{\min}$ und $r_{\max}$ die Nullstellen von $E - U(r)$ sind, die das erlaubte r-Intervall begrenzen. Diese Formel folgt direkt aus der Lösung $t(r)$ in (2.14), wobei man beachten muss, dass jeder Punkt zwischen $r_{\min}$ und $r_{\max}$ in jeder der beiden Richtungen je einmal durchlaufen wird.

Da der Integrand an den Intervallgrenzen singulär ist, sollten wir das dortige Verhalten untersuchen

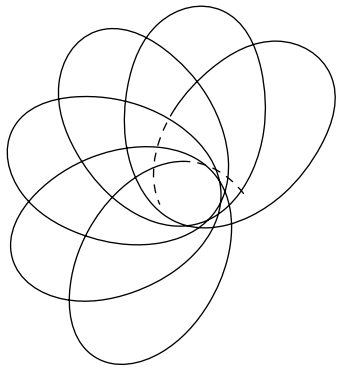
$$\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{E-U}} = \frac{\mathrm{d}U}{\sqrt{E-U}}\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}U} \sim \mathrm{d}\,\frac{\sqrt{E-U}}{U'}\,. \tag{2.20}$$

Falls $r_{\min}$ und $r_{\max}$ Umkehrpunkte sind, so ist $U' \neq 0$ an diesen Punkten. Das Integral konvergiert also, da die Beiträge für $E \to U(r)$ verschwinden. Falls $U'(r_0) = 0$ für $r_0 = r_{\min}, r_{\max}$ ist, kann T divergieren oder endlich bleiben; die Endlichkeit hängt davon ab, wie schnell U flach wird.

Für eine gebundene Bahn nimmt der Winkel φ während einer r-Periode T_r zu um den Winkel[8]

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{L\,\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2\mu(E - U(r))}}\,, \tag{2.21}$$

was direkt aus der Lösung $\varphi(r)$ in (2.13) folgt.



(2.22)

So ergibt sich im Allgemeinen eine Rosettenbahn im Ring $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$. Sie schliesst sich genau dann, wenn $\Delta\varphi/2\pi$ rational ist.

[6] Auf einem Intervall $t_0 < t < t_0 + T/2$ mit $r(t_0) = r_{\min}$ und $r(t_0 + T/2) = r_{\max}$ ist die Funktion $r(t)$ eindeutig bestimmt als die Umkehrfunktion des Zeit-Integrals (2.14). Alle weiteren Werte $r(t)$ können mittels der Periodizität $r(t + nT_r) = r(t)$ sowie der Symmetrie $r(2t_0 - t) = r(t)$ bestimmt werden.

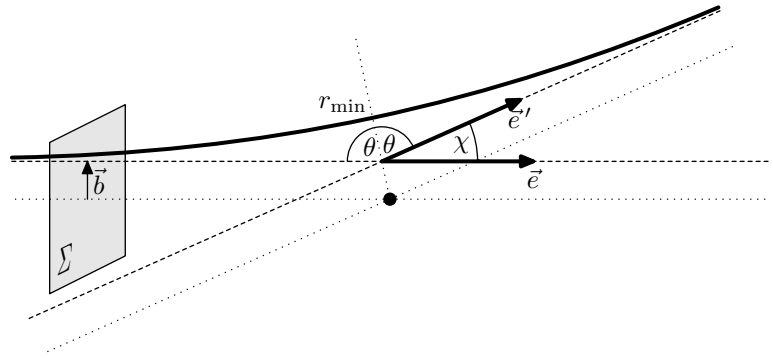
[7] Um T_r formal als Funktion von E schreiben zu können, muss die Bahn durch die Energie E eindeutig spezifiziert werden. Dies ist in unserem Beispielpotential nur unter der Einschränkung auf gebundene Bahnen der Fall.

[8] Eine alternative Periode T_φ kann man auch durch eine komplette Umrundung $\varphi(t + T_\varphi) = \varphi(t) + 2\pi$ des Zentrums definieren.

Streubahnen. Wir betrachten nun den Fall, dass $U(r) \sim V(r) \to 0$ für $r \to \infty$.[9] Dann gibt es für jede positive Energie $E > 0$ eine Streubahn mit $r(t) \to \infty$ für $t \to \pm\infty$. Das asymptotische Verhalten einer Streubahn mit $E > 0$ für $t \to \pm\infty$ wird durch je eine einlaufende und auslaufende Trägheitsbahn beschrieben

$$\vec{x}(t) \simeq \begin{cases} \vec{b} + \sqrt{2E/\mu}\,(t - t_0)\vec{e} & \text{für } t \to -\infty, \\ \vec{b}' + \sqrt{2E/\mu}\,(t - t_0')\vec{e}' & \text{für } t \to +\infty. \end{cases} \tag{2.23}$$

Hier sind $\vec{e}$ und $\vec{e}'$ Einheitsvektoren, die die Richtungen der Asymptoten im dreidimensionalen Raum beschreiben. Der Geschwindigkeitsbetrag $v = \sqrt{2E/\mu}$ folgt daraus, dass für $r \to \infty$ die Energie rein kinetischer Natur ist, $E \to T = \frac{1}{2}\mu v^2$. Weiterhin sind $\vec{b}$ und $\vec{b}'$ die *Stossparameter* der Streubahn. Die Referenzzeiten t_0 und t_0' sind dabei so zu wählen, dass der Stossparameter $\vec{b}$ senkrecht zur Richtung $\vec{e}$ der Asymptote steht, $\vec{b}\cdot\vec{e} = 0$,[10] und analog für $\vec{b}'$. Es ergibt sich folgendes Bild:



(2.24)

Eine Streubahn ist vollständig bestimmt durch die einlaufende Asymptote, welche 6 freie Parameter besitzt:

- Energie E,
- Richtung $\vec{e}$ (Einheitsvektor),
- Stossparameter $\vec{b}$ (Senkrecht zu $\vec{e}$) sowie
- Referenzzeit t_0.

Inbesondere ist damit auch die auslaufende Asymptote vollständig bestimmt. Wir wollen ihre Parameter nun bestimmen.

Zunächst können wir den Stossparameter mit dem Drehimpulsbetrag L in Beziehung setzen: Für $t \to -\infty$ gilt per Konstruktion

$$\vec{L} = \mu\,\vec{x}\times\dot{\vec{x}} \to \sqrt{2\mu E}\,\vec{b}\times\vec{e}, \tag{2.25}$$

Somit folgt mit $b := \|\vec{b}\|$ der Drehimpulsbetrag

$$L = \|\vec{L}\| = b\sqrt{2\mu E}\,. \tag{2.26}$$

[9] Jedes Potential $V(r)$ mit endlichem Grenzwert für $r \to \infty$ kann durch eine r-unabhängige Verschiebung so geeicht werden, dass $V(r) \to 0$.

[10] Man kann den Vektor $\vec{b}$ verstehen als den Punkt der Asymptote mit dem geringsten Abstand zum Ursprung.

Selbiges gilt natürlich auch für $\vec{b}'$ durch Betrachtung von $t \to +\infty$, und deshalb $b' = b$.

Schliesslich berechnen wir den *Streuwinkel* $\chi := \pi - 2\theta$, wobei $\theta := \varphi(\infty) - \varphi(r_{\min})$ mit der Lösung $\varphi(r)$ in (2.13)

$$\begin{aligned}\chi &= \pi - 2\int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{L\,\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2\mu(E-U(r))}} \\ &= \pi - 2\int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{b\,\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{1-V(r)/E-b^2/r^2}}\,. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Hierbei ist $r_{\min}$ die grösste Lösung der Gleichung $U(r_{\min}) = E$, bzw. $V(r_{\min})/(1 - b^2/r_{\min}^2) = E$. Der Streuwinkel wird also vollständig bestimmt durch den Stossparameter b und die Energie E.

Bei fester Energie E und Richtung $\vec{e}$ der einlaufenden Asymptote bestimmt der Stossparameter $\vec{b}$ den Richtungsvektor $\vec{e}'$ der auslaufenden Asymptote: Zum einen ist der Streuwinkel $\chi = \chi(b)$ durch die obige Rechnung (2.27) gegeben. Zum anderen liegt $\vec{e}'$ in der von $\vec{b}$ und $\vec{e}$ aufgespannten Ebene; dies spezifiziert die zweite Winkelkoordinate ψ von $\vec{e}' \in \mathrm{S}^2$. Somit definiert der *Streuprozess* eine Abbildung $\vec{b} \mapsto \vec{e}'$ von der Fläche Σ auf die Sphäre S^2. Dabei geht das Flächenelement $\mathrm{d}^2\sigma = b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\psi$ von Σ in das Raumwinkelelement $\mathrm{d}^2\Omega = \sin\chi\,\mathrm{d}\chi\,\mathrm{d}\psi$ über. Der *differentielle Streuquerschnitt* ist dann definiert als[11]

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}^2\Omega}(\chi) = \left|\frac{b}{\sin\chi}\,\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\chi}\right| = \frac{b}{\sin\chi}\left|\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}b}\right|^{-1}. \tag{2.28}$$

Er misst das Flächenelement (in Σ), von dem aus in ein bestimmtes Raumwinkelelement (in S^2) gestreut wird, und trägt somit die Dimension einer Fläche (je Raumwinkelelement). Der *totale Streuquerschnitt*

$$\sigma_{\mathrm{tot}} = \int_{\mathrm{S}^2\setminus\vec{e}} \mathrm{d}^2\Omega\,\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}^2\Omega} = \lim_{\epsilon\to 0+} 2\pi\int_{\epsilon}^{\pi}\mathrm{d}\chi\sin\chi\,\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}^2\Omega}(\chi) \tag{2.29}$$

beschreibt den Flächeninhalt derjenigen Stossparameter $\vec{b} \in \Sigma$, die zu einer nichttrivialen Streuung $\chi(b) \neq 0$ führen. Ist er endlich, kann man ihn mit der Reichweite $a = \sup\{r; V(r) \neq 0\}$ des Potentials in Beziehung setzen über

$$\sigma_{\mathrm{tot}} = \pi a^2. \tag{2.30}$$

Streubahnen sind insbesondere für Streuexperimente relevant, in denen man meist einen Strom von Teilchen auf einen entgegengesetzten Strom bzw. auf ein ruhendes Zielmaterial richtet. Zum Beispiel werden beim Rutherford-Experiment Teilchen durch eine Goldfolie gestreut, wobei jeder einzelne Atomkern ein Streuzentrum darstellt. Hier nimmt man eine homogene Stromdichte j (Teilchenzahl pro Flächen- und Zeiteinheit) einfallender Teilchen mit fester Energie E und Richtung

[11] Es kann vorkommen, dass verschiedene b_k zum gleichen Streuwinkel χ führen; dann ist auf der rechten Seite über alle Lösungen b_k zu summieren.

$\vec{e}$ an. Die Stossparameter b für individuelle Zweiteilchen-Stösse sind dann statistisch über die Fläche Σ verteilt, und nicht individuell bestimmbar. Die messbare Grösse ist $j(\mathrm{d}^2\sigma/\mathrm{d}^2\Omega)$, welche die Zahl der Stösse pro Zeiteinheit mit auslaufender Asymptotenrichtung im Raumwinkelelement $\mathrm{d}^2\Omega$ beschreibt. Mittels der hergeleiteten Beziehungen zwischen Potential, Streuwinkel und differentiellen Streuquerschnitt (2.28) und (2.27) lassen sich aus dem gemessenen differentiellen Wirkungsquerschnitt Rückschlüsse auf das Zweiteilchen-Potential $V(r)$ ziehen. Auch in quantenmechanischen Streuprozessen wird sich der Streuquerschnitt als die entscheidende Messgrösse herausstellen, wobei dort die statistische Betrachtungsweise selbst für einen elementaren Zweiteilchen-Stoss zutrifft.

2.3 Das Kepler-Problem

Als wichtigen Spezialfall des Zweikörper-Problems betrachten wir die Bewegung zweier Körper mit Massen m_1 und m_2 im gegenseitigen Gravitationsfeld

$$V(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}\,, \tag{2.31}$$

wobei r der Abstand der Massen ist. Dieses Potential gilt auch für den Fall, dass die Körper eine endliche Ausdehnung mit kugelsymmetrischer Massenverteilung haben.[12]

Allgemeine Trajektorie. Wir wollen zunächst die Trajektorie $\vec{x}(\mathbb{R}) = \{\vec{x}(t); t \in \mathbb{R}\}$ allgemein lösen. Mit der reduzierten Masse μ und der Gesamtmasse M

$$\mu := \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\,, \qquad M := m_1 + m_2, \tag{2.32}$$

können wir das Produkt der individuellen Massen umschreiben als Produkt der effektiven Massen $m_1m_2 = \mu M$. Die Bewegungsgleichung des Relativsystems lautet

$$\mu\ddot{\vec{x}} = -GM\mu\,\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}\,, \tag{2.33}$$

wobei die reduzierte Masse μ herausfällt und die Gesamtmasse M nur in der Kombination GM auftritt. Es ist demnach sinnvoll relevante Grössen wie Energie E, Drehimpuls L und Gravitationskonstante G in geeigneten Einheiten von μ und M anzugeben um die Anzahl der verschiedenen Variablen im Problem zu reduzieren

$$e := \frac{E}{\mu}\,, \qquad \ell := \frac{L}{\mu}\,, \qquad g := GM. \tag{2.34}$$

[12] Aufgrund einer besonderen Eigenschaft des Potentials verhält sich die Schwerkraft im Aussenraum eines kugelsymmetrischen Körpers exakt so, als ob sich seine gesamte Masse im seinem Mittelpunkt konzentriert befände (Newtonscher Satz). Unabhängig davon kann man in einem physikalischen System aufgrund des kleinen Verhältnisses der Ausdehnungen und des Abstands davon ausgehen, dass Punktmassen eine gute erste Näherung darstellen.

Das effektive Potential $U(r)$ in (2.12) lautet hier

$$U(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GM\mu}{r} = \mu\left[\frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{g}{r}\right]. \tag{2.35}$$

Somit ist die oben hergeleitete Beziehung (2.13) zwischen Winkel φ und Abstand r

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} = \pm\frac{L}{r^2\sqrt{2\mu(E-U(r))}} = \pm\frac{\ell}{r\sqrt{2er^2+2gr-\ell^2}}\,. \tag{2.36}$$

Dies integriert sich zu

$$\varphi(r) = \arccos\left(\frac{\ell^2/gr - 1}{\sqrt{1+2e\ell^2/g^2}}\right), \tag{2.37}$$

wobei wir die Integrationskonstante, die dem Ursprung der Winkelkoordinate φ entspricht, so festgelegt haben, dass der *Perihel* (minimales r) bei $\varphi = 0$ liegt. Durch Auflösen nach r ergibt sich die Trajektorie in Polarkoordinaten

$$r = \frac{\ell^2/g}{1+\varepsilon\cos\varphi}\,, \tag{2.38}$$

Aufgrund der 2π-Periodizität von $\cos\varphi$ in φ ist die Bahn geschlossen und damit exakt periodisch. Mit anderen Worten ist der Perihel ortsfest und es kommt nicht zu einer Rosettenbahn.

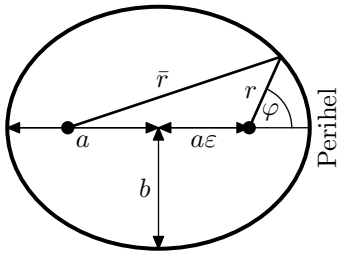
Diese Gleichung definiert einen *Kegelschnitt* mit einem der Brennpunkte bei $r = 0$. Je nach Wert der *Exzentrizität* ε

$$\varepsilon := \sqrt{1+2e\ell^2/g^2}, \tag{2.39}$$

ist der Kegelschnitt

- ein *Kreis* für $\varepsilon = 0$, d.h. $E = E_{\min} = -G^2M^2\mu^3/2L^2$,
- eine *Ellipse* für $\varepsilon < 1$, d.h. $E < 0$,
- eine *Parabel* für $\varepsilon = 1$, d.h. $E = 0$,
- eine *Hyperbel* für $\varepsilon > 1$, d.h. $E > 0$.

Ellipsenbahnen. Betrachten wir zunächst den Fall einer ellipsenförmigen Trajektorie.



(2.40)

Als erstes wollen wir uns vergewissern, dass die obige Trajektorie (2.38) eine Ellipse beschreibt, und die relevanten Parameter ableiten. Eine Ellipse lässt sich

beschreiben als die Menge der Punkte in einer Ebene, für die die Summe der Abstände zu zwei Brennpunkten konstant ist. In unserem Fall ist der Ursprung einer der Brennpunkte. Aus der Ellipsengleichung $r + \bar{r} = 2a$ ergibt sich

$$\begin{aligned}(2a - r)^2 = \bar{r}^2 &= (r\cos\varphi + 2a\varepsilon)^2 + r^2\sin^2\varphi \\ &= r^2 + 4ra\varepsilon\cos\varphi + 4a^2\varepsilon^2. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Lösen wir dies nach r auf, so erhalten wir

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\cos\varphi}\,. \tag{2.42}$$

Dies ist dann gerade die oben hergeleitete Form der Trajektorie (2.38) mit der grossen Halbachse

$$a = \frac{\ell^2}{g(1-\varepsilon^2)}\,. \tag{2.43}$$

Die kleine Halbachse b wird hingegen durch die Gleichung $2\sqrt{\varepsilon^2 a^2 + b^2} = 2a$ bestimmt, d.h.

$$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{a^{1/2}\ell}{g^{1/2}}\,. \tag{2.44}$$

Damit haben wir das *erste Kepler-Gesetz* hergeleitet: Planetenbahnen beschreiben Ellipsen mit Brennpunkt in der Sonne.[13] Johannes Kepler hat dies aus den Beobachtungen von Tycho Brahe für den Mars hergeleitet ($\varepsilon = 0.0935$) und dies auf die anderen Planeten erweitert.

Die obigen Beziehungen (2.39,2.43) erlauben es uns, die kinematischen Grössen e und ℓ durch geometrische Grössen a und ε auszudrücken

$$e = -\frac{g}{2a} \qquad \ell = \sqrt{ag}\sqrt{1-\varepsilon^2}. \tag{2.45}$$

Dies ist insbesondere für Himmelskörper sinnvoll, dessen Energie und Drehimpulse sich einer direkten Messung entziehen.

Die Erhaltung des Drehimpulses $\vec{L}$ erlaubt es uns weiter, die Umlaufzeit T ohne Integration zu bestimmen. Der Flächensatz (zweites Kepler-Gesetz) besagt, dass die von der Bahn bezüglich des Ursprungs überstrichene Fläche $A(t)$ mit konstanter Rate $L/2\mu = \frac{1}{2}\ell$ zunimmt (2.9). Für die während einer Periode T überstrichene Fläche $A(T)$ gilt also $A(T) = \frac{1}{2}\ell T$. Die Fläche $A(T) = \pi ab$ der Ellipse wird durch die beiden Halbachsen a und b bestimmt. Somit ergibt sich für die Umlaufzeit

$$T = \frac{2A(T)}{\ell} = \frac{2\pi a^{3/2}}{g^{1/2}}\,. \tag{2.46}$$

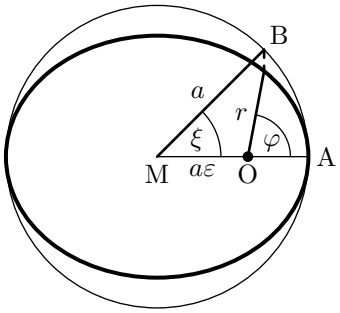
Falls $m_1 \ll m_2$ ist $M \approx m_2$ und somit ist g für alle Planeten ungefähr gleich. Hieraus folgt das *dritte Kepler-Gesetz*: Das Verhältnis $T^2 : a^3$ ist für alle Planeten gleich.

[13] Exakt gilt, dass der Schwerpunkt des Zweiteilchen-Systems der Brennpunkt ist; aufgrund der dominanten Masse der Sonne liegt dieser aber in der Nähe des Sonnenzentrums.

Evolution der Ellipsenbahn. Zur Beschreibung des zeitlichen Verlaufs der Bahn beginnen wir mit der Erhaltung des Drehimpulses (2.7), welche $\dot{\varphi} = \ell/r^2$ impliziert. Setzen wir nun den Ausdruck (2.42) für $r(\varphi)$ ein, so ergibt dies die Differentialgleichung

$$\dot{\varphi} = \frac{g^{1/2}(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}{a^{3/2}(1-\varepsilon^2)^{3/2}}\,. \tag{2.47}$$

Diese Differentialgleichung kann im Prinzip mittels Separation der Variablen gelöst werden, die Lösung hat aber keine einfache Form. Hier ist es hilfreich, die Bahn zunächst durch die exzentrische Anomalie ξ anstelle des Azimuts φ zu parametrisieren.[14]



(2.48)

Durch Betrachtung der Projektion von MB auf MA findet man die Beziehung

$$a\cos\xi = a\varepsilon + r\cos\varphi. \tag{2.49}$$

Nutzen wir weiterhin die Beziehung (2.42) zwischen r und φ, so erhalten wir zwei neue paarweise Beziehungen, die sich schreiben lassen als

$$r = a(1-\varepsilon\cos\xi), \tag{2.50}$$

und

$$(1-\varepsilon\cos\xi)(1+\varepsilon\cos\varphi) = 1-\varepsilon^2. \tag{2.51}$$

Differenzierung der zweiten Beziehung ergibt

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\sin\xi}\,\frac{1-\varepsilon\cos\xi}{1+\varepsilon\cos\varphi} = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1+\varepsilon\cos\varphi}\,. \tag{2.52}$$

Hier haben wir die trigonometrische Relation $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$ verwendet, um die obige Beziehung (2.51) für $\sin\varphi$ auszudrücken

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon\cos\xi}\sin\xi. \tag{2.53}$$

Die Differentialgleichung für $\xi(t)$ lautet nun

$$\dot{\xi} = \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\varphi}\,\dot{\varphi} = \frac{g^{1/2}(1+\varepsilon\cos\varphi)}{a^{3/2}(1-\varepsilon^2)} = \frac{g^{1/2}a^{-3/2}}{1-\varepsilon\cos\xi}\,. \tag{2.54}$$

[14]Eine Art zu sehen, warum die exzentrische Anomalie eine gute Parametrisierung ist, besteht darin die obige Differentialgleichung zu lösen. Insofern ist das Folgende keine vollständige Herleitung der Lösung.

Man kann sie leicht mittels Separation der Variablen lösen

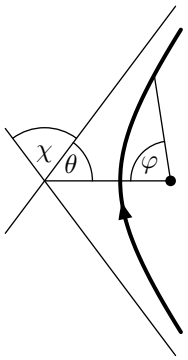
$$t(\xi) = \frac{a^{3/2}}{g^{1/2}} \int_0^\xi \mathrm{d}\xi' \, (1 - \varepsilon \cos \xi') = \frac{a^{3/2}}{g^{1/2}} \, (\xi - \varepsilon \sin \xi). \tag{2.55}$$

Wir haben die Integrationskonstante so gewählt, dass zu der Zeit $t = 0$ ein Periheldurchgang $\xi = 0$ stattfindet. Diese Gleichung drückt t als Funktion von ξ aus. Sie ist zwar nicht mittels elementarer Funktionen invertierbar, aber man kann direkt sehen, dass die Periode $T = t(2\pi)$ mit der obigen Berechnung (2.46) übereinstimmt. Zusammen mit der geometrischen Relation (2.50) zwischen r und ξ haben wir hier die *Kepler-Gleichungen* hergeleitet. Mit der Beziehung (2.51) zwischen φ und ξ geschrieben als

$$\xi = 2 \arctan \left[\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \, \tan(\tfrac{1}{2}\varphi) \right] \tag{2.56}$$

können wir schliesslich auch die Lösung $t(\varphi)$ der ersten Differentialgleichung formulieren.

Hyperbelbahnen. Betrachten wir nun Hyperbelbahnen.



(2.57)

Hier handelt es sich um einen Streuprozess, und wir wollen die Streuparameter mit den Bahnparametern in Beziehung setzen. Der Streuwinkel beträgt $\chi = \pi - 2\theta$. Der Winkel φ wird asymptotisch zu $\pi - \theta$ für $r \to \infty$, welches nach der Gleichung (2.38) für Kegelschnitte bei $\cos \varphi = -1/\varepsilon$ erreicht wird. Nach Einsetzen der Exzentrizität (2.39) gilt

$$\cos \theta = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2e\ell^2/g^2}} \, . \tag{2.58}$$

Der Drehimpuls ℓ lässt sich mittels (2.26) durch den Stossparameter b ausdrücken, $\ell = \sqrt{2e}\, b$. Aufgelöst nach dem Stossparameter b finden wir

$$b = \frac{g}{2e} \tan \theta = \frac{g}{2e} \cot(\tfrac{1}{2}\chi). \tag{2.59}$$

Wir wollen nun aus dieser Formel den Streuquerschnitt berechnen. Es ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\chi} = - \frac{g}{4e \sin^2(\frac{1}{2}\chi)} \, . \tag{2.60}$$

Für den differentiellen Streuquerschnitt erhält man

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}^2\Omega} = \left|\frac{b}{\sin\chi}\,\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\chi}\right| = \frac{g}{2e}\,\frac{\cot(\frac{1}{2}\chi)}{\sin\chi}\,\frac{g}{4e\sin^2(\frac{1}{2}\chi)}$$
$$= \frac{g^2}{16e^2}\,\frac{1}{\sin^4(\frac{1}{2}\chi)} = \left(\frac{GM\mu}{4E\sin^2(\frac{1}{2}\chi)}\right)^2. \tag{2.61}$$

Dieselbe Formel gilt offensichtlich auch für elektrisch geladene Teilchen durch Ersetzen von $GM\mu$ mit dem Produkt der Ladungen $q_1q_2/4\pi\varepsilon$ (*Streuformel von Rutherford*).[15]

Laplace-Runge-Lenz-Vektor. Das Kepler-Problem weist gegenüber dem allgemeinen Zweikörper-Problem eine zusätzliche Erhaltungsgrösse auf, den *Laplace-Runge-Lenz-Vektor*

$$\vec{A} := \mu\,\dot{\vec{x}}\times\vec{L} - GM\mu^2\,\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\,. \tag{2.62}$$

Um zu sehen, dass $\vec{A}$ erhalten ist, rechnet man nach, dass

$$\mu\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \mu\left(\frac{\dot{\vec{x}}}{\|\vec{x}\|} - \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}\,\vec{x}\cdot\dot{\vec{x}}\right) = \frac{\mu}{\|\vec{x}\|^3}\left(\dot{\vec{x}}\,\vec{x}^2 - \vec{x}(\vec{x}\cdot\dot{\vec{x}})\right)$$
$$= -\frac{\mu}{\|\vec{x}\|^3}\,\vec{x}\times(\vec{x}\times\dot{\vec{x}}) = -\frac{1}{\|\vec{x}\|^3}\,\vec{x}\times\vec{L}, \tag{2.63}$$

wobei der vorletzte Schritt aus einer Relation des doppelten Kreuzprodukts folgt. Somit folgt unter Verwendung der Erhaltung von $\vec{L}$ und der Bewegungsgleichung (2.33)

$$\dot{\vec{A}} = \mu\ddot{\vec{x}}\times\vec{L} + \frac{GM\mu}{\|\vec{x}\|^3}\,\vec{x}\times\vec{L} = 0. \tag{2.64}$$

Die Erhaltung des Laplace-Runge-Lenz-Vektors ist der Grund für die exakte Periodizität des Umlaufs. Mit seiner Hilfe können wir die Trajektorie sehr einfach ohne weitere Integration herleiten: Der Laplace-Runge-Lenz-Vektor ist orthogonal zu $\vec{L}$, da beide Terme separat orthogonal zu $\vec{L}$ stehen, er liegt also in der Bahnebene. Seine Länge ist proportional zur Exzentrizität ε (2.39) der Trajektorie

$$A = \sqrt{G^2M^2\mu^4 + \mu^2\dot{\vec{x}}^2L^2 - \frac{2GM\mu^3}{\|\vec{x}\|}\,\vec{x}\cdot(\dot{\vec{x}}\times\vec{L})}$$
$$= \sqrt{G^2M^2\mu^4 + 2\mu EL^2} = GM\mu^2\varepsilon. \tag{2.65}$$

[15] Überraschenderweise gilt dasselbe Resultat auch in der Quantenmechanik. Dies ist ein Zufall, welcher nur im Fall des Coulomb- und Gravitationspotentials auftritt. Darum war es nicht möglich, mithilfe des Rutherford-Experiments einen Unterschied zwischen klassischer Physik und Quantenmechanik festzustellen.

Hier haben wir im letzten Term der ersten Wurzel die Faktoren im Spatprodukt zyklisch vertauscht um L^2 zu erhalten. Zusammen mit dem vorangehenden Term ergibt sich dann die Gesamtenergie E (2.10).

Weiterhin berechnen wir das Skalarprodukt $\vec{x}\cdot\vec{A}$ direkt aus der Formel für $\vec{A}$

$$\vec{x}\cdot\vec{A} = \mu(\vec{x}\times\dot{\vec{x}})\cdot\vec{L} - GM\mu^2\|\vec{x}\| = L^2 - GM\mu^2 r. \tag{2.66}$$

Wählen wir nun die Winkelkoordinate φ in der Bahnebene so, dass ihr Ursprung in Richtung von $\vec{A}$ liegt, d.h. $\vec{x}\cdot\vec{A} = rA\cos\varphi$, dann ergibt sich

$$r = \frac{L^2}{GM\mu^2 + A\cos\varphi} = \frac{\ell^2/g}{1+\varepsilon\cos\varphi} \tag{2.67}$$

in Übereinstimmung mit dem obigen Resultat (2.38). Insbesondere zeigt $\vec{A}$ vom Ursprung in Richtung des Perihels.

Weiterhin können wir eine Aussage über die Trajektorie $\{\dot{\vec{x}}(t); t\in\mathbb{R}\}$ des Geschwindigkeitsvektors ableiten: Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned}\vec{L}\times\vec{A} &= \mu\vec{L}\times(\dot{\vec{x}}\times\vec{L}) - GM\mu^2\,\vec{L}\times\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\\ &= \mu\big(L^2\,\dot{\vec{x}} - (\vec{L}\cdot\dot{\vec{x}})\,\vec{L}\big) - GM\mu^2\,\vec{L}\times\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\\ &= L^2\mu\dot{\vec{x}} - GM\mu^2\,\vec{L}\times\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\,,\end{aligned} \tag{2.68}$$

und durch Umformung erhalten wir einen Ausdruck für $\dot{\vec{x}}$

$$\dot{\vec{x}} = \frac{1}{\mu L^2}\,\vec{L}\times\vec{A} + \frac{GM\mu}{L^2}\,\vec{L}\times\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\,. \tag{2.69}$$

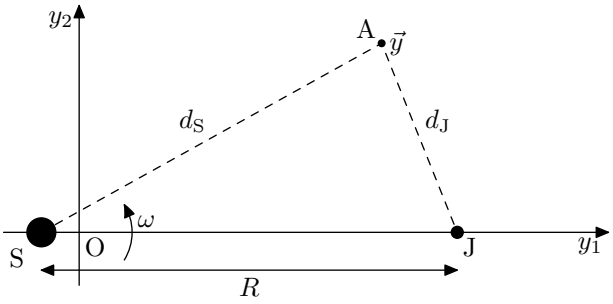
Da aber $\vec{L}$ und $\vec{A}$ konstant sind und $\vec{x}$ orthogonal zu $\vec{L}$, beschreibt $\dot{\vec{x}}(t)$ einen Kreis um den Punkt $(1/\mu L^2)\vec{L}\times\vec{A}$ vom Radius $GM\mu/L$.

2.4 Gleichgewichtslagen des Zweikörper-Systems

Im Gegensatz zu dem Zweikörperproblem, das wir bislang behandelt haben, ist das Dreikörperproblem nicht mehr integrabel. Man kann jedoch spezielle Lösungen (zum Teil näherungsweise) finden.

Wir betrachten in diesem Abschnitt das System bestehend aus Sonne S, Jupiter J und einem kleinen Asteroiden A. Die Bahn des Asteroiden im Gravitationsfeld kann beliebig kompliziert sein, weil das Problem nicht integrabel ist. Es gibt aber bestimmte Bahnen, auf denen der Asteroid die Sonne synchron zum Jupiter umkreist. Auf diesen Bahnen können Asteroiden langfristig verweilen, und sie werden sich deshalb dort akkumulieren.

Ansatz. Sonne S und Jupiter J bewegen sich auf Kreisbahnen in der 1,2-Ebene mit Winkelgeschwindigkeit ω um ihren Schwerpunkt O. In ihrem Gravitationsfeld bewegt sich ein Asteroid A, der aufgrund seiner kleinen Masse praktisch keinen Einfluss auf das System S-J hat. Es ist daher angebracht, das Problem im einem Bezugssystem mit Koordinaten $\vec{y}$ zu betrachten, welches um den Schwerpunkt O rotiert. In diesem sind die Orte von S und J fest, und wir legen sie auf die y_1-Achse.



(2.70)

Im Schwerpunktsystem haben S und J folgende Abstände vom Ursprung

$$r_S = \frac{Rm_J}{m_S + m_J}, \qquad r_J = \frac{Rm_S}{m_S + m_J}, \tag{2.71}$$

und S, J haben die Koordinaten $\vec{y}_S := (-r_S, 0, 0)$ bzw. $\vec{y}_J := (r_J, 0, 0)$.

In unserem Bezugssystem sind die Bewegungsgleichungen für rotierende Bezugssysteme aus Abschnitt 1.6 zu verwenden. Insbesondere müssen sich die Gravitations- und Zentrifugalkraft auf S und J aufheben

$$\frac{G}{R^2}\, m_S\, m_J = \frac{m_S m_J}{m_S + m_J}\, R\, \omega^2. \tag{2.72}$$

Daraus ergibt sich die bereits bekannte Beziehung

$$G(m_S + m_J) = R^3 \omega^2. \tag{2.73}$$

Da alle Kräfte auf A proportional zu seiner Masse m_A sind, fällt diese aus den Bewegungsgleichungen für A heraus. Dann sind die Beschleunigungen, die auf A wirken: die Gravitationskraft (mit $d_i := \|\vec{y} - \vec{y}_i\|$)

$$\begin{aligned} \vec{a}_G &= -\sum_{i=S,J} \frac{Gm_i}{\|\vec{y} - \vec{y}_i\|^3} (\vec{y} - \vec{y}_i) \\ &= -\frac{Gm_S}{d_S^3} (y_1 + r_S, y_2, y_3) - \frac{Gm_J}{d_J^3} (y_1 - r_J, y_2, y_3), \end{aligned} \tag{2.74}$$

die Zentrifugalkraft

$$\vec{a}_Z = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{y}) = \omega^2 (y_1, y_2, 0), \tag{2.75}$$

und die Coriolis-Kraft

$$\vec{a}_C = -2\vec{\omega} \times \dot{\vec{y}} = 2\omega(\dot{y}_2, -\dot{y}_1, 0). \tag{2.76}$$

Lagrange-Punkte. Wir suchen Gleichgewichtslösungen $\vec{y} = \text{const}$, d.h. Lösungen $\vec{y}$ von $\vec{a}_\text{G} + \vec{a}_\text{Z} = 0$. Offensichtlich muss A in der Bahnebene $y_3 = 0$ liegen, da der Punkt sonst durch die Gravitation in ihre Richtung gezogen würde. Für die anderen beiden Koordinaten ergeben sich mit der Zweikörper-Relation (2.73) für ω^2 die Gleichungen

$$\begin{aligned}\left(\frac{m_\text{S}}{d_\text{S}^3} + \frac{m_\text{J}}{d_\text{J}^3} - \frac{m_\text{S}+m_\text{J}}{R^3}\right) y_1 + \left(\frac{m_\text{S} r_\text{S}}{d_\text{S}^3} - \frac{m_\text{J} r_\text{J}}{d_\text{J}^3}\right) &= 0, \\ \left(\frac{m_\text{S}}{d_\text{S}^3} + \frac{m_\text{J}}{d_\text{J}^3} - \frac{m_\text{S}+m_\text{J}}{R^3}\right) y_2 &= 0. \end{aligned} \tag{2.77}$$

Die zweite Gleichung erlaubt zwei Möglichkeiten:

Im Eulerschen Spezialfall $y_2 = 0$ liegt A auf der y_1-Achse. Die Positionen der Gleichgewichtslagen werden durch die erste Gleichung bestimmt. Man kann sich durch Betrachtung der Richtungen und Abhängigkeiten der Beschleunigungen $\vec{a}_\text{G}$ und $\vec{a}_\text{Z}$ leicht überlegen, dass es je eine Lösung L_1 rechts von J, eine Lösung L_2 zwischen S und J sowie eine Lösung L_3 links von S geben muss. Sie sind alle durch algebraische Gleichungen fünften Grades bestimmt, die wir nicht allgemein lösen können. Für den Fall $m_\text{J} \ll m_\text{S}$ können wir die Lösungen aber als Potenzreihe bestimmen. Man findet[16]

$$\begin{aligned}\vec{y}_1 &= R\vec{e}_1\big[1 + (m_\text{J}/3m_\text{S})^{1/3} + \mathcal{O}\big((m_\text{J}/m_\text{S})^{2/3}\big)\big], \\ \vec{y}_2 &= R\vec{e}_1\big[1 - (m_\text{J}/3m_\text{S})^{1/3} + \mathcal{O}\big((m_\text{J}/m_\text{S})^{2/3}\big)\big], \\ \vec{y}_3 &= -R\vec{e}_1\big[1 + \tfrac{5}{12}(m_\text{J}/m_\text{S}) + \mathcal{O}\big((m_\text{J}/m_\text{S})^2\big)\big]. \end{aligned} \tag{2.78}$$

Wir wollen sie nicht weiter verfolgen.

Im Lagrangeschen Spezialfall

$$\frac{m_\text{S}}{d_\text{S}^3} + \frac{m_\text{J}}{d_\text{J}^3} = \frac{m_\text{S}+m_\text{J}}{R^3} \tag{2.79}$$

können wir mittels der Schwerpunktbedingung $m_\text{S} r_\text{S} = m_\text{J} r_\text{J}$ aus der ersten Gleichgewichtsgleichung (2.77) die Bedingung $d_\text{S} = d_\text{J}$ ableiten. Es ist dann leicht zu sehen, dass die Lösungen festgelegt sind durch

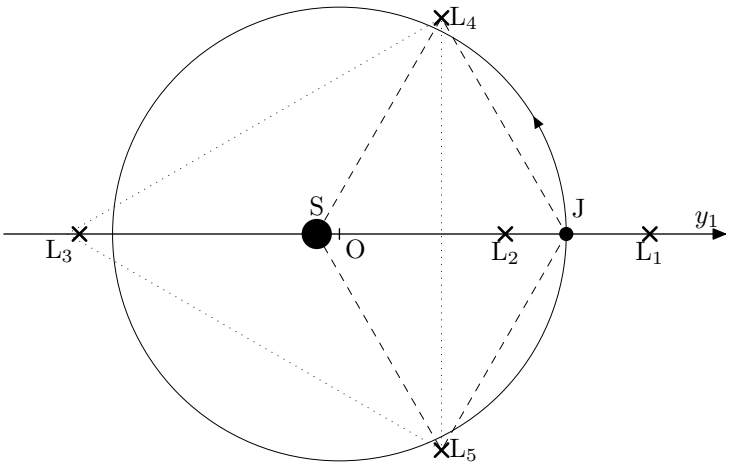
$$d_\text{S} = d_\text{J} = R. \tag{2.80}$$

Mit anderen Worten, SJA ist ein gleichseitiges Dreieck. Es gibt also zwei weitere Gleichgewichtslagen L_4 (mit $y_2 > 0$) und L_5 (mit $y_2 < 0$)

$$\begin{aligned}\vec{y}_4 &= (r_\text{S} + \tfrac{1}{2}R, +\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,R, 0), \\ \vec{y}_5 &= (r_\text{S} + \tfrac{1}{2}R, -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,R, 0). \end{aligned} \tag{2.81}$$

[16] Die führende Ordnung R der Lösungen für L_1 und L_2 liegt in der Nähe des Punkts J, was zu singulärem Verhalten führt. Um die Entwicklung fortzusetzen, wählt man einen Korrekturterm $\sim (m_\text{J}/m_\text{S})^\beta$ und findet zusätzlich anomale Beiträge der Art $\sim (m_\text{J}/m_\text{S})^{1-2\beta}$. Damit diese sich mit den regulären Beiträgen aufheben können, muss man $\beta = {}^1\!/_3$ wählen und in Potenzen davon fortfahren. Dies erklärt die Struktur der Entwicklung.

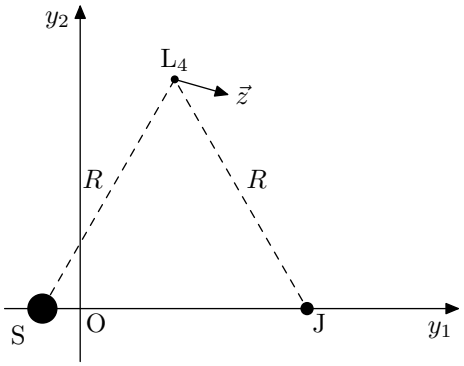
Die Gleichgewichtslagen werden *Lagrange-Punkte* genannt. Ihre allgemeine Konfiguration ist in der folgenden Abbildung dargestellt



(2.82)

Stabilität. Wir wollen die *Stabilität* der Gleichgewichtslagen diskutieren. Man findet, dass die Eulerschen Gleichgewichtslagen L_1, L_2 und L_3 auf der Achse SJ allesamt instabil sind.[17] Wir wollen hier nur die Lagrangesche Gleichgewichtslage L_4 untersuchen; die Behandlung und Resultate für L_5 sind analog.

Dazu betrachten wir kleine Auslenkungen $\vec{z}$ aus der Ruhelage, die wir bei $\vec{z} = 0$ fixieren, d.h. $\vec{y} = \vec{y}_4 + \vec{z}$.



(2.83)

Dann entwickeln wir die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\vec{y}} = \vec{a}_{\mathrm{G}} + \vec{a}_{\mathrm{Z}} + \vec{a}_{\mathrm{C}} \tag{2.84}$$

und betrachten nur die lineare Ordnung in $\vec{z}$. Hierbei trägt die Gravitationskraft als einzige nichtlinear bei, und wir entwickeln sie anhand von $(i = \mathrm{S}, \mathrm{J})$

$$\frac{\vec{y} - \vec{y}_i}{\|\vec{y} - \vec{y}_i\|^3} = \frac{\vec{y}_4 - \vec{y}_i}{d_i^3} + \frac{\vec{z}}{d_i^3} - 3\,\frac{\vec{y}_4 - \vec{y}_i}{d_i^5}\,(\vec{y}_4 - \vec{y}_i)\cdot\vec{z} + \mathcal{O}(\vec{z}^2). \tag{2.85}$$

Nach Aufsummieren aller Beschleunigungen heben sich die konstanten Beiträge aus den Bewegungsgleichungen per Konstruktion auf, da wir um eine

[17] Es ist leicht zu sehen, dass die statischen Kräfte entlang der y_1-Achse den Asteroiden aus seiner Gleichgewichtslage drücken.

Gleichgewichtslage entwickeln. Es bleibt ein System linearer Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\ddot{z}_1 &= \tfrac{3}{4}\omega^2 z_1 + \tfrac{3}{4}\sqrt{3}\,\alpha\omega^2 z_2 + 2\omega\dot{z}_2,\\ \ddot{z}_2 &= \tfrac{3}{4}\sqrt{3}\,\alpha\omega^2 z_1 + \tfrac{9}{4}\omega^2 z_2 - 2\omega\dot{z}_1,\\ \ddot{z}_3 &= -\omega^2 z_3.\end{aligned} \tag{2.86}$$

Hier sei α definiert als das Massenverhältnis

$$\alpha := \frac{m_\mathrm{S} - m_\mathrm{J}}{m_\mathrm{S} + m_\mathrm{J}}\,. \tag{2.87}$$

Die z_3-Bewegung ist entkoppelt und einfach zu lösen. Zur Lösung der beiden anderen Gleichungen machen wir den Exponentialansatz

$$z_k(t) = a_k\,\mathrm{e}^{\mathring{i}\lambda\omega t}\,. \tag{2.88}$$

Auch wenn diese Basis aus komplexen Lösungen besteht, so können die Koeffizienten a_k so gewählt werden, dass die Lösung insgesamt reell ist.[18] Einsetzen liefert das homogene Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 + \frac{3}{4} & \frac{3}{4}\sqrt{3}\,\alpha + 2\mathring{i}\lambda \\ \frac{3}{4}\sqrt{3}\,\alpha - 2\mathring{i}\lambda & \lambda^2 + \frac{9}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0. \tag{2.89}$$

Die nicht-triviale Lösung verlangt, dass die Determinante der Matrix verschwindet. Diese Bedingung lässt sich schreiben als

$$\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{27 m_\mathrm{S} m_\mathrm{J}}{(m_\mathrm{S} + m_\mathrm{J})^2}\right). \tag{2.90}$$

Für $27 m_\mathrm{S} m_\mathrm{J} < (m_\mathrm{S} + m_\mathrm{J})^2$, d.h. für[19]

$$\frac{m_\mathrm{J}}{m_\mathrm{S} + m_\mathrm{J}} < \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18} = 0.0385\ldots, \tag{2.91}$$

gibt es vier verschiedene reelle Lösungen $\pm\lambda_1$, $\pm\lambda_2$ und die allgemeine Lösung von der Bewegungsgleichung (2.86) ist eine beliebige Superposition der vier Eigenschwingungen (2.88). Da die λ_i reell sind, verhalten sich alle diese Lösungen oszillatorisch und sind beschränkt. Die Gleichgewichtslage L_4 ist somit stabil[20] falls die Ungleichung (2.91) erfüllt ist.

Gilt die entgegengesetzte Ungleichung, so sind alle Eigenfrequenzen komplex. Letztere treten in komplex konjugierten Paaren auf, d.h. die Hälfte hat negative Imaginärteile, $\mathrm{Im}\,\lambda < 0$, welche exponentiell wachsenden Lösungen entsprechen. Die Gleichgewichtslage L_4 ist dann instabil.

Im Fall von Sonne und Jupiter mit $m_\mathrm{J} \approx 10^{-3} m_\mathrm{S}$ ist die Ungleichung (2.91) erfüllt. Tatsächlich gibt es in der Gegend der Lagrangeschen Gleichgewichtslagen zahlreiche Asteroide.

[18] Alternativ könnte man eine Basis bestehend aus Real- und Imaginärteilen der obigen Basis wählen. Allerdings sind die so erzeugten trigonometrischen Funktionen arbeitsaufwändiger als obige Exponentialfunktionen.

[19] Es ist interessant zu sehen, dass ein einfach geartetes mechanisches System eine Stabilitätsbedingung hervorbringt, die nur für ein sehr kleines Massenverhältnis erfüllt ist.

[20] Aufgrund der Linearisierung des Problems gilt die Stabilität nur für Lösungen mit einer genügend geringen Amplitude. D.h. Bahnen in einer bestimmten Umgebung von L_4 bleiben für alle Zeiten auf diese beschränkt.

Schwingungsmoden. Schliesslich wollen wir noch kurz die 6 Schwingungsmoden um L_4 besprechen. Wir wählen ein hinreichend kleines Massenverhältnis $m_J \ll m_S$ um die Berechnungen in Potenzreihen konkret durchführen zu können.

Die harmonische Schwingung von z_3 aus der Bahnebene heraus ist am einfachsten zu verstehen. Sie hat die Frequenz ω,[21] d.h. sie ist synchron zu der Kreisbewegung von S und J, und sie besitzt mit der Amplitude ξ_3 und Phase χ_3 zwei Freiheitsgrade

$$z_3 = \xi_3 \sin(\omega t + \chi_3). \tag{2.92}$$

Die verbleibenden vier Moden haben die zwei Frequenzen

$$\begin{aligned} \lambda_1\omega &= \left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3m_J}{m_S}} + \mathcal{O}(m_J/m_S)\right)\omega, \\ \lambda_2\omega &= \left(1 - \frac{27}{8}\,\frac{m_J}{m_S} + \mathcal{O}\big((m_J/m_S)^2\big)\right)\omega, \end{aligned} \tag{2.93}$$

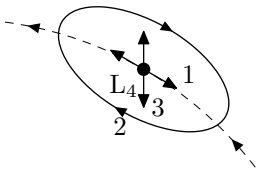
d.h. eine Frequenz ist sehr klein gegenüber ω, während die andere nur etwas kleiner als diejenige der Umlauffrequenz von S und J ist. Für die Bahnen dieser Eigenschwingungen ergibt sich in führender Ordnung in m_J/m_S

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \xi_1 \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\,\sin(\lambda_1\omega t + \chi_1) \\ \sin(\lambda_1\omega t + \chi_1) \end{pmatrix} \tag{2.94}$$

sowie

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \xi_2 \begin{pmatrix} -3\sqrt{3}\,\sin(\lambda_2\omega t + \chi_2) - 8\cos(\lambda_2\omega t + \chi_2) \\ 7\sin(\lambda_2\omega t + \chi_2) \end{pmatrix}. \tag{2.95}$$

Die Trajektorie der ersten Schwingung ist eine Linie, welche tangential zum Orbit verläuft. Die Trajektorie der zweiten Schwingung ist eine Ellipse mit Achsenverhältnis $2:1$, wobei die grosse Achse auch tangential zum Orbit verläuft. Letztere wird entgegen des Drehsinns des Systems von S und J durchlaufen.



(2.96)

Es ist noch interessant, diese Moden im nichtrotierenden Inertialsystem zu interpretieren: Insbesondere haben vier Moden eine Frequenz nahe bei ω, und es kommt somit zu Interferenzeffekten, welche die Trajektorie (nahezu) Ortsfest lassen. Die synchrone Schwingung aus der Bahnebene heraus entspricht genau einer kleinen Inklination der Bahnebene von A gegenüber der Bahnebene von J. Weiterhin kann man sich überzeugen, dass die (fast) synchrone Rotationsbewegung um L_4 einer Deformation zur Ellipsenbahn entspricht, wobei der Brennpunkt in S

[21] Wir werden gelegentlich Winkelgeschwindigkeiten als *Frequenzen* bezeichnen, auch wenn die beiden Grössen sich natürlich um den Faktor 2π unterscheiden.

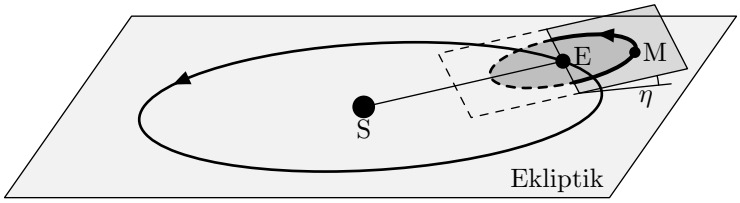
bleibt. Die verbleibenden zwei Moden sind langsam gegenüber ω. Sie entsprechen einer langsamen Änderung der Phase der Kreisbahn von A heraus aus ihrer Ruheposition von 60° vor J.

Alle diese Trajektorien kann man auch verstehen, wenn man beachtet, dass für $m_{\mathrm{J}} \ll m_{\mathrm{S}}$ der Einfluss von J gering ist. Wir betrachten also bis auf kleine Störungen das Zweikörpersystem von S und A, für das wir bereits wissen, dass die Trajektorien Ellipsen sind. Die obigen Schwingungen entsprechen genau den Bahnen des Systems von S und A in der Umgebung von L_4. Der Einfluss von J sorgt lediglich dafür, dass die Bahnen von A leicht deformiert werden.

2.5 Bewegung des Mondes

In diesem Abschnitt wollen wir das Dreikörper-Problem bestehend aus Sonne S, Erde E und Mond M diskutieren, welches u.A. das Entstehen von *Sonnenfinsternissen* beschreibt. Insbesondere wollen wir die Bahn des Mondes mit einiger Genauigkeit bestimmen, um die Abfolge von Sonnenfinsternisse quantitativ zu verstehen.

Kinematik. Der Mond M kreist um die Erde E in einer Bahnebene, die mit $\eta \approx 5°$ leicht geneigt zur Ekliptik (Bahnebene der Erde um die Sonne S) steht.



(2.97)

Es lassen sich deshalb (mindestens) zwei Perioden unterscheiden:

- Der *synodische Monat* beschreibt die Periode zwischen zwei aufeinander folgenden Neumonden (gerichteter Durchgang des Mondes durch die Ebene senkrecht zur Ekliptik entlang der Verbindungsachse SE)

$$T_{\mathrm{syn}} \approx 29.53059\,\mathrm{Tage}\,. \tag{2.98}$$

- Der *drakonitische Monat* beschreibt Periode zwischen aufeinander folgenden, gleich gerichteten Durchgängen durch die Ekliptik

$$T_{\mathrm{dra}} \approx 27.21222\,\mathrm{Tage}\,. \tag{2.99}$$

Sie stehen im Verhältnis

$$\rho := \frac{T_{\mathrm{syn}}}{T_{\mathrm{dra}}} = 1.08520\ldots. \tag{2.100}$$

Die Diskrepanz kann zum grössten Teil rein kinematisch erklärt werden. Wäre die Bahnebene des Mondes raumfest orientiert, so wäre[22]

$$\rho = 1 + \frac{T_{\rm syn}}{T_{\rm a}} = 1.08085\ldots, \tag{2.101}$$

wobei ein Umlauf der Erde um die Sonne (bezüglich der Fixsterne) ein siderisches Jahr dauert

$$T_{\rm a} \approx 365.2563\,\text{Tage}\,. \tag{2.102}$$

Die kleine Abweichung von dem beobachteten Wert (2.100) lässt auf eine langsame Rotation der Bahnebene des Mondes schliessen.

Sonnenfinsternisse. Das Verhältnis ρ bestimmt das Auftreten Das Verhältnis ρ bestimmt das Auftreten von Sonnenfinsternissen (bzw. Mondfinsternissen): Ausgehend von einer exakten Konjunktion SME tritt eine weitere Finsternis nach $p \in \mathbb{Z}$ synodischen Monaten auf, wenn in demselben Zeitraum auch $q \in \mathbb{Z}$ *halbe* drakonitische Monate vergehen (eine weitere Finsternis kann im selben oder im entgegengesetzten Knoten auftreten)

$$pT_{\rm syn} \approx \tfrac{1}{2} q T_{\rm dra}. \tag{2.103}$$

Wegen der endlichen Ausdehnung der Himmelskörper muss diese Bedingung nur innerhalb einer Toleranz Δ erfüllt sein

$$|2p\rho - q| < \Delta \approx 0.087. \tag{2.104}$$

Wegen $\rho \approx 1 + {}^1\!/_{12}$ tritt nach 12 synodischen Monaten erneut eine Finsternis im gleichen Knoten auf

$$12\rho = 13.0224\ldots. \tag{2.105}$$

Diese Periodizität ist aber nicht exakt, denn wegen

$$\frac{\Delta}{12\rho - 13} \approx 3.88, \tag{2.106}$$

ist die Toleranz nach 3 oder 4 Zyklen erschöpft und die Periodizität bricht ab. Weitaus genauer ist die Periodizität

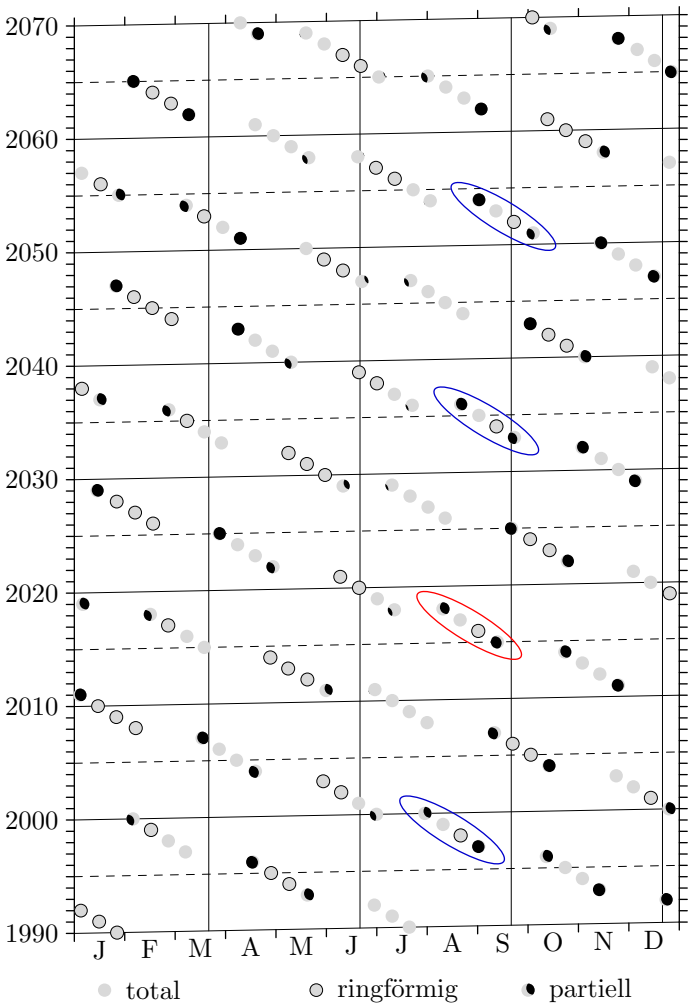
$$223\rho = 241.999\ldots \approx 242. \tag{2.107}$$

Ein solcher sogenannter *Saros-Zyklus* hat eine Periode von $223T_{\rm syn}$, d.h. etwa 18 Jahre, 11 Tage und 8 Stunden. Er dauert etwa 71 Zyklen und somit 1270 Jahre an, bis er abbricht. So gehören z.B. die beiden totalen Sonnenfinsternisse im Sommer

[22] Ein analoge Situation tritt bei analogen Uhren auf, wenn man den Stunden- und Minutenzeiger mit der Rotation der Erde bzw. des Mondes identifiziert. Ein drakonitischer Monat entspricht dann einer vollen Stunde, wohingegen ein synodischer Monat die Zeit zwischen zwei Aufeinanderliegen der Zeiger ist. Man beachte, dass in diesem Bild den 12 Stunden (etwa) 13 drakonitische Monate entsprechen.

1999 in Europa und im Sommer 2017 in Nordamerika[23] zum Saros-Zykus Nummer 145.

Das folgende Schema listet alle Sonnenfinsternisse im Zeitraum 1990–2070 auf (am Ort ihrer maximalen Verfinsterung):[24]



(2.108)

Man sieht deutlich die Wiederholungen nach einem knappen Jahr, aber auch die Wiederholungen nach gut 18 Jahren.

Man erkennt aber auch, dass die Art der Sonnenfinsternis in der Wiederholung meist dieselbe bleibt. Das liegt zum einen daran, dass das Verhältnis ρ sehr gut durch die rationale Zahl 242/223 getroffen wird

$$223T_{\text{syn}} \approx 242T_{\text{dra}}. \tag{2.109}$$

Somit passiert der Mondschatten die Erde auf einem ähnlichen Breitengrad, und letzterer entscheidet darüber, ob die Finsternis partiell ist. Zum anderen liegt es an

[23] Man beachte, dass Nordamerika grob 120° Längengrade von Europa entfernt ist, was 8 Stunden Erdrotation entspricht. Somit wiederholt sich eine Sonnenfinsternis nach drei Saros-Zyklen, d.h. nach gut 54 Jahren, an ähnlicher Stelle auf der Erde.

[24] Basierend auf NASA Catalog of Solar Eclipses; nach Vorlesungsskript Allgemeine Mechanik (HS2016), ETH Zürich, Prof. G.M. Graf

der weiteren guten rationalen Koinzidenz

$$223T_{\text{syn}} \approx 239T_{\text{anom}} \tag{2.110}$$

mit dem *anomalischen Monat*

$$T_{\text{anom}} \approx 27.55455\,\text{Tage}\,, \tag{2.111}$$

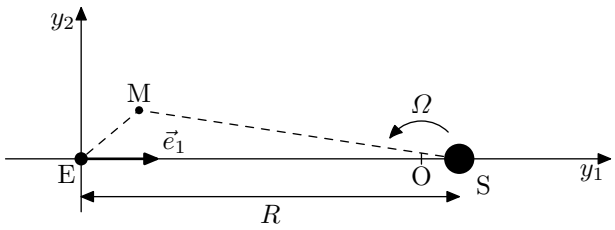
welcher die Periode der Abstandsschwankungen zwischen Mond und Erde beschreibt. Nach einem Saros-Zyklus hat der Mond also einen ähnlichen Abstand zur Erde wie zuvor. Weiterhin befindet sich mit

$$223T_{\text{syn}} \approx 18T_{\text{a}} \tag{2.112}$$

die Erde nach nur etwas über 18 Jahren wieder an fast derselben Stelle im Orbit um die Sonne, und damit auch in annähernd gleichen Abstand, wie zuvor. Sonne und Mond haben also von der Erde aus gesehen jeweils etwa dieselbe Grösse wie zuvor. Damit haben sie auch fast dasselbe Grössenverhältnis, welches darüber entscheidet, ob eine Sonnenfinsternis ringförmig oder total ist.

Wir haben also gesehen, wie die Mondbahn, insbesondere ihre drei verschiedenen Periodendauern T_{syn}, T_{dra} und T_{anom}, die Abfolge von Sonnenfinsternissen bestimmt. Im Folgenden wollen wir die Mondbahn unter dem Einfluss der Sonne berechnen.

Dynamik. Wir behandeln nun das System S, E, M (mit Massen $M \gg m \gg m'$) als restringiertes Dreikörperproblem, d.h. wir betrachten den Mond als Körper in dem externen Gravitationsfeld von Sonne und Erde. Wir nehmen an, dass die Erde (näherungsweise) eine Kreisbahn mit Radius R um die Sonne beschreibt. Da wir die Bewegung des Mondes um die Erde berechnen wollen, bietet es sich an, in einem rotierenden Bezugssystem mit der Erde E im Ursprung zu arbeiten (siehe Abschnitt 1.6).



(2.113)

Im Zweikörper-System Sonne-Erde müssen sich wie gewohnt Gravitations- und Führungskraft aufheben.[25] Dies ergibt die Beziehung

$$GM = R^3\Omega^2, \tag{2.114}$$

wobei $\Omega := 2\pi/T_{\text{a}}$ die Kreisfrequenz des Systems Sonne-Erde ist. Weiterhin ist $M := m_{\text{S}} + m_{\text{E}} \approx m_{\text{S}}$ die Gesamtmasse, die wir aufgrund der verschwindend

[25] In diesem Fall liegt die beschleunigte Erde im Ursprung des Koordinatensystems, was eine Führungskraft impliziert. Wäre hingegen der Schwerpunkt des Systems Sonne-Erde im Ursprung des Koordinatensystems, so würde derselbe Effekt durch die Zentrifugalkraft erreicht.

kleinen relativen Masse der Erde $m_\mathrm{E} \ll m_\mathrm{S}$ mit der Sonnenmasse gleichsetzen können.

Der Mond ist folgenden Beschleunigungen ausgesetzt: Zum einen haben wir die Gravitationskräfte von Erde und Sonne

$$\begin{aligned}
\vec{a}_\mathrm{E} &= -Gm_\mathrm{E}\,\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|^3}\,,\\
\vec{a}_\mathrm{S} &= Gm_\mathrm{S}\,\frac{R\vec{e}_1-\vec{y}}{\|R\vec{e}_1-\vec{y}\|^3}\\
&\approx GM\left(\frac{\vec{e}_1}{R^2}+\frac{3y_1\vec{e}_1-\vec{y}}{R^3}+\mathcal{O}(y^2)\right)\\
&= R\Omega^2\vec{e}_1+3\Omega^2y_1\vec{e}_1-\Omega^2\vec{y}+\mathcal{O}(y^2).
\end{aligned} \tag{2.115}$$

Die Linearisierung der Anziehungskraft der Sonne in $\vec{y}$ ist angebracht, da längs der Mondbahn $\|\vec{y}\|/R \approx 0.0026$. Zum anderen haben wir die Scheinkräfte des beschleunigten Bezugssystems. Die Führungsbeschleunigung[26]

$$\vec{a}_\mathrm{F} = \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times R\vec{e}_1) = -R\Omega^2\vec{e}_1 \tag{2.116}$$

kompensiert den konstanten Term aus der Anziehungskraft der Sonne. Weiterhin wirkt die Zentrifugalbeschleunigung

$$\vec{a}_\mathrm{Z} = -\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{y}) = \Omega^2(y_1,y_2,0) \tag{2.117}$$

und kompensiert damit die 1,2-Komponenten des Terms $-\Omega^2\vec{y}$. Schliesslich trägt noch die Coriolis-Beschleunigung bei

$$\vec{a}_\mathrm{C} = -\vec{\Omega}\times\dot{\vec{y}} = 2\Omega(\dot{y}_2,-\dot{y}_1,0). \tag{2.118}$$

Insgesamt lauten die Bewegungsgleichungen des Mondes[27] [28]

$$\begin{aligned}
\ddot{y}_1 - 2\Omega\dot{y}_2 &= -\left(\frac{Gm_\mathrm{E}}{\|\vec{y}\|^3}-3\Omega^2\right)y_1,\\
\ddot{y}_2 + 2\Omega\dot{y}_1 &= -\frac{Gm_\mathrm{E}}{\|\vec{y}\|^3}\,y_2,\\
\ddot{y}_3 &= -\left(\frac{Gm_\mathrm{E}}{\|\vec{y}\|^3}+\Omega^2\right)y_3.
\end{aligned} \tag{2.119}$$

Sie sind nicht integrabel, d.h. die allgemeine Lösung lässt sich nicht einfach mittels elementarer Funktionen ausdrücken. Insbesondere wissen wir bereits, dass die Mondbahn einige unterschiedliche Periodizitäten aufweist, deren Zusammenspiel

[26] Man beachte, dass die Führungsbeschleunigung in einem konstant rotierenden Bezugssystem der negativen Zentrifugalbeschleunigung des Rotationszentrums entspricht. Dies lässt sich leicht durch Verschiebung des Koordinatenursprungs auf das Rotationszentrum erklären.

[27] Die Sonne steuert hier effektiv (harmonische) Kräfte bei, die den Mond in die Bahnebene $y_3 = 0$ und aus der Ebene $y_1 = 0$ drücken.

[28] Diese Korrekturen lassen sich alle mittels der Kreisfrequenz Ω ausdrücken. Der Abstand R von der Sonne spielt erst für Korrekturen höherer Ordnung eine Rolle.

letztlich zu verschiedenartigen Interferenzeffekten führen kann, die eine exakte Bestimmung der individuellen Periodendauern erschwert. Allerdings existiert zu den obigen Bewegungsgleichungen eine Schar exakt periodischer Lösungen.

Im Folgenden wollen wir die Mondbahn sukzessive annähern. Als erste Näherung vernachlässigen wir die Effekte durch die Rotation um die Sonne, d.h. wir setzen $\Omega = 0$. Dann sind offensichtlich Kreisbahnen um die Erde und in der Ekliptik Lösungen der Bewegungsgleichungen, die die tatsächliche Mondbahn bereits einigermassen annähern. Daraufhin stören wir die Kreisbahn mit Korrekturtermen für endliches aber kleines Ω. Wir beschränken uns dabei auf periodische Bahnen, so dass wir die Länge eines Monats noch eindeutig festlegen können. Danach betrachten wir weitere kleine Abweichungen von den periodischen Bahnen, um die beobachtete Neigung aus der Ekliptik zu modellieren und ihre Frequenz zu berechnen.

Periodische Bahnen. Wir wollen zunächst die Existenz von exakt periodischen Bahnen beweisen. Diese Bahnen verlaufen vollständig in der Ekliptik

$$y_3(t) = 0, \tag{2.120}$$

was eine konsistente Einschränkung darstellt, da für $y_3 = 0$ keine Kräfte aus der Ekliptik heraus wirken. Wir benutzen dazu zwei diskrete Symmetrien der Bewegungsgleichungen: Die Kombination einer Zeitumkehrtransformation (bezüglich einer beliebigen Referenzzeit t_0) mit einer räumlichen Spiegelung in der y_1- bzw. y_2-Richtung ist eine Symmetrie der Bewegungsgleichungen (2.119)

$$\begin{aligned}(t, y_1, y_2) &\mapsto (2t_0 - t, -y_1, y_2),\\ (t, y_1, y_2) &\mapsto (2t_0 - t, y_1, -y_2).\end{aligned} \tag{2.121}$$

Mit anderen Worten, zu jeder gegebenen Lösung $(y_1(t), y_2(t))$ sind auch $(-y_1(2t_0 - t), y_2(2t_0 - t))$ und $(y_1(2t_0 - t), -y_2(2t_0 - t))$ weitere Lösungen, wie man sich leicht überzeugen kann.

Wir stellen jetzt die zwei Anfangsbedingungen, dass die Bahn zur Zeit t_0 die y_1-Achse kreuzt und in y_2-Richtung verläuft

$$\vec{y}(t_0) \sim \vec{e}_1, \qquad \dot{\vec{y}}(t_0) \sim \vec{e}_2. \tag{2.122}$$

Diese Anfangsbedingungen sind invariant unter der y_2-Spiegelung, demnach wird die Bahn durch diese Transformation auf sich selbst abgebildet

$$\big(y_1(t), y_2(t)\big) = \big(y_1(2t_0 - t), -y_2(2t_0 - t)\big). \tag{2.123}$$

Diese Bahn wird weiterhin zu einem gewissen Zeitpunkt $t_0 + T/4$ die y_2-Achse schneiden. Durch Justieren der Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\vec{y}}(t_0)$ kann man erreichen, dass die Bahn die y_2-Achse in y_1-Richtung schneidet[29]

$$\vec{y}(t_0 + T/4) \sim \vec{e}_2, \qquad \dot{\vec{y}}(t_0 + T/4) \sim \vec{e}_1. \tag{2.124}$$

[29]Man kann sich überlegen, dass die Voraussetzungen für den Zwischenwertsatz erfüllt sind, zumindest für annähernd kreisförmige Bahnen in Erdnähe.

Diese Randbedingungen sind nun invariant unter der y_1-Spiegelung bezüglich der Zeit $t_0 + T/4$, demnach wird die Bahn auch durch diese Transformation auf sich selbst abgebildet

$$\big(y_1(t), y_2(t)\big) = \big(-y_1(2t_0 + T/2 - t), y_2(2t_0 + T/2 - t)\big). \tag{2.125}$$

Kombinieren wir die beiden Symmetrien unserer Bahn, so erhalten wir die Periodizitäts-Eigenschaften

$$\begin{aligned}\big(y_1(t), y_2(t)\big) &= \big(-y_1(t - T/2), -y_2(t - T/2)\big) \\ &= \big(y_1(t - T), y_2(t - T)\big).\end{aligned} \tag{2.126}$$

Wir haben also eine exakt periodische Lösung konstruiert. Ihre Trajektorie ist symmetrisch um die y_1- und y_2-Achsen, d.h. sie ist oval und um die Erde zentriert. Dazu haben wir 3 von 4 möglichen Anfangsbedingungen verwendet. Lediglich der Abstand $y_1(t_0)$ ist frei wählbar (sowie die Zeit t_0). Er spezifiziert den Radius und damit die Periodendauer $T = T_{\text{syn}}$ der Mondbahn, welche dem synodischen Monat entspricht, da wir in dem rotierenden Bezugssystem mit fester Achse y_1 Sonne-Erde arbeiten.

Die Bewegungsgleichungen (2.119) können kompakt mittels der komplexen Variablen $z := y_1 + \mathring{\imath} y_2$ geschrieben werden. Wir erhalten dann eine einzige komplexe Gleichung[30]

$$\ddot{z} + \frac{G m_{\text{E}}}{z^{1/2}\bar{z}^{3/2}} + 2\Omega\mathring{\imath}\dot{z} - \tfrac{3}{2}\Omega^2(z + \bar{z}) = 0. \tag{2.127}$$

Wir wollen diese Gleichung perturbativ für kleines Ω lösen. Wir schränken uns dabei wie oben beschrieben auf eine Lösung mit exakter Periode T_{syn} ein. Dies lässt sich mit folgenden Randbedingungen erreichen

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} z(0) &= 0, & \operatorname{Re}\dot{z}(0) &= 0, \\ \operatorname{Im} z(T_{\text{syn}}/2) &= 0, & \operatorname{Im}\dot{z}(T_{\text{syn}}/2) &= -\operatorname{Im}\dot{z}(0).\end{aligned} \tag{2.128}$$

Wir wollen die Bewegungsgleichung bei kleinem Periodenverhältnis μ betrachten

$$\mu := \frac{T_{\text{syn}}}{T_{\text{a}}} = \frac{\Omega}{\omega} \ll 1, \qquad \omega := \frac{2\pi}{T_{\text{syn}}}, \tag{2.129}$$

und verwenden als Ansatz eine Störungsreihe in μ

$$z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k z_k(t). \tag{2.130}$$

Die kreisförmige Lösung unter Vernachlässigung der Sonne, $\Omega = 0$, lautet dann

$$z_0(t) = r_0\, \mathrm{e}^{\mathring{\imath}\omega t} \qquad \text{mit} \qquad r_0 = \left(\frac{G m_{\text{E}}}{\omega^2}\right)^{1/3}. \tag{2.131}$$

[30] Man beachte, dass die Gleichung nicht holomorph in z ist. Zur konkreten Lösung der Differentialgleichung mag es in der Tat günstiger sein, die Bahn in radialen Koordinaten $z(t) = r(t)\exp(\mathring{\imath}\varphi(t))$ zu formulieren.

Setzen wir diese in die Bewegungsgleichung ein und entwickeln bis zur nächsten Ordnung, so finden wir eine Differentialgleichung für z_1

$$\ddot{z}_1 - \tfrac{1}{2}\omega^2 z_1 - \tfrac{3}{2}\omega^2 \,\mathrm{e}^{2\mathring{\imath}\omega t}\,\bar{z}_1 = 2\omega^2 r_0\,\mathrm{e}^{\mathring{\imath}\omega t}\,. \tag{2.132}$$

Ihre allgemeine Lösung lautet

$$\begin{aligned} z_1(t) = {} & -\tfrac{2}{3} r_0\,\mathrm{e}^{\mathring{\imath}\omega t} + c_1 \mathring{\imath}\,\mathrm{e}^{\mathring{\imath}\omega t} + c_2(\mathring{\imath}\omega t - \tfrac{2}{3})\,\mathrm{e}^{\mathring{\imath}\omega t} \\ & + c_3(\mathrm{e}^{2\mathring{\imath}\omega t} - 3) + c_4(\mathring{\imath}\,\mathrm{e}^{2\mathring{\imath}\omega t} + 3\mathring{\imath}). \end{aligned} \tag{2.133}$$

Nun implizieren die Randbedingungen (2.128), dass alle Koeffizienten c_i der Lösungen der homogenen Differentialgleichung Null sind.[31] [32] [33] Die gesuchte erste Deformation der Lösung lautet somit $z_1 = -\frac{2}{3} r_0\,\mathrm{e}^{\mathring{\imath}\omega t}$.

Wir setzen sie nun wieder in die Differentialgleichung ein, und erhalten eine Differentialgleichung für z_2

$$\ddot{z}_2 - \tfrac{1}{2}\omega^2 z_2 - \tfrac{3}{2}\omega^2 \,\mathrm{e}^{2\mathring{\imath}\omega t}\,\bar{z}_2 = \omega^2 r_0(-\tfrac{7}{6}\,\mathrm{e}^{\mathring{\imath}\omega t} + \tfrac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathring{\imath}\omega t}). \tag{2.134}$$

Die Lösung lässt sich mittels eines Ansatzes $z_2(\tau) = a_1\,\mathrm{e}^{3\mathring{\imath}\omega t} + a_2\,\mathrm{e}^{\mathring{\imath}\omega t} + a_3\,\mathrm{e}^{-\mathring{\imath}\omega t}$ leicht bestimmen. Sie lautet unter Berücksichtigung der gewünschten Randbedingungen

$$z_2(t) = r_0\left(\frac{3}{16}\,\mathrm{e}^{3\mathring{\imath}\omega t} + \frac{7}{18}\,\mathrm{e}^{\mathring{\imath}\omega t} - \frac{19}{16}\,\mathrm{e}^{-\mathring{\imath}\omega t}\right). \tag{2.135}$$

Im Prinzip können wir diese Prozedur zur Lösungsfindung beliebig iterativ fortsetzen; uns genügt hier aber die bereits erlangte Genauigkeit.

Betrachten wir die beiden Halbachsen der Lösung. Wir finden

$$\begin{aligned} a = |z(0)| = |z(T/2)| &= r_0\big(1 - \tfrac{2}{3}\mu - \tfrac{11}{18}\mu^2 + \ldots\big), \\ b = |z(\pm T/4)| &= r_0\big(1 - \tfrac{2}{3}\mu + \tfrac{25}{18}\mu^2 + \ldots\big). \end{aligned} \tag{2.136}$$

Zum einen ist der mittlere Abstand des Mondes damit etwas geringer als für die ungestörte Bahn mit derselben Periode. Zum anderen ist die Mondbahn in Richtung der Sonne etwas abgeplattet

$$\frac{b}{a} = 1 + 2\mu^2 + \ldots. \tag{2.137}$$

Für $\mu = 0.08085\ldots$ ist das ungefähr 1.3%. Die Bahn des Mondes ist tatsächlich jedoch nicht periodisch, und die Schwankungen des Abstandes Erde-Mond sind in Wahrheit grösser.

[31] Die Lösungen der homogenen Differentialgleichung entsprechen den vier Variationen der Anfangsbedingungen (zunächst in der ungestörten Bewegung): c_1 entspricht einer Verschiebung der Zeit bzw. Phase, c_2 entspricht einer Änderung des Radius und damit einer Änderung der Frequenz. c_3 und c_4 entsprechen Deformationen zu elliptischen Bahnen (Richtung und Exzentrizität).

[32] Man beachte, dass der Faktor t vor dem Exponenten effektiv eine Variation der Frequenz repräsentiert: $\exp(\mathring{\imath}\omega(1+\mu)t) = \mathrm{e}^{\mathring{\imath}\omega t} + \mathring{\imath}\mu\omega t\,\mathrm{e}^{\mathring{\imath}\omega t} + \ldots$.

[33] Wir haben die inhomogene Lösung bereits so gewählt, dass $c_i = 0$.

Variationen der Bahn. Schliesslich wollen wir noch die Neigung der Bahnebene und ihre Drehbewegung untersuchen. Dazu gehen wir von der obigen periodischen Lösung aus, und nehmen eine kleine Auslenkung aus der Ekliptik an

$$y_3(t) = \epsilon\zeta(t). \tag{2.138}$$

Dies hat in der führenden Ordnung in ϵ keinen Einfluss auf die periodische Bahn, da diese nur über den Faktor $\|\vec{y}\|^{-3}$ koppelt

$$\|\vec{y}\|^{-3} = \big(|z|^2 + \varepsilon^2\zeta^2\big)^{-3/2} = |z|^{-3} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{2.139}$$

Umgekehrt aber beeinflusst die statische Lösung $z(t)$ die Bewegung für $\zeta(t)$ über denselben Term. Wir finden durch Einsetzen der Lösung $z(t)$

$$|z| = r_0\big(1 - \tfrac{2}{3}\mu + \tfrac{7}{18}\mu^2 - \mu^2\cos(2\omega t) + \ldots\big). \tag{2.140}$$

In der Bewegungsgleichung (2.119) $\ddot{\zeta} = -\omega^2(r_0^3|z|^{-3} + \mu^2)\zeta$. ergibt das

$$\ddot{\zeta} = -\omega^2\big(1 + 2\mu + \tfrac{5}{2}\mu^2 + 3\mu^2\cos(2\omega t) + \ldots\big)\zeta. \tag{2.141}$$

Lässt man den Term $3\mu^2\cos(2\omega t)$ aufgrund der Abplattung der Bahn fallen, so beschreibt $\zeta(t)$ eine harmonische Schwingung mit der Frequenz

$$\omega_{\text{dra}} = \omega\sqrt{1 + 2\mu + \tfrac{5}{2}\mu^2 + \ldots} = \omega\big(1 + \mu + \tfrac{3}{4}\mu^2 + \ldots\big). \tag{2.142}$$

Der vernachlässigte Term $3\mu^2\cos 2\tau$ hat zur Folge, dass $\zeta(t)$ zwar nicht mehr periodisch ist, aber eine mittlere Frequenz ω_{dra} besitzt.[34] Wegen des oszillatorischen Verhaltens des Terms trägt er jedoch nur in höherer Ordnung zu ω_{dra} bei.

Die Frequenz ω_{dra} beschreibt die Oszillationen aus der Ekliptik heraus. Da die Frequenz $\omega_{\text{dra}} = \omega + \ldots$ in führender Ordnung mit der Rotation des Mondes um die Erde übereinstimmt, ist die Bahnebene gegenüber der Ekliptik geneigt. Die frei wählbare Amplitude entspricht dem Neigungswinkel η.

Die Frequenz ω_{dra} beschreibt insbesondere auch die Durchgänge durch die Ekliptik. Der Faktor in (2.142)

$$\rho = \frac{\omega_{\text{dra}}}{\omega} = \frac{T_{\text{syn}}}{T_{\text{dra}}} = 1 + \mu + \tfrac{3}{4}\mu^2 + \ldots \tag{2.143}$$

ist somit das Verhältnis von synodischem zu drakonitischem Monat. In erster Ordnung $\rho = 1 + \mu + \ldots$ stimmt dies mit dem Verhältnis (2.101) basierend auf einer raumfesten Knotenlinie überein. Der Term zweiter Ordnung führt zu einer langsamen Drehung der Knotenlinie bezüglich der Fixsterne *entgegen* der Rotation des Mondes. Für den Mond mit $\mu = 0.08085\ldots$ ergibt sich

$$\rho = 1.08575\ldots \tag{2.144}$$

[34] Eine mittlere Frequenz lässt sich auf verschiedene Arten definieren. Zu den meisten Definitionen ist es zudem nicht leicht, ihren Wert aus der Differentialgleichung abzuleiten.

in guter Übereinstimmung mit dem gemessenen Wert $r = 1.08520\ldots$ (2.100).

Berücksichtigung weiterer Glieder der Störungsrechnung (sowie von Deformationen in der Bahnebene) verbessern die Übereinstimmung mit dem beobachteten Wert noch weiter; z.B. findet man in nächster Ordnung

$$\rho = 1.08517\ldots. \tag{2.145}$$

Ebenso kann man für elliptische Deformationen der Bahn vorgehen. Hier findet man mit denselben Methoden auch, dass sich die Ellipsenachse langsam bezüglich der Fixsterne dreht, allerdings in Richtung der Rotation des Mondes, d.h. *entgegengesetzt* zur Drehrichtung zur Knotenlinie. Eine Rechnung ergibt das Verhältnis $T_{\text{syn}}/T_{\text{anom}} = 1 + \mu - \frac{3}{4}\mu^2 + \ldots$, welches den beobachteten Wert einigermassen gut trifft.

Weitere Faktoren, welche die Mondbahn beeinflussen können, sind die Abplattung der Erde, Schwankung des Abstands zur Sonne, sowie die anderen Planten. Auch wenn einige dieser Einflüsse analytisch angenähert werden können, bietet sich letztlich eher eine numerische Integration an.

3 Schwingungsprobleme

Eine weitere wichtige Klasse von mechanischen Systemen sind die Schwingungssysteme. Schwingungen treten in der Physik auf, wenn man (kleine) Störungen um eine Gleichgewichtslage betrachtet. Ebenso kann man Schwingungen um eine (einfach geartete) Bahn untersuchen. Beispiele solcher Schwingungsprobleme haben wir bereits im Zusammenhang des Zweikörper-Problems in Kapitel 2.4 und 2.5 gesehen. Die Schwingungen ergaben sich dort aus linearen Bewegungsgleichungen für die Störungen.

Allgemeiner führt die Lösungsfindung mittels Störung einer bekannten Bahn in jeder Ordnung zu einem System linearer Differentialgleichungen. Daher ist es elementar wichtig, solche Gleichungen zu verstehen und lösen zu können. In diesem Kapitel wollen wir Schwingungsprobleme und die zugrundeliegenden linearen Bewegungsgleichungen diskutieren.

3.1 Lineare Bewegungsgleichungen

In diesem Abschnitt besprechen wir zunächst abstrakte lineare Differentialgleichungen und ihre Lösung.

Formulierung. Die allgemeine lineare, inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung für die vektorwertige Funktion $\vec{z} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ lautet

$$\dot{\vec{z}}(t) = A(t)\,\vec{z}(t) + \vec{b}(t). \tag{3.1}$$

Hier ist $\vec{b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine vorgegebene vektorwertige Funktion von t und $A : \mathbb{R} \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ eine matrixwertige Funktion, d.h. für jede Zeit t ist $A(t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung.

Zu einem vorgegebenen Anfangswert $\vec{z}(t_0) = \vec{z}_0$ hat die Differentialgleichung (zumindest in einer Umgebung von t_0) eine eindeutige Lösung.[1] Offensichtlich sind Linearkombinationen von Lösungen wieder Lösungen (Superpositionsprinzip), d.h. sie bilden einen Vektorraum der Dimension n, der isomorph zum Vektorraum der Anfangswerte ist.

In der Mechanik sind die Bewegungsgleichungen zwar in der Regel Differentialgleichungen zweiter Ordnung,

$$\ddot{q}^i = a(q^i, \dot{q}^i), \tag{3.2}$$

[1] Anfangswertlösungen für Differentialgleichungen erster Ordnung existieren und sind eindeutig, falls gewisse Stetigkeitsbedingungen erfüllt sind. In physikalischen Anwendungen ist dies im Allgemeinen der Fall.

man kann letztere aber mit einem formalen Trick immer auf Differentialgleichungen erster Ordnung reduzieren: Wir führen zu jedem Freiheitsgrad q^i einen weiteren Freiheitsgrad $q^{N+i} := \dot{q}^i$ ein, der seine erste Ableitung repräsentiert. Man erhält so ein gleichwertiges System erster Ordnung mit der doppelten Grösse

$$\dot{q}^i = q^{N+i}, \qquad \dot{q}^{N+i} = a(q^i, q^{N+i}). \tag{3.3}$$

Eine solche Umformulierung liegt auch dem Hamiltonischen Formalismus zugrunde, den wir in Kapitel 8 behandeln werden.

Propagator. Betrachten wir zunächst die homogene Differentialgleichung

$$\dot{\vec{z}}(t) = A(t)\,\vec{z}(t). \tag{3.4}$$

Ihre Lösungen nennt man in der Physik *freie Schwingungen*.

Wie wir oben bereits argumentiert haben, ist der Raum der Anfangsbedingungen zu einer Zeit s isomorph zum Raum der Lösungen. Es muss also eine invertierbare lineare Abbildung geben, die den Anfangsbedingungen $\vec{z}(s) = \vec{z}_0$ eine komplette Lösung $\vec{z}(t)$ zuordnet. Sie wird *Propagator* genannt und ist eine Abbildung $P(t,s) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\vec{z}(t) = P(t,s)\,\vec{z}(s). \tag{3.5}$$

Der Propagator erfüllt die Eigenschaften einer Gruppe, d.h. Propagatoren können geeignet multipliziert werden, es gibt ein Inverses und das Identitätselement

$$P(t,r)P(r,s) = P(t,s), \qquad P(t,s)^{-1} = P(s,t), \qquad P(s,s) = \mathrm{id}\,. \tag{3.6}$$

Dies sind Konsistenzbedingungen, die daraus folgen, dass die Anfangsbedingungen anhand einer beliebigen Zeit s formuliert werden können. Weiterhin folgt aus der Diffentialgleichung für $\vec{z}$ eine Differentialgleichung für den Propagator

$$\frac{\partial}{\partial t}\,P(t,s) = A(t)\,P(t,s). \tag{3.7}$$

Die soeben hergeleiteten Gleichungen für den Propagator beschreiben ihn bereits eindeutig, und wir wollen eine Formel zu seiner Berechnung herleiten: Durch Integration der Differentialgleichung erhält man eine Integralgleichung für den Propagator

$$P(t,s) = \mathrm{id} + \int_s^t \mathrm{d}t_1\, A(t_1)\,P(t_1,s). \tag{3.8}$$

Hier wurde die Integrationskonstante durch die Bedingung $P(s,s) = \mathrm{id}$ festgelegt. Die Integralgleichung legt $P(t,s)$ nun implizit fest. Für den Fall, dass $|A(t_1)||t-s| \ll 1$ im Intervall $s < t_1 < t$, besagt sie, dass $P(t,s) \approx \mathrm{id}$ durch die Einheitsmatrix approximiert wird, wobei der Integralterm die Abweichung davon exakt beschreibt. Setzen wir die so gewonnene Approximation von P in den Integralterm ein, so erhalten wir eine bessere Approximation

$$P(t,s) \approx \mathrm{id} + \int_s^t \mathrm{d}t_1\, A(t_1). \tag{3.9}$$

Setzen wir diese wiederum in den Integralterm ein, so erhalten wir einen weiteren Korrekturterm. Durch Iteration ergibt sich somit eine Reihendarstellung des Propagators

$$P(t,s) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_s^t \mathrm{d}t_1 \int_s^{t_1} \mathrm{d}t_2 \ldots \int_s^{t_{n-1}} \mathrm{d}t_n \, A(t_1) \ldots A(t_n). \tag{3.10}$$

Diese Reihe konvertiert unter geeigneten Voraussetzungen.

In der Physik wird die Lösung als Reihe geschachtelter Integrale mittels eines formalen Tricks oft auch in einer kürzeren Form geschrieben: Zunächst beachten wir, dass das Produkt von Matrizen $A(t_j)$ so geordnet ist, dass die Zeiten t_j von links nach rechts abnehmen. Wir führen nun einen Zeitordnungsoperator T ein, welcher ein Produkt von Matrizen formal in ebendiese Ordnung bringt

$$\mathrm{T}\big[A(t_1) \ldots A(t_n)\big] := A(t_{\pi(1)}) \ldots A(t_{\pi(n)}). \tag{3.11}$$

Die Permutation $\pi \in \mathrm{S}_n$ ordnet die Matrizen hier so um, dass die Zeitparameter von links nach rechts absteigen, d.h. $t_{\pi(i)} \geq t_{\pi(j)}$ für $i < j$. Der Trick besteht dann darin, über alle Permutationen zu mitteln

$$A(t_1) \ldots A(t_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathrm{S}_n} \mathrm{T}\big[A(t_{\pi(1)}) \ldots A(t_{\pi(n)})\big]. \tag{3.12}$$

Die Summe über alle Permutationen erlaubt es, das geschachtelte Zeitintegral als n-faches Integral über das gesamte Intervall von s bis t zu schreiben

$$P(t,s) = \mathrm{T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\int_s^t \mathrm{d}t' \, A(t') \right]^n. \tag{3.13}$$

Bis auf die Zeitordnung entspricht die Reihenentwicklung nun derjenigen der Exponentialfunktion

$$\exp M := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!}, \tag{3.14}$$

welche auch für Matrizen M gültig ist. Wir können die Integralreihe (3.10) also schliesslich kompakt schreiben als zeitgeordnetes Exponential[2]

$$P(t,s) = \mathrm{T} \left[\exp \int_s^t \mathrm{d}t' \, A(t') \right]. \tag{3.15}$$

Die drei Arten den Propagator mittels Differentialgleichung (3.7) samt Anfangsbedingung (3.6), mittels Integralreihe (3.10) oder mittels zeitgeordnetem Exponenten (3.15) zu beschreiben sind äquivalent, und bieten je nach Situation bestimmte Vorteile.[3]

[2] Man beachte, dass der Zeitordnungsoperator T auf formale (polynomiale) Ausdrücke wirkt, d.h. in diesem Fall auf die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion. Dies führt zu der Integralreihe (3.10). Erst nach Anwendung der Zeitordnung dürfen konkrete Ausdrücke für $A(t)$ eingesetzt werden.

[3] In der Differentialgeometrie stellt der Propagator $P(t,s)$ eine Parallelverschiebung mittels des Zusammenhangs $A(t)\,\mathrm{d}t$ in der Zeitdimension dar.

Der Propagator ist nicht nur relevant für mechanische Schwingungsprobleme, sondern insbesondere auch in der Quantenmechanik wichtig um die Schrödingergleichung formal zu lösen.[4]

Inhomogenität. Wir können uns nun der Lösung des allgemeinen inhomogenen Systems (3.1) zuwenden. Sie lautet (*Duhamel-Formel*)

$$\vec{z}(t) = P(t,s)\,\vec{z}(s) + \int_s^t \mathrm{d}t'\, P(t,t')\,\vec{b}(t'). \tag{3.16}$$

In der Tat rechnet man leicht nach, dass die so konstruierte Funktion $z(t)$ die gewünschte Differentialgleichung erfüllt

$$\begin{aligned}\dot{\vec{z}}(t) &= A(t)\,P(t,s)\,\vec{z}(s) + P(t,t)\,\vec{b}(t) + \int_s^t \mathrm{d}t'\, A(t)P(t,t')\,\vec{b}(t') \\ &= A(t)\,\vec{z}(t) + \vec{b}(t),\end{aligned} \tag{3.17}$$

wobei wir die Eigenschaften (3.6,3.7) des Propagators benutzt haben.

Störung von Lösungen. Zum Abschluss wollen wir noch die Lösungsfindung mittels *Deformation* einer bekannten Lösung diskutieren. Ein allgemeines mechanisches System wird beschrieben durch eine nichtlineare Differentialgleichung der Art

$$\dot{q}^j(t) = v^j\big(q^i(t);t\big). \tag{3.18}$$

Wie weiter oben beschrieben kann jedes System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf eines der ersten Ordnung reduziert werden.

Nehmen wir an, dass wir bereits eine exakte Lösung $q_0^i(t)$ der obigen Differentialgleichung gefunden haben. Dies mag eine Gleichgewichtslage sein oder eine Lösung mit spezieller Symmetrie. Durch *Störung der Lösung* können wir weitere Lösungen in ihrer Nachbarschaft finden, indem wir lediglich *lineare* Differentialgleichungen lösen.

Der Ansatz für gestörte Lösungen ist eine (formale) Potenzreihe

$$q^j(t) = q_0^j(t) + \epsilon z_1^j(t) + \epsilon^2 z_2^j(t) + \mathcal{O}(\epsilon^3). \tag{3.19}$$

Setzen wir diesen Ansatz in die nichtlineare Differentialgleichung ein, so ist sie in führender Ordnung per Konstruktion erfüllt. In erster Ordnung lautet die zu erfüllende Differentialgleichung

$$\dot{z}_1^j(t) = \sum_k \frac{\partial v^j}{\partial q^k}\left(q_0^i(t);t\right) z_1^k(t). \tag{3.20}$$

[4] In der Quantenfeldtheorie führt der zeitgeordnete Exponent (3.15) hingegen zur Beschreibung von Prozessen durch Feynman-Diagramme.

Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung (3.4) mit der Matrix A

$$A^{jk}(t) = \frac{\partial v^j}{\partial q^k}\left(q_0^i(t); t\right), \tag{3.21}$$

welche vollständig durch die Lösung in führender Ordnung bestimmt ist. Wir können die Differentialgleichung mit den oben beschriebenen Methoden lösen, indem wir den Propagator $P(t, s)$ zu diesem $A(t)$ ermitteln.

Entwickeln wir nun die ursprüngliche Gleichung bis zur zweiten Ordnung, so erhalten wir wieder eine lineare Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{z}_2^j(t) = &\sum_k \frac{\partial v^j}{\partial q^k}\left(q_0^i(t); t\right) z_2^k(t) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{k,l} \frac{\partial v^j}{\partial q^k\, \partial q^l}\left(q_0^i(t); t\right) z_1^k(t) z_1^l(t).\end{aligned} \tag{3.22}$$

Insbesondere ist die Matrix A wieder genau dieselbe wie in der ersten Ordnung, und wir können somit den zugehörigen Propagator wiederverwenden. Es ist allerdings ein inhomogener Term hinzugekommen

$$b^j = \frac{1}{2}\sum_{k,l} \frac{\partial v^j}{\partial q^k\, \partial q^l}\left(q_0^i(t); t\right) z_1^k(t) z_1^l(t), \tag{3.23}$$

welcher vollständig durch die Korrektur erster Ordnung bestimmt wird.

Das beobachtete Muster wiederholt sich in allen höheren Ordnungen mit zunehmend komplizierteren Inhomogenitäten. Wir können also die Störungsreihe iterativ Ordnung für Ordnung mittels Lösungen einer linearen Differentialgleichung bestimmen und so eine exakte Lösung immer genauer annähern (sofern die Reihe konvergiert). Die Freiheitsgrade der homogenen Differentialgleichungen in den einzelnen Ordnungen entsprechen hierbei der Wahlfreiheit der Anfangsbedingungen entwickelt als formale Potenzreihe in ϵ.

3.2 Eigenschwingungen

In dem Fall, dass die Matrix A nicht von der Zeit t abhängt heisst das Schwingungssystem *autonom*. Im Folgenden betrachten wir den einfachsten Fall einer *autonomen homogenen Differentialgleichung*

$$\dot{\vec{z}}(t) = A\,\vec{z}(t). \tag{3.24}$$

Propagator. Da die Differentialgleichung invariant unter Zeittranslation ist, hängt der Propagator $P(t, s)$ nur von der Differenz $t - s$ ab

$$P(t, s) = P(t - s, s - s) = P(t - s, 0) =: P(t - s). \tag{3.25}$$

Dieser Propagator ist definiert über die Eigenschaften

$$P(t)P(s) = P(t+s), \qquad P(0) = \mathrm{id}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,P(t) = AP(t). \tag{3.26}$$

Man kann sich vergewissern, dass der Propagator im autonomen Fall durch die Exponentialfunktion (3.14) der Matrix $M = tA$ gegeben ist[5]

$$P(t) = \exp(tA) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\,A^n. \tag{3.27}$$

Wir werden nun anhand eines Beispiels diskutieren, wie diese Matrix-Exponentialfunktion zu berechnen ist.

Gedämpfter Oszillator. Als Beispiel betrachten wir einen eindimensionalen *gedämpften Oszillator* beschrieben durch die lineare Bewegungsgleichung (mit $k, r \geq 0$)

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}. \tag{3.28}$$

Wir definieren $\vec{z} := (x, \dot{x})$ um die Bewegungsgleichung als Differentialgleichung erster Ordnung (3.24) umzuschreiben mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & -2\beta \end{pmatrix}, \qquad \alpha := \sqrt{\frac{k}{m}}\,, \quad \beta := \frac{r}{2m}\,. \tag{3.29}$$

Der Propagator lautet also hier $P(t) = \exp(At)$.

Wir wollen die Exponentialfunktion explizit als Potenzreihe berechnen. Dazu trennen wir die Matrix A zunächst auf in ihren Spuranteil $-\beta\,\mathrm{id}$ und einen spurlosen Anteil C

$$A = C - \beta\,\mathrm{id}, \qquad C = \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ -\alpha^2 & -\beta \end{pmatrix}. \tag{3.30}$$

Da die Einheitsmatrix mit allen Matrizen kommutiert, können wir den Exponenten auftrennen

$$\exp(At) = \mathrm{e}^{-\beta t}\exp(Ct). \tag{3.31}$$

Für die spurlose Matrix C gilt durch Nachrechnen

$$C^2 = -\omega_0^2 \qquad \text{mit} \qquad \omega_0 := \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\,. \tag{3.32}$$

Nun trennen wir die Exponentialreihe in gerade und ungerade Potenzen von C, so dass

$$\begin{aligned} \exp(Ct) &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t^{2k}}{(2k)!}\,C^{2k} + \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\,C^{2k+1}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t^{2k}(-\omega_0^2)^k}{(2k)!}\,\mathrm{id} + \frac{t^{2k+1}(-\omega_0^2)^k}{(2k+1)!}\,C\right) \\ &= \cos(\omega_0 t)\,\mathrm{id} + \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}\,C, \end{aligned} \tag{3.33}$$

[5]Dies folgt insbesondere aus der Darstellung als zeitgeordnetes Integral (3.15), wobei die Zeitordnung für eine zeitunabhängige Matrix A irrelevant ist.

wobei wir die Reihenentwicklung von cos und sin verwendet haben. Insgesamt lautet der Propagator

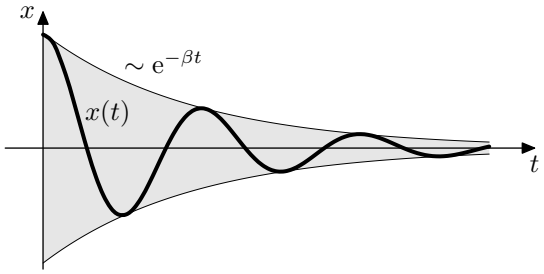
$$P(t) = \mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega_0 t)\,\mathrm{id} + \frac{\mathrm{e}^{-\beta t}\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}\,(A + \beta\,\mathrm{id}). \tag{3.34}$$

Wir wollen nun die physikalische Bedeutung der Lösung verstehen. Dazu beobachten wir, dass α^2 proportional zur Federkonstante und β proportional zur Reibung ist. Wie wir im Folgenden sehen werden, ist für das Verhalten der Lösung das Verhältnis zwischen α und β relevant, welches bestimmt, ob ω_0 imaginär oder reell ist.

Im *Schwingfall* $\beta < \alpha$ ist ω_0 reell. Ausgedrückt durch die ursprüngliche Variable $x(t)$ lautet die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} x(t) = x(0)\,\mathrm{e}^{-\beta t}\left(\cos(\omega_0 t) + \beta\,\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}\right) \\ + \dot{x}(0)\,\mathrm{e}^{-\beta t}\,\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}\,. \end{aligned} \tag{3.35}$$

In diesem Fall dominiert die Federkraft, das System bleibt immer in Schwingung, die Amplitude nimmt aber dabei exponentiell ab.



(3.36)

Im *Dämpfungsfall* $\beta > \alpha$ ist $\omega_0 = \mathring{\imath} w_0$ imaginär mit $w_0 := \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} \in \mathbb{R}$. Mit $\cos(\mathring{\imath} x) = \cosh x$ und $\sin(\mathring{\imath} x) = \mathring{\imath}\sinh x$ hat die Lösung (3.35) die Form

$$\begin{aligned} x(t) = x(0)\,\mathrm{e}^{-\beta t}\left(\cosh(w_0 t) + \beta\,\frac{\sinh(w_0 t)}{w_0}\right) \\ + \dot{x}(0)\,\mathrm{e}^{-\beta t}\,\frac{\sinh(w_0 t)}{w_0}\,. \end{aligned} \tag{3.37}$$

In diesem Fall dominiert die Reibung. Da $w_0 < \beta$, dominiert der Abfall der Exponentialfunktion über den Anstieg der hyperbolischen Funktionen; die Lösung tendiert also exponentiell gegen 0.

Im *kritisch gedämpften Fall* $\beta = \alpha$, d.h. für $\omega_0 = 0$, sind die obigen Ausdrücke singulär, und wir sollten unsere Herleitung überdenken. In diesem Fall gilt $C^2 = -\omega_0^2 = 0$, d.h. die Potenzreihe von $\exp(Ct)$ bricht nach dem linearen Term ab. Wir finden für den Propagator

$$P(t) = \mathrm{e}^{-\beta t}\,(\mathrm{id} + Ct) = \mathrm{e}^{-\beta t}\,\mathrm{id} + t\,\mathrm{e}^{-\beta t}\,(A + \beta\,\mathrm{id}). \tag{3.38}$$

Dies entspricht genau dem Grenzwert $\omega_0 \to 0$ der allgemeinen Formel (3.34); eine gesonderte Herleitung im singulären Fall $\alpha = \beta$ wäre also nicht nötig gewesen. Die allgemeine Lösung reduziert sich zu

$$x(t) = x(0)\,\mathrm{e}^{-\beta t}\,(1+\beta t) + \dot{x}(0)\,\mathrm{e}^{-\beta t}\,t. \tag{3.39}$$

Im Fall kritischer Dämpfung ist die effektive Dämpfung maximal, d.h. das System kommt (bei vorgegebenem α) am schnellsten zum Stillstand.[6]

Eigenschwingungen. Man kann die obige Differentialgleichung (3.24) durch das Auffinden der *Eigenschwingungen* lösen. Eigenschwingungen sind Lösungen der Form

$$\vec{z}(t) = \vec{a}\,\mathrm{e}^{\lambda t}\,. \tag{3.40}$$

Sie entsprechen den Lösungen des Eigenwertproblems für die Matrix A

$$A\vec{a} = \lambda\vec{a}. \tag{3.41}$$

Hierbei ist zu beachten, dass sowohl der Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ als auch der Eigenvektor $\vec{a} \in \mathbb{C}^n$ im Allgemeinen komplex sind. Im Fall linearer Differentialgleichungen sind solche komplexen Lösungen $\vec{z}(t)$ unproblematisch, denn soweit die Funktionen $A(t)$ und $\vec{b}(t)$ reell sind, stellen sowohl der Realteil $\mathrm{Re}\,z(t)$ als auch der Imaginärteil $\mathrm{Im}\,z(t)$ reelle Lösungen dar. In der Tat ist diese Komplexifizierung oft nützlich, da Exponentialfunktionen einfacher handzuhaben sind als trigonometrische Funktionen.

Falls die Eigenvektoren von A den ganzen Vektorraum $\mathbb{C}^n$ aufspannen, ist jede Lösung der Differentialgleichung (3.24) eine Linearkombination von Eigenschwingungen (3.40).[7] Die Matrix A heisst dann diagonalisierbar, denn in einer Basis von Eigenvektoren $\vec{a}_k$ ist A durch eine Diagonalmatrix der Eigenwerte λ_k dargestellt

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{3.42}$$

Die Menge $\Sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ der Eigenwerte wird das *Spektrum* von A genannt.

Ohne Bezugnahme auf eine spezielle Basis kann man die *Spektralzerlegung* von A mittels Projektoren P_λ schreiben als

$$A = \sum_{\lambda\in\Sigma(A)} \lambda P_\lambda. \tag{3.43}$$

Die Matrix $P_\lambda : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ ist die Projektion zum Eigenraum mit Eigenwert λ; sie ist definiert durch ihre Wirkung auf einen Eigenvektor $\vec{a}$

$$P_\lambda\,\vec{a} \;= \begin{cases} \vec{a} & \text{falls } A\vec{a} = \lambda\vec{a}, \\ 0 & \text{anderenfalls.} \end{cases} \tag{3.44}$$

[6] Falls $\beta > \alpha$, bremst die Reibung die Bewegung zu stark und das System bewegt sich langsamer zum Nullpunkt als für $\beta = \alpha$.

[7] Anderenfalls muss man zusätzlich Lösungen der Art $\vec{z}(t) = \vec{a}t^k\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ betrachten, wir werden diesen Fall lediglich anhand unseres Beispiels diskutieren.

Die Eigenprojektoren sind paarweise orthogonal und sie summieren sich zur Identität

$$P_\lambda P_\mu = \begin{cases} P_\lambda & \text{falls } \lambda = \mu, \\ 0 & \text{anderenfalls,} \end{cases} \qquad \sum_{\lambda\in\Sigma(A)} P_\lambda = \mathrm{id}\,. \tag{3.45}$$

Weiterhin können wir mit ihrer Hilfe den Propagator und die allgemeine Lösung schreiben als

$$P(t) = \mathrm{e}^{At} = \sum_{\lambda\in\Sigma(A)} \mathrm{e}^{\lambda t}\, P_\lambda, \qquad \vec{z}(t) = \sum_{\lambda\in\Sigma(A)} \mathrm{e}^{\lambda t}\, P_\lambda \vec{z}(0). \tag{3.46}$$

Für unser obiges Beispiel ist die Matrix A in (3.29) im generischen Fall diagonalisierbar. Ihre Eigenwerte sind

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & -2\beta \end{pmatrix}, \qquad \lambda_{1,2} = -\beta \pm \mathring{\imath}\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}, \tag{3.47}$$

mit den zugehörigen Eigenvektoren $\vec{a}_{1,2} = (1, \lambda_{1,2})$. Dann ist die freie Schwingung von der Form[8]

$$x(t) = c_1\, \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2\, \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\,. \tag{3.48}$$

Die Koeffizienten $c_{1,2}$ lassen sich durch die Anfangswerte $x(0)$ und $\dot{x}(0)$ ausdrücken und man findet die obige Lösung (3.35).

Im kritisch gedämpften Fall $\alpha = \beta$ ist die Matrix A allerdings nicht diagonalisierbar, da die Eigenvektoren $\vec{a}_{1,2}$ für $\lambda_1 \to \lambda_2$ kollinear werden. Wir haben bereits gesehen, dass die Lösung dann von der Art ist

$$x(t) = c\, \mathrm{e}^{\lambda t} + c'\, t\, \mathrm{e}^{\lambda t}\,. \tag{3.49}$$

Zusätzlich zu der normalen Eigenschwingung $\mathrm{e}^{\lambda t}$ gibt es hier die spezielle Eigenschwingung $t\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ zu dem degenerierten Eigenwert λ.[9] Man erhält die obige Lösung (3.39) wieder durch Anpassen der Koeffizienten c, c' an die Anfangswerte $x(0)$ und $\dot{x}(0)$.

Stabilität. Das schwingende System (3.24) heisst *stabil*, falls keine Lösung $\vec{z}(t)$ für $t \to +\infty$ unbeschränkt wächst. Falls A diagonalisierbar ist, ist das äquivalent zu der Bedingung

$$\mathrm{Re}\,\lambda \le 0 \qquad \text{für alle } \lambda \in \Sigma(A), \tag{3.50}$$

was direkt aus der Lösung mittels Eigenschwingungen (3.46) folgt.

Das System heisst *dissipativ*, falls es eine positiv definite quadratische Form $(\cdot,\cdot)$ in $\mathbb{R}^n$ gibt, so dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(\vec{z},\vec{z}) \le 0 \tag{3.51}$$

[8] Im Fall der Bewegungsgleichung (3.28) wäre es günstiger gewesen, direkt eine exponentielle Lösung $\mathrm{e}^{\lambda t}$ anzusetzen. Dies hätte unmittelbar zur algebraischen Gleichung $m\lambda^2 = -k - r\lambda$ mit Lösungen (3.47) geführt.

[9] Die Lösung (3.49) im Fall degenerierter Eigenwerte erhält man durch geeignete Grenzwertbildung $\lambda_2 \to \lambda_1$ des undegenerierten Falls (3.48) mit den singulären Koeffizienten $c_1 = c - c'/(\lambda_2 - \lambda_1)$ und $c_2 = c'/(\lambda_2 - \lambda_1)$.

für jede Lösung $\vec{z}(t) \in \mathbb{R}^n$. Insbesondere ist das System dann stabil: $\vec{z}(t)$ ist beschränkt, da $(\vec{z}(t), \vec{z}(t)) \leq (\vec{z}(0), \vec{z}(0))$ für $t \geq 0$.

Für das Beispiel des Oszillators stellt die Gesamtenergie eine geeignete positiv definite quadratische Form bereit

$$(\vec{z}, \vec{z}) := \tfrac{1}{2} m\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2} kx^2 = E \geq 0. \tag{3.52}$$

Man rechnet leicht nach, dass die Bewegungsgleichung (3.28) impliziert, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\vec{z}, \vec{z}) = -r\dot{x}^2 \leq 0, \tag{3.53}$$

wobei $r\dot{x}^2$ die Leistung der Reibungskraft ist. Das System ist also dissipativ und damit auch stabil.

3.3 Erzwungene Schwingungen

Wir wollen nun Systeme mit externer Anregung anhand zweier Beispiele untersuchen. Wir beschränken uns dabei auf autonome Systeme, deren Spektrum einfach geartet ist, wie wir zuvor gesehen haben. Bei autonomen Systemen $\dot{\vec{z}}(t) = A\vec{z}(t) + \vec{b}(t)$ vereinfacht sich die allgemeine Lösungsformel (3.16) zu

$$\vec{z}(t) = \mathrm{e}^{A(t-s)}\, \vec{z}(s) + \int_s^t \mathrm{d}t'\, \mathrm{e}^{A(t-t')}\, \vec{b}(t'). \tag{3.54}$$

Stossanregung. Den Fall einer *Stossanregung* [10]

$$\vec{b}(t) = \delta(t - t_0)\, \vec{b}_0, \tag{3.55}$$

die momentan auf ein System im Ruhezustand $\vec{z}(s) = 0$ für $s < t_0$ wirkt, können wir allgemein lösen. Aus der Lösungsformel (3.54) ergibt sich die *Stossantwort*

$$\vec{z}(t) = \theta(t - t_0)\, P(t, t_0)\, \vec{b}_0, \tag{3.56}$$

wie man leicht durch Einsetzen in die Bewegungsgleichung bestätigen kann. Hier ist $\theta(t)$ die Stufenfunktion[11]

$$\theta(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0, \\ 1 & \text{für } t > 0. \end{cases} \tag{3.57}$$

[10] Es handelt sich bei der Diracschen delta-Funktion $\delta(t - t_0)$ zwar nicht um eine stetige Funktion (weder noch). Deshalb können wir streng genommen auch nicht von der eindeutigen Lösbarkeit der Differentialgleichung ausgehen. Nichtstetige Funktionen können aber durch stetige Funktionen approximiert werden. Zum Beispiel kann die delta-Funktion, durch eine Gauß-Funktion angenähert werden. Solche Approximationen sind physikalisch gerechtfertigt, weil auf der Grössenskala, auf der sie nicht mehr stimmen, das System gar nicht mehr durch die klassische Mechanik beschrieben werden kann, sondern die Quantenmechanik relevant ist. Für die mathematische Behandlung kann man den Formalismus im nicht-physikalischen Bereich dennoch beliebig fortsetzen.

[11] Der Wert für $\theta(0)$ ist undefiniert und er sollte keine Rolle spielen; man könnte ihn aber aus Symmetriegründen auf $^1/_2$ festlegen.

Harmonische Anregung. Als Nächstes betrachten wir eine *harmonische Anregung* für ein (komplexifiziertes) autonomes System welches durch eine externe Kraft gegeben ist, die mit einer Frequenz $\omega \in \mathbb{R}$ oszilliert[12]

$$\vec{b}(t) = \mathrm{e}^{\mathring{\imath}\omega(t-s)}\,\vec{b}_0. \tag{3.58}$$

Die Lösungsformel (3.54) ergibt hier

$$\vec{z}(t) = \mathrm{e}^{A(t-s)}\,\vec{z}(s) + \int_s^t \mathrm{d}t'\,\mathrm{e}^{t'(\mathring{\imath}\omega\,\mathrm{id}\,-A)}\,\mathrm{e}^{At}\,\mathrm{e}^{-\mathring{\imath}\omega s}\,\vec{b}_0. \tag{3.59}$$

Zur Berechnung des Integrals gibt es zwei Fälle zu unterscheiden.

Im generischen Fall ist $\mathring{\imath}\omega \notin \Sigma(A)$. Man erhält dann

$$\begin{aligned}
\vec{z}(t) &= \mathrm{e}^{A(t-s)}\,\vec{z}(s) \\
&\quad + (\mathring{\imath}\omega\,\mathrm{id}\,-A)^{-1}\big(\mathrm{e}^{(\mathring{\imath}\omega\,\mathrm{id}\,-A)t} - \mathrm{e}^{(\mathring{\imath}\omega\,\mathrm{id}\,-A)s}\big)\,\mathrm{e}^{At}\,\mathrm{e}^{-\mathring{\imath}\omega s}\,\vec{b}_0 \\
&= \mathrm{e}^{A(t-s)}\,\big[\vec{z}(s) - (\mathring{\imath}\omega\,\mathrm{id}\,-A)^{-1}\vec{b}_0\big] \\
&\quad + \mathrm{e}^{\mathring{\imath}\omega(t-s)}\,(\mathring{\imath}\omega\,\mathrm{id}\,-A)^{-1}\vec{b}_0 \\
&= \sum_{\lambda\in\Sigma(A)}\left[\mathrm{e}^{\lambda(t-s)}\,P_\lambda\vec{z}(s) + \frac{\mathrm{e}^{\mathring{\imath}\omega(t-s)} - \mathrm{e}^{\lambda(t-s)}}{\mathring{\imath}\omega-\lambda}\,P_\lambda\vec{b}_0\right].
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Die inverse Matrix $(\mathring{\imath}\omega\,\mathrm{id}\,-A)^{-1}$ existiert, da $\mathring{\imath}\omega \notin \Sigma(A)$. Falls alle Eigenwerte von A einen negativen Realteil haben, also für gedämpfte Schwingungen, nimmt der erste Term exponentiell in t ab. Für grosse t bleibt also nur noch eine Schwingung mit Frequenz ω. Dies ist die erzwungene Schwingung mit der Anregungsfrequenz ω

$$\vec{z}(t) = \mathrm{e}^{\mathring{\imath}\omega(t-s)}\,(\mathring{\imath}\omega\,\mathrm{id}\,-A)^{-1}\vec{b}_0. \tag{3.61}$$

Falls hingegen einer der Eigenwerte λ von A mit der Anregungsfrequenz übereinstimmt, $\mathring{\imath}\omega = \lambda$, verschwindet $\mathring{\imath}\omega\,\mathrm{id} - A$ in dem zugehörigen Eigenraum λ und die Inverse $(\mathring{\imath}\omega\,\mathrm{id}\,-A)^{-1}$ existiert (in diesem Eigenraum) nicht. Wir betrachten also wieder das Lösungsintegral (3.59) und projizieren direkt auf den Eigenraum von λ

$$\begin{aligned}
P_\lambda\vec{z}(t) &= \mathrm{e}^{\mathring{\imath}\omega(t-s)}\,P_\lambda\vec{z}(s) + \int_s^t \mathrm{d}t'\,P_\lambda\,\mathrm{e}^{\mathring{\imath}\omega(t-s)}\,\vec{b}_0 \\
&= \mathrm{e}^{\mathring{\imath}\omega(t-s)}\,\big(P_\lambda\vec{z}(s) + (t-s)P_\lambda\vec{b}_0\big),
\end{aligned} \tag{3.62}$$

wobei wir alle Matrizen A mittels $P_\lambda A = \mathring{\imath}\omega P_\lambda$ in Zahlen umgewandelt haben. Das Integral liefert dann einen Faktor $t-s$, und $z(t)$ nimmt in diesem Unterraum linear in t zu: Der Oszillator wird aufgeschaukelt. In der Praxis wird er natürlich nicht zu beliebig grossen Amplituden verstärkt, weil für grosse Auslenkungen die linearisierte Gleichung nicht mehr zutrifft. Für alle anderen Eigenräume lässt sich die Inverse $(\mathring{\imath}\omega\,\mathrm{id}\,-A)^{-1}$ konstruieren, und die vorige Lösung (3.60) behält ihre Gültigkeit.[13]

[12] Für externe Anregungen mit verschiedenen Frequenzen können wir die Lösung als Linearkombination der inhomogenen Anteile schreiben. Es genügt also eine einzige isolierte Frequenz zu betrachten.

[13] Man beachte, dass der Faktor $t-s$ genau dem Grenzwert $\mathring{\imath}\omega \to \lambda$ in der Spektralzerlegung in (3.60) entspricht.

Resonanz. Zusätzlich betrachten wir den Fall, in dem $\mathring{\imath}\omega$ einen komplexen Eigenwert $\lambda \in \Sigma(A)$ fast trifft, $\lambda \approx \mathring{\imath}\omega$. Für diagonalisierbare A folgt aus der Spektralzerlegung (3.43)

$$(\mathring{\imath}\omega\,\mathrm{id} - A)^{-1} = \sum_{\lambda\in\Sigma(A)} \frac{P_\lambda}{\mathring{\imath}\omega - \lambda}\,. \tag{3.63}$$

Liegt nun $\mathring{\imath}\omega$ nahe bei einem Eigenwert λ, so ist der entsprechende Term in (3.60) dominant, also lautet die erzwungene Schwingung

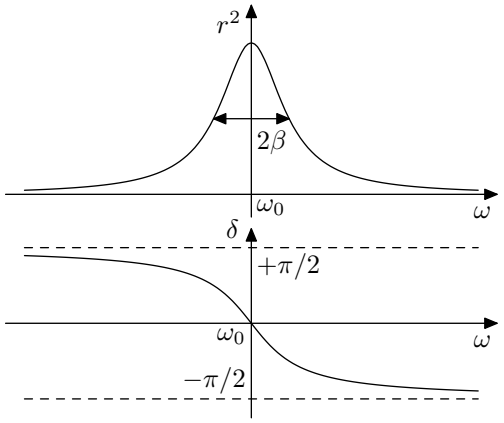
$$\vec{z}(t) \simeq \frac{\mathrm{e}^{\mathring{\imath}\omega(t-s)}}{\mathring{\imath}\omega - \lambda}\, P_\lambda \vec{b}_0 = r\,\mathrm{e}^{\mathring{\imath}(\omega t - \omega s + \delta)}\, P_\lambda \vec{b}_0. \tag{3.64}$$

Hier haben wir *Suszeptibilität* r und *Phase* δ über die Beziehung $r\,\mathrm{e}^{\mathring{\imath}\delta} := (\mathring{\imath}\omega - \lambda)^{-1}$ definiert, also

$$r = \frac{1}{\sqrt{(\omega-\omega_0)^2 + \beta^2}}\,, \qquad \delta = \arctan\frac{\omega_0 - \omega}{\beta} \tag{3.65}$$

mit *Dämpfungsparameter* $\beta := -\operatorname{Re}\lambda$ und *Eigenfrequenz* $\omega_0 := \operatorname{Im}\lambda$.

Die Suszeptibilität r und die Phase δ als Funktion von ω zeigen ein typisches *Resonanzverhalten* nahe der Eigenfrequenz ω_0.



(3.66)

Die Resonanz manifestiert sich als Maximum in der Suszeptibilität bei ω_0 (Lorentz-Form, Breit-Wigner-Verteilung) und als Phasendifferenz von π beim Passieren von ω_0. Dabei ist die Breite der Resonanz proportional zur Dämpfung β der resonanten Eigenschwingung.

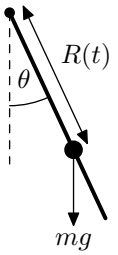
3.4 Parametrische Resonanz

Nicht nur erzwungene Schwingungen können Resonanzeffekte zeigen, sondern auch frei schwingende Systeme mit einer periodischen Zeitabhängigkeit

$$\dot{\vec{z}} = A(t)\,\vec{z}, \qquad A(t+T) = A(t). \tag{3.67}$$

Solche Systeme kommen häufig durch Linearisierung um eine periodische Lösung eines nicht linearen Problems zustande (siehe z.B. die Schwingung des Mondes senkrecht zur Ekliptik in Abschnitt 2.5).

Schaukeln. Mit einer Differentialgleichung der obigen Art kann man zum Beispiel das Schaukeln beschreiben. Beim Schaukeln verändert die schaukelnde Person periodisch den Abstand ihres Schwerpunkts zum Aufhängepunkt und schwingt sich dabei immer weiter auf.



(3.68)

Als mathematisches Modell dient uns ein Pendel der Masse m im Schwerefeld mit Beschleunigung g.[14] Die Länge des Pendels $R(t)$ wird periodisch verändert, $R(t) = R(t+T)$. Die Auslenkung $\theta(t)$ des Pendels ist der einzige dynamische Freiheitsgrad, während die Seillänge $R(t)$ von aussen bestimmt wird.

Der Drehimpulssatz sagt, dass die Zeitänderung des Drehimpulses gleich dem Drehmoment ist

$$L = mR^2\dot{\theta}, \qquad \dot{L} = -mgR\sin\theta. \tag{3.69}$$

In dieser Form geschrieben handelt es sich bereits um ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung für die Freiheitsgrade θ und L. Für kleine Auslenkungen θ, können wir das System mittels der Näherung $\sin\theta \approx \theta$ linearisieren. Die Bewegungsgleichungen nehmen dann die obige Form (3.67) an mit

$$\vec{z}(t) := \begin{pmatrix}\theta(t)\\ L(t)\end{pmatrix}, \qquad A(t) = \begin{pmatrix}0 & m^{-1}R(t)^{-2}\\ -mgR(t) & 0\end{pmatrix}. \tag{3.70}$$

Resonanz. Wir wollen verstehen, wie die Lösungen von (3.67) sich langfristig entwickeln. Dafür ist die Periodizität sehr hilfreich. Die Periodizität der Differentialgleichung $A(t+T) = A(t)$ impliziert sofort eine entsprechende Periodizität des Propagators $P(t+T, s+T) = P(t,s)$. Daraus können wir die Periodizität über mehrere Perioden wie folgt induktiv bestimmen

$$\begin{aligned} P(t+nT, s) &= P(t+nT, s+T)P(s+T, s)\\ &= P(t+(n-1)T, s)P(s+T, s)\\ &= \ldots = P(t,s)P(s+T,s)^n. \end{aligned} \tag{3.71}$$

Mit dem Propagator $P(t) := P(t,0)$ für das Zeitintervall von 0 nach t gilt demnach

$$P(nT) = P(T)^n. \tag{3.72}$$

Exponentiell wachsende Lösungen treten also dann auf, wenn $P(T)$ einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ hat mit $|\lambda| > 1$; umgekehrt sind alle Lösungen beschränkt, falls $P(T)$ diagonalisierbar ist mit Eigenwerten $|\lambda_k| \leq 1$.

[14] Wir vernachlässigen das Trägheitsmoment der schaukelnden Person und damit auch Kippbewegungen der Schaukel.

Der Propagator P und seine Eigenwerte sind meist schwierig zu bestimmen. Wir können aber die Determinante leicht berechnen, welche uns in unserem zweidimensionalen System hilft zu entscheiden, ob die Lösungen exponentiell wachsen. Für die Determinante eines Propagators $\det P(t,s)$ gilt

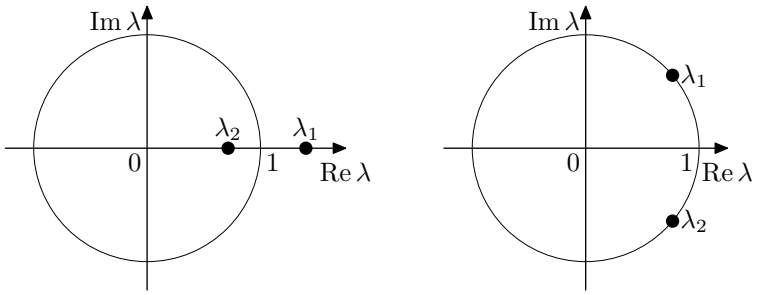
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det P(t,s) &= \operatorname{tr}\left[P(t,s)^{-1}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,P(t,s)\right]\det P(t,s)\\ &= \operatorname{tr}A(t)\det P(t,s),\end{aligned} \tag{3.73}$$

wobei wir die Formel $\mathrm{d}\det M = \operatorname{tr}(M^{-1}\,\mathrm{d}M)\det M$ zur Differenzierung einer Determinanten und die Differentialgleichung des Propagators $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t = AP$ verwendet haben. Diese Differentialgleichung lässt sich leicht lösen.

In unserem Fall gilt sogar, dass die Spur von A verschwindet, und somit

$$\det P(t) = \text{const} = \det P(0) = 1. \tag{3.74}$$

Das Produkt der beiden Eigenwerte λ_1, λ_2 ist also immer $\lambda_1\lambda_2 = 1$. Weiterhin ist $P(t)$ reell, und somit sind die Eigenwerte entweder beide reell oder ein Paar komplex konjugierter Zahlen. Im ersten Fall ist das System instabil, denn es gilt o.B.d.A. $|\lambda_2| < 1$ aber $|\lambda_1| > 1$. Im zweiten Fall hingegen ist es stabil, denn $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$.[15]



(3.75)

Die beiden Fälle können anhand der Spur des Propagators $\operatorname{tr}P(T) = \lambda_1 + \lambda_2$ unterscheiden werden. Aus dem charakteristischen Polynom von $P(T)$ folgt

$$\lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}\operatorname{tr}P(T) \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}\big[\operatorname{tr}P(T)\big]^2 - 1}\,. \tag{3.76}$$

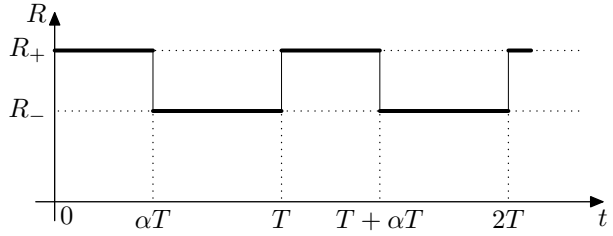
Somit gilt

$$\begin{aligned}\big|\operatorname{tr}P(T)\big| > 2 \quad &\Longrightarrow \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\\ \big|\operatorname{tr}P(T)\big| \leq 2 \quad &\Longrightarrow \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{e}^{i\mathbb{R}}\,.\end{aligned} \tag{3.77}$$

Es genügt also, die Spur des Propagators für eine Periodenlänge auszurechnen um zu entscheiden, ob eine Resonanz auftritt.

[15] Wir zählen den Grenzfall $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$ zum zweiten Fall.

Beispiel. Als Beispiel wählen wir nun die Länge $R(t)$ als Rechteckschwingung, die zwischen den beiden Werten R_- für eine Dauer αT und R_+ für eine Dauer $(1-\alpha)T$ alterniert, wobei $0 < \alpha < 1$.



(3.78)

Für die Zeitabschnitte mit konstanter Länge $R(t) = R$ entspricht das System einem ungedämpften harmonischen Oszillator mit Frequenz $\omega = \sqrt{g/R}$. Die Lösung wird auf diesen Intervallen also durch den Propagator $P(t;\omega) := \mathrm{e}^{A(\omega)t}$ beschrieben, wobei

$$A(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & \omega^4/mg^2 \\ -mg^2/\omega^2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.79}$$

Wir haben den Propagator bereits früher bestimmt, er lautet (3.34)

$$\begin{aligned} P(t;\omega) &= \cos(\omega t)\,\mathrm{id} + \frac{\sin(\omega t)}{\omega}\,A(\omega) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & m^{-1}g^{-2}\omega^3 \sin(\omega t) \\ -mg^2\omega^{-3}\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.80}$$

Mit seiner Hilfe können wir die Zeitentwicklung in den Intervallen konstanter Länge bestimmen.

Zudem müssen wir den Effekt einer instantanen Längenänderung berücksichtigen. In unserem Beispiel wird aber weder der Winkel θ noch der Drehimpuls L durch (beliebig starkes) Ziehen am Seil beeinflusst: Die Kraft ist entlang des Seils gerichtet und bewirkt somit kein Drehmoment. Die Freiheitsgrade $\theta(t)$ und $L(t)$ sind hier bereits so gewählt, dass sie selbst für eine unstetige Funktion $R(t)$ stetig bleiben.[16] Der Propagator über eine Periode T ist demnach das Produkt der Propagatoren der beiden konstanten Zeitintervalle[17]

$$P(T) = P((1-\alpha)T;\omega_-)\,P(\alpha T;\omega_+). \tag{3.81}$$

Wir wollen hier $R_\pm$ so wählen, dass die zugehörigen Frequenzen $\omega_\pm$ eine Schwingung mit mittlerer Frequenz ω ergibt

$$\omega_+ = (1-(1-\alpha)\epsilon)\omega, \qquad \omega_- = (1+\alpha\epsilon)\omega. \tag{3.82}$$

[16] Ebenso beinhalten die Bewegungsgleichungen (3.69) für $\dot\theta$ und $\dot L$ keine Ableitungen von R. Hier ist R zwar punktuell unstetig aber beschränkt, und damit ist θ zwar punktuell nicht differenzierbar aber stetig.

[17] Man kann das Problem ebenso in anderen Variablen formulieren, z.B. in $(\theta,\dot\theta)$ oder in $(x,\dot x)$ mit der Auslenkung $x = R\sin\theta \approx R\theta$. Hier muss man allerdings berücksichtigen, dass eine instantane Längenänderung zu Sprüngen in den Freiheitsgraden führt. Dies erfordert es, geeignete Übergangsmatrizen zwischen die Propagatoren einzusetzen.

Weiterhin sei die Amplitude der Rechteckschwingung klein, und wir betrachten lediglich die führenden Korrekturen in ϵ. Die relative Längenänderung beträgt dann

$$\frac{R_+}{R_-} = 1 + 2\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{3.83}$$

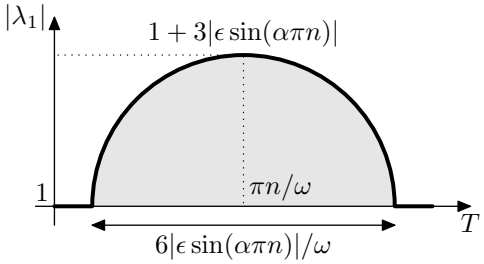
Für die Spur des Propagators ergibt sich durch Nachrechnen die Entwicklung

$$\operatorname{tr} P(T) = 2\cos(\omega T) - 9\epsilon^2 \sin(\alpha\omega T)\sin((1-\alpha)\omega T) + \mathcal{O}(\epsilon^3). \tag{3.84}$$

Hieraus wird unmittelbar ersichtlich, dass eine Resonanz nur entstehen kann, wenn der erste, dominante Term ± 2 ist, d.h. nur für halbzahlige Vielfache $T = \pi n/\omega$ der Periode des freien ungestörten Schaukelns. Setzen wir $T = \pi n/\omega + \delta$ mit $\delta \sim \epsilon$ erhalten wir die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = (-1)^n \Big(1 \pm \sqrt{9\sin^2(\alpha\pi n)\epsilon^2 - \omega^2\delta^2}\ + \ldots\Big). \tag{3.85}$$

Für den Verstärkungsfaktor $|\lambda_1|$ ergibt dies eine Halbkreisfunktion



(3.86)

Der maximale logarithmische Amplitudengewinn je Antriebsperiode ist demnach gegeben durch den Ausdruck

$$\log|\lambda_{\max}| = 3|\epsilon \sin(\alpha\pi n)| + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{3.87}$$

Weiterhin beträgt die Breite des Resonanzintervalls

$$\Delta T = 2\delta_{\max} = 6|\epsilon \sin(\alpha\pi n)|/\omega + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{3.88}$$

Natürliches Schaukeln können wir sehr grob modellieren, indem wir vom höchsten bis zum niedrigsten Punkt der Vorwärtsbewegung die Distanz des Schwerpunkts zum Aufhängepunkt vergrössern. Dies entspricht den Parametern $n = 2$ (Periodenverhältnis 1:1 des Antriebs zum Schaukeln), $\alpha = 1/4$ sowie $\epsilon = \frac{1}{2}\Delta R/R$. Hier ergibt sich ein maximaler relativer Amplitudengewinn von $3\epsilon = \frac{3}{2}\Delta R/R$ je Periode.[18]

[18] Die Breite des Resonanzintervalls ist für natürliches Schaukeln irrelevant, da dieses über Rückkopplung gesteuert ist und nicht durch eine vorgegebene Antriebsfrequenz, die über viele Perioden hinweg exakt konstant ist.

4 Starrer Körper

Ein starrer Körper ist ein System von Massepunkten, deren paarweise Abstände alle während der Bewegung konstant bleiben. Obgleich eine solche Annahme eine Idealisierung darstellt, ist das Konzept des starren Körpers sehr nützlich, und die Mechanik seiner Bewegung verdient eine ausführliche Behandlung. Das Beispiel, mit dem wir uns hauptsächlich beschäftigen werden, ist der Kreisel, bei dem ein Punkt des starren Körpers festgehalten wird.

Die Zwangsbedingungen des starren Körpers können wir dadurch implementieren, dass alle Massepunkte im Bezugssystem des Körpers ortsfest sind. Die Freiheitsgrade des starren Körpers sind dann durch den Konfigurationsraum des körperfesten Bezugssystems relativ zu einem inertialen Bezugssystem gegeben. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass dieser Konfigurationsraum sechsdimensional ist: Drei Koordinaten beschreiben die Position des Schwerpunktes, wohingegen die anderen drei Koordinaten die Ausrichtung des starren Körpers beschreiben.

4.1 Der Kreisel

Wie wir oben gesehen haben, kann man eine allgemeine Konfiguration des starren Körpers durch eine Translation und eine Drehung darstellen. Man kann daher die Bewegung eines starren Körpers in die Translationsbewegung des Schwerpunktes und eine Drehbewegung trennen. Oft interessiert einen jedoch die Situation, bei der ein Punkt des starren Körpers (nicht notwendigerweise der Schwerpunkt) festgehalten wird; in diesem Fall gibt es nur eine Drehbewegung um diesen festen Punkt und keine Translation. Ein starrer Körper, bei dem ein Punkt festgehalten wird, nennt man einen *Kreisel*.

Körperfestes Bezugssystem. Für den Fall eines Kreisels wählen wir den Ursprung des *körperfesten Bezugssystems* $\vec{y}$ so, dass $\vec{y} = 0$ den festgehaltenen Punkt beschreibt und dieser auch im Ursprung des Inertialsystems liegt. Dann gilt

$$\vec{x} = R(t)\,\vec{y}, \qquad \vec{y} = R(t)^{\mathsf{T}}\vec{x}, \tag{4.1}$$

wobei für jede Zeit t die Matrix $R(t) \in \mathrm{SO}(3)$ eine Rotation beschreibt.

Wir wollen zunächst die relevanten Grössen für die Dynamik eines Kreisels, den Drehimpuls $\vec{L}$ und das Drehmoment $\vec{M}_x$, in das körperfesten Koordinatensystem überführen. Dort bezeichnen wir diese mit $\vec{S}$ bzw. $\vec{M}_y$.

$$\vec{L} = R\,\vec{S}, \qquad \vec{M}_x = R\,\vec{M}_y. \tag{4.2}$$

Die Bewegungsgleichung des Kreisels ist der Drehimpulssatz, der besagt, dass die zeitliche Änderung des Drehimpulses das Drehmoment ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{L} = \vec{M}_x. \tag{4.3}$$

Im körperfesten Bezugssystem erhalten wir damit die Beziehung

$$\vec{M}_y = R^\intercal\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{L} = R^\intercal \dot{R}\,\vec{S} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{S}. \tag{4.4}$$

Wie bereits im Kontext beschleunigter Bezugssysteme in Abschnitt 1.6 definieren wir $\Omega := R^\intercal \dot{R}$. Der Vektor $\vec{\omega}$, der implizit über die Relation $\Omega\vec{z} = \vec{\omega}\times\vec{z}$ für alle $\vec{z}$ definiert ist, beschreibt also die Winkelgeschwindigkeit im körperfesten Koordinatensystem. Der *Drehimpulssatz* im körperfesten System lautet demnach

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{S} = \vec{M}_y - \vec{\omega}\times\vec{S}. \tag{4.5}$$

Der Drehimpuls selbst erzeugt also ein *scheinbares Drehmoment* in diesem beschleunigten Bezugssystem.

Trägheitstensor. Wir wollen nun den Drehimpuls für einen rotierenden Körper mit mit Massepunkten $\{(m_i, \vec{y}_i)\}$ berechnen. Im Inertialsystem lautet der Drehimpuls des Kreisels bezüglich des festgehaltenen Punktes $\vec{x} = 0$

$$\vec{L} = \sum_i m_i\,\vec{x}_i\times\dot{\vec{x}}_i = \sum_i m_i\,R\vec{y}_i\times\dot{R}\vec{y}_i. \tag{4.6}$$

Mittels der Beziehung $R(\vec{a}\times\vec{b}) = (R\vec{a})\times(R\vec{b})$ sowie $\dot{R}\vec{y} = R(\vec{\omega}\times\vec{y})$ beträgt der Drehimpuls $\vec{S}$ im körperfesten Bezugssystem

$$\vec{S} = \sum_i m_i\,\vec{y}_i\times(\vec{\omega}\times\vec{y}_i) = \sum_i m_i\big(\vec{\omega}\vec{y}_i^{\,2} - \vec{y}_i(\vec{\omega}\cdot\vec{y}_i)\big). \tag{4.7}$$

Er ist daher eine lineare Funktion von $\vec{\omega}$,

$$\vec{S} = I\vec{\omega}, \tag{4.8}$$

und wir definieren den *Trägheitstensor* I als die Matrix dieser linearen Beziehung

$$I := \sum_i m_i\big(\vec{y}_i^{\,2}\,\mathrm{id} - \vec{y}_i\vec{y}_i^{\,\intercal}\big), \tag{4.9}$$

bzw. in Komponenten

$$I_{jk} := \sum_i m_i\big(\vec{y}_i^{\,2}\delta_{jk} - y_{i,j}y_{i,k}\big). \tag{4.10}$$

Für kontinuierliche starre Körper mit Massendichte $\rho(\vec{y})$ ist die Summation durch eine Volumenintegration zu ersetzen

$$I = \int \mathrm{d}y^3\,\rho(\vec{y})\,\big(\vec{y}^{\,2}\,\mathrm{id} - \vec{y}\vec{y}^{\,\intercal}\big). \tag{4.11}$$

Da die Massenverteilung im körperfesten Bezugssystem fest ist, hängen die Komponenten von I_{jk} nicht von der Zeit ab; sie charakterisieren vielmehr eine intrinsische Eigenschaft des starren Körpers. Weiterhin ist der Trägheitstensor I offensichtlich eine symmetrische Matrix, $I_{jk} = I_{kj}$.

Die *kinetische Energie* des Kreisels lässt sich nun bequem durch den Trägheitstensor ausdrücken. Im Inertialsystem ist die kinetische Energie

$$T = \sum_i m_i \, \tfrac{1}{2} \dot{\vec{x}}_i^2 . \tag{4.12}$$

Da $\dot{\vec{x}} = \dot{R}\vec{y}$ und weil das Skalarprodukt unter Rotationen invariant ist, folgt

$$\begin{aligned} T &= \sum_i \tfrac{1}{2} m_i \big(\dot{R}\vec{y}_i\big)^2 = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i \big(\vec{\omega}\times\vec{y}_i\big)^2 \\ &= \sum_i \tfrac{1}{2} m_i \big(\vec{\omega}^2\vec{y}_i^{\,2} - (\vec{\omega}\cdot\vec{y}_i)^2\big) = \tfrac{1}{2}\vec{\omega}^{\mathsf{T}} I \vec{\omega}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Nun ist die kinetische Energie per Konstruktion nichtnegativ, und somit die zur symmetrischen Matrix I gehörende quadratische Form positiv-semidefinit. Sie ist positiv-definit, falls die Massenverteilung nicht entartet ist, d.h. nicht auf einer Geraden durch $\vec{y} = 0$ konzentriert ist. Im Folgenden betrachten wir den generischen Fall, für den I positiv-definit und damit auch invertierbar ist.

Hauptachsensystem. Aufgrund seiner Symmetrie besitzt der Trägheitstensor drei orthononormierte Eigenvektoren $\vec{e}_i$, $i = 1, 2, 3$ mit

$$I\,\vec{e}_i = I_i\,\vec{e}_i, \tag{4.14}$$

welche die *Hauptträgheitsachsen* genannt werden. Die zugehörigen Eigenwerte I_i sind die *Hauptträgheitsmomente*. Sie sind positiv und strikt positiv falls die Massenverteilung nicht entartet ist. Man kann sich weiterhin überlegen, dass die Summe zweier Hauptträgheitsmomente mindestens so gross wie das dritte ist

$$0 \le I_k \le I_i + I_j, \qquad \{i,j,k\} = \{1,2,3\}. \tag{4.15}$$

Wir werden meist in dem *Hauptachsensystem* arbeiten, welches durch die Hauptträgheitsachsen $\vec{e}_i$ aufgespannt wird. In diesem gilt

$$I_{jk} = I_j \delta_{jk}, \qquad S_j = I_j \omega_j, \qquad T = \sum_{j=1}^{3} \tfrac{1}{2} I_j \omega_j^2 = \sum_{j=1}^{3} \frac{S_j^2}{2I_j}\,. \tag{4.16}$$

4.2 Der freie Kreisel

Wirken keine äusseren Kräfte auf einen Kreisel, so bewegt er sich frei. Ein *freier Kreisel* ist aber auch gegeben, falls kein Drehmoment auf ihn wirkt. Das ist z.B. der Fall wenn sich der Kreisel in einem homogenen Gravitationsfeld befindet und genau im Schwerpunkt aufgehängt ist.

Eulersche Gleichungen. Für den freien Kreisel ist nach Annahme $\vec{M} = 0$. Der Drehimpulssatz (4.5) besagt dann

$$\dot{\vec{S}}(t) = -\vec{\omega}(t) \times \vec{S}(t). \tag{4.17}$$

In dem Hauptachsensystem (4.16) ergeben sich daraus die *Eulerschen Gleichungen*

$$\begin{aligned} I_1\,\dot{\omega}_1 &= (I_2 - I_3)\,\omega_2\,\omega_3, \\ I_2\,\dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1)\,\omega_3\,\omega_1, \\ I_3\,\dot{\omega}_3 &= (I_1 - I_2)\,\omega_1\,\omega_2. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Diese Gleichungen definieren ein System nicht-linearer Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Lösungen durch elliptische Funktionen darstellbar sind, die wir etwas später kurz diskutieren wollen. Damit können wir die Bewegung der Drehachse $\vec{\omega}$ im körperfesten Bezugssystem bestimmen.

Es verbleibt dann noch die relative Orientierung $R(t)$ der beiden Bezugssysteme zu berechnen. Durch $\vec{\omega}(t)$ ist auch $\Omega(t) = R^{\intercal}\dot{R}$ gegeben, und damit ist $R(t)$ durch eine lineare Differentialgleichung bestimmt

$$\dot{R}(t) = R(t)\,\Omega(t). \tag{4.19}$$

Diese können wir mit den Methoden aus Abschnitt 3.1 lösen.

Wir können nun leicht nachrechnen, dass die kinetische Energie eine Erhaltungsgrösse ist

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \sum_i I_i \omega_i\,\dot{\omega}_i \\ &= \omega_1\omega_2\omega_3\big[(I_2 - I_3) + (I_3 - I_1) + (I_1 - I_2)\big] = 0. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Ebenso ist der Betrag des Drehimpulses erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{S}^2 &= \sum_i 2I_i^2\omega_i\dot{\omega}_i \\ &= 2\omega_1\omega_2\omega_3\big[I_1(I_2 - I_3) + I_2(I_3 - I_1) + I_3(I_1 - I_2)\big] = 0. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Das heisst, dass sich $\vec{\omega}$ nur entlang einer geschlossenen eindimensionalen Trajektorie bewegen kann, die der Schnitt zweier koaxialer Ellipsoide ist. Selbiges gilt mit $\vec{S} = I\vec{\omega}$ natürlich auch für die Trajektorie des Drehimpulsvektors $\vec{S}$, wobei einer der Ellipsoide hier eine runde Sphäre ist.

Elliptische Funktionen. Wir wollen hier kurz die allgemeine Lösung der Eulerschen Gleichungen präsentieren. Sie lautet

$$\begin{aligned} \omega_1 &= c_1\,\mathrm{sn}(\lambda t + \psi; k), \\ \omega_2 &= c_2\,\mathrm{cn}(\lambda t + \psi; k), \\ \omega_3 &= c_3\,\mathrm{dn}(\lambda t + \psi; k). \end{aligned} \tag{4.22}$$

Die speziellen Funktionen sn, cn und dn heissen *Sinus*, *Cosinus* bzw. *Delta amplitudinis*. Die Koeffizienten c_i, die Frequenz λ, die Phase ψ und der *elliptische Modul* k müssen dabei drei Gleichungen erfüllen, so dass drei wählbare Anfangsbedingungen für $\vec{\omega}$ übrigbleiben.

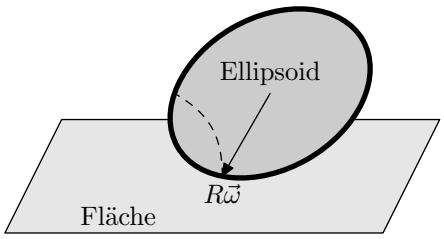
Diese *Jacobischen elliptischen Funktionen* sind eine gewisse Verallgemeinerung der trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus, die man im Grenzfall $k = 0$ erhält. Beide Klassen von Funktionen zeigen ein ähnliches Schwingungsverhalten auf der reellen Achse, die elliptischen Funktionen besitzen allerdings zwei Periodizitäten in der komplexen Ebene anstelle der alleinigen 2π-Periodizität der trigonometrischen Funktionen.[1] Das Verhältnis dieser Perioden wird durch den Modul k bestimmt. Weiterhin erfüllen sie zwei quadratische Beziehungen, die die quadratische Beziehung zwischen Sinus und Cosinus verallgemeinern

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(\psi;k)^2 + \operatorname{cn}(\psi;k)^2 &= 1, \\ k^2 \operatorname{sn}(\psi;k)^2 + \operatorname{dn}(\psi;k)^2 &= 1. \end{aligned} \tag{4.23}$$

In unserem Fall werden beide Relationen benötigt um zu garantieren, dass die kinetische Energie und der Gesamtdrehimpuls erhalten sind.

Weiterhin sind die elliptischen Funktionen und die zugehörigen elliptischen Integrale eine sehr interessante Klasse mathematischer Funktionen, die äusserst reich an diversen und teils recht komplexen Beziehungen ist, und die in vielen Problemen der theoretischen Physik auftreten.[2] [3] Wir können aber leider in diesem Kurs nicht näher auf sie eingehen. Eine einfache analytische Behandlung des Kreisels ist demnach nur in Spezialfällen möglich; wir wollen etwas später zwei davon beschreiben.

Konstruktion von Poinsot. Die Bewegungen des freien Kreisels zur Energie T und zum Drehimpuls $\vec{L}$ kann man mit der *Konstruktion von Poinsot* mittels zweier abstrakter geometrischer Objekte darstellen.



(4.24)

[1] Die zweite Periodizität lässt sich für physikalische Systeme oft so verstehen, dass man die Bewegungsgleichungen mittels einer imaginären Zeitkoordinate $t = \mathring{\imath}\tau$ schreibt. Wenn die resultierenden Gleichungen wieder Schwingungen beschreiben, gibt es demnach auch eine Periodizität in imaginärer Zeit.

[2] Das schwere Pendel $l\ddot{\theta} = -g \sin\theta$, hat als exakte Lösung $\theta(t) = 2\,\mathrm{am}(\lambda t + \psi)$ mit der elliptischen Amplitudenfunktion am, welche über die Beziehungen $\sin \mathrm{am}(\psi;k) = \mathrm{sn}(\psi;k)$ bzw. $\cos \mathrm{am}(\psi;k) = \mathrm{cn}(\psi;k)$ definiert ist.

[3] Oft werden die elliptischen Funktionen durch elliptische theta-Funktionen bzw. verwandte Weierstraß-Funktionen ausgedrückt, die nicht-triviale Periodizitäten in der komplexen Ebene aufweisen.

Wir betrachten dazu zum einen das körperfeste Trägheitsellipsoid, das durch eine quadratische Gleichung beschrieben wird

$$\vec{x}^{\mathsf{T}} R^{\mathsf{T}} I R \vec{x} = \vec{y}^{\mathsf{T}} I \vec{y} = 2T. \tag{4.25}$$

Die Lösungen der Gleichung stellen die Menge aller energetisch erlaubten Winkelgeschwindigkeiten $\vec{\omega}$ dar.[4] Zum anderen definieren wir eine raumfeste Ebene mittels

$$\vec{L}\cdot\vec{x} = \vec{S}\cdot\vec{y} = 2T. \tag{4.26}$$

Für jeden Rotationszustand R schneiden sich diese Objekte in genau einem Punkt: Sei $\vec{y}$ ein beliebiger Punkt der raumfesten Ebene. Wir rechnen dann

$$\begin{aligned} \vec{y}^{\mathsf{T}} I \vec{y} &= (\vec{y}-\vec{\omega})^{\mathsf{T}} I (\vec{y}-\vec{\omega}) + 2\vec{y}^{\mathsf{T}} I\vec{\omega} - \vec{\omega}^{\mathsf{T}} I\vec{\omega} \\ &= (\vec{y}-\vec{\omega})^{\mathsf{T}} I (\vec{y}-\vec{\omega}) + 4T - 2T \geq 2T, \end{aligned} \tag{4.27}$$

wobei Gleichheit nur für $\vec{y} = \vec{\omega}$ gilt. Die raumfeste Ebene ist daher die Tangentialebene des Trägheitsellipsoids im Punkt $\vec{y} = \vec{\omega}$. Da $\vec{\omega}$ die instantane Drehachse ist, ist der Berührungspunkt des Ellipsoids im Inertialsystem in Ruhe

$$\dot{\vec{x}} = \dot{R}\vec{y} = R(\vec{\omega}\times\vec{y}) = 0. \tag{4.28}$$

Das bedeutet, dass im Inertialsystem das Ellipsoid auf der Ebene abrollt ohne zu gleiten.

Permanente Rotationen. Eine einfache Lösung der Eulerschen Gleichungen (4.18) ist dadurch gegeben, dass der Kreisel um eine seiner Hauptachsen rotiert. O.B.d.A. nehmen wir an, dass er um die y^3-Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω^0 rotiert

$$\vec{\omega} = (0, 0, \omega_0). \tag{4.29}$$

Um die Stabilität dieser Lösung zu untersuchen, betrachten wir in linearer Näherung $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_0 + \omega_3)$, d.h. wir behalten nur lineare Terme in den kleinen Grössen $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. In dieser Approximation lauten die Eulerschen Gleichungen (4.18)

$$\begin{aligned} I_1\,\dot{\omega}_1 &= (I_2 - I_3)\,\omega_0\,\omega_2, \\ I_2\,\dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1)\,\omega_0\,\omega_1, \\ I_3\,\dot{\omega}_3 &= 0. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Die letzte Gleichung besagt, dass ω_3 konstant ist. Die beiden verbleibenden Gleichungen lauten in Matrixform

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0(I_2 - I_3)/I_1 \\ \omega_0(I_3 - I_1)/I_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}. \tag{4.31}$$

[4] Die Lösungen $\vec{x}$ bzw. $\vec{y}$ dieser Gleichung gehören zum Vektorraum der Winkelgeschwindigkeiten und tragen die Einheit s^{-1}. Wir betrachten hier einen inertialen und einen körperfesten Vektorraum, deren Koordinaten $\vec{x}$ bzw. $\vec{y}$ wie gewohnt über die Relation $\vec{y} = R\vec{x}$ in Beziehung stehen. Mann kann die Objekte auch durch Skalierung mit einer Konstanten α der Dimension m s in die entsprechenden Positionsräume überführen.

Die Eigenwerte $\pm\lambda$ der Matrix lauten

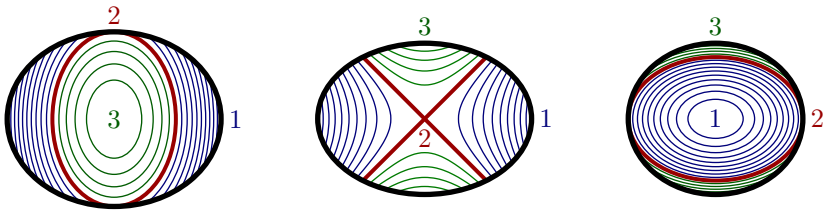
$$\lambda^2 = \frac{(I_2 - I_3)(I_3 - I_1)}{I_1 I_2}\,\omega_0^2, \tag{4.32}$$

und sie sind daher entweder beide reell oder beide rein imaginär. Der erste Fall tritt ein, falls I_3 *zwischen* I_1 und I_2 liegt. Dann hat die linearisierte Bewegungsgleichung exponentiell wachsende Lösungen, d.h. die Rotation ist instabil. In den übrigen Fällen ist $\lambda^2 < 0$, die Eigenwerte sind rein imaginär und die Lösungen beschränkt. Dies bedeutet, dass nur zwei der drei Hauptachsen stabile permanente Rotationen aufweisen, nämlich jene mit dem kleinsten und dem grössten Hauptträgheitsmoment.

Wir können dieses Resultat auch geometrisch jenseits der linearen Näherung verstehen. Wie wir oben gesehen haben, sind die kinetische Energie T und der Drehimpulsbetrag $S := \|\vec{S}\|$ erhalten. Damit ist die Trajektorie des Vektors $\vec{S}$ gegeben durch den Schnitt des Trägheitsellipsoids mit Halbachsen $\sqrt{2TI_i}$ mit der Drehimpulssphäre vom Radius S

$$T = \sum_i \frac{S_i^2}{2I_i}\,, \qquad \vec{S}^2 = \sum_i S_i^2. \tag{4.33}$$

In den folgenden Diagrammen sind die Schnittkurven bei fester Energie T für den Fall $I_1 > I_2 > I_3$ aus der Perspektive der drei Hauptachsen dargestellt.



(4.34)

Die Trajektorien in der Umgebung der Hauptachsen $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_3$ umkreisen diese, d.h. $\vec{S}$ bleibt in deren Nähe. Die Trajektorien in der Umgebung der Hauptachse $\vec{e}_2$ hingegen umkreisen in Wirklichkeit eine der beiden anderen Hauptachsen. Sie entfernen sich also zunächst von $\vec{e}_2$, kehren allerdings nach einiger Zeit wieder dorthin zurück.

Der freie symmetrische Kreisel. In dem besonderen Fall eines symmetrischen Körpers ist das Trägheitsellipsoid ein Rotationsellipsoid, d.h. zwei der drei Hauptträgheitsmomente sind gleich; o.B.d.A. sei $I_1 = I_2$. Die Eulerschen Gleichungen vereinfachen sich für den *symmetrischen Kreisel* dann zu

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= -\omega'\,\omega_2, \\ \dot{\omega}_2 &= \omega'\,\omega_1, \\ \dot{\omega}_3 &= 0 \end{aligned} \tag{4.35}$$

mit

$$\omega' := \frac{I_3 - I_1}{I_1}\,\omega_3. \tag{4.36}$$

Die letzte Gleichung impliziert, dass ω_3 konstant ist, und damit ist auch ω' konstant. Die Lösung der Differentialgleichung für ω_1 und ω_2 lautet dann

$$\omega_1(t) + \mathring{\imath}\omega_2(t) = \big(\omega_1(0) + \mathring{\imath}\omega_2(0)\big)\, \mathrm{e}^{\mathring{\imath}\omega' t}\,. \tag{4.37}$$

Der Vektor $\vec{\omega}$ dreht sich also um die Symmetrieachse des Körpers $\vec{e}_3$ mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω'.

Die gesamte Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ ist daher dem Betrag nach konstant und präzessiert um die y_3-Achse. Das passt insbesondere mit der geometrischen Beschreibung gemäss der Konstruktion von Poinsot zusammen. Die durch ω' parametrisierte Präzession erfolgt relativ zu den Körperachsen, die sich selbst mit der grösseren Frequenz $\vec{\omega}$ im Raum drehen. Das Verhältnis von ω' zu $\|\vec{\omega}\|$ ist um so kleiner, je kleiner die Differenz zwischen I_1 und I_3 ist.

Man sollte erwarten, dass die Drehachse der Erde diese Präzession ausführt, denn die von aussen auf die Erde wirkenden Drehmomente sind so schwach, dass die Rotationsbewegung als kräftefrei angesehen werden kann. Die Erde ist symmetrisch um die Polachse und an den Polen leicht abgeplattet, so dass I_1 kleiner als I_3 ist. Das numerische Verhältnis der Trägheitsmomente beträgt etwa

$$\frac{I_1 - I_3}{I_1} \approx -0.0033 \approx -\frac{1}{300}\,. \tag{4.38}$$

Die Periode der Präzessionsbewegung beträgt daher

$$T = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\omega_3}\,\frac{I_1}{I_3 - I_1} \approx 300\,\text{Tage}\,. \tag{4.39}$$

Ein Beobachter auf der Erde sollte deshalb feststellen, dass die Rotationsachse im Lauf von 10 Monaten einen Kreis um den Nordpol beschreibt. Etwas, das einem solchen Phänomen ungefähr ähnelt, ist tatsächlich beobachtet worden. Die Amplitude der Präzession ist sehr klein, die Drehachse wandert niemals mehr als etwa 4.5 m vom Nordpol weg. Die Bahn ist aber völlig unregelmässig, und die Grundperiode scheint annähernd 427 Tage und nicht 300 Tage zu sein. Die Fluktuationen werden kleinen Verschiebungen der Massenverteilung auf der Erde zugeschrieben, wie sie etwa durch atmosphärische Bewegungen hervorgerufen werden, während der Unterschied in der Periode von der Tatsache herrührt, dass die Erde nicht vollständig starr ist, sondern die elastischen Eigenschaften eines Materials wie Stahl hat.[5]

4.3 Euler-Winkel

Bislang haben wir den kräftefreien Kreisel diskutiert. Im Folgenden wollen wir den Einfluss externer Kräfte diskutieren. Da diese gerichtet sind, benötigen wir nun die

[5]Die kräftefreie Präzession der Erdachse darf nicht mit ihrer langsamen Präzession um die Normale zur Ekliptik verwechselt werden. Diese astronomische Präzession rührt von Graviationskräften der Sonne und des Mondes her, die in der obigen Diskussion als vernachlässigbar angesehen wurden. Diese Annahme ist berechtigt, da die Periode dieser astronomischen Präzession ist mit 26'000 Jahre sehr gross.

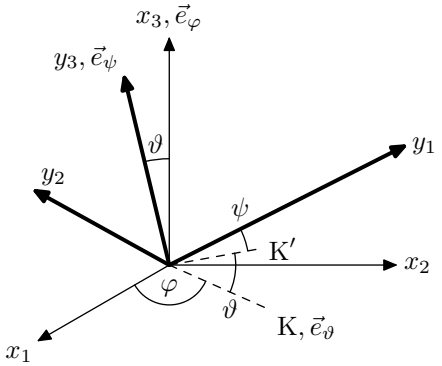
momentane Ausrichtung des starren Körpers explizit. Sie wird durch ein Element der Gruppe SO(3) beschrieben. Eine geschickte Beschreibung einer solchen Rotation ist durch die sogenannten *Euler-Winkel* gegeben, die nun diskutiert werden sollen.

Wir verbinden mit dem starren Körper ein körperfestes kartesisches Bezugssystem, dessen Koordinaten wir mit $\vec{y}$ bezeichnen, wobei $\vec{y} = 0$ einen bestimmten Punkt des starren Körpers bezeichnet, z.B. den Schwerpunkt. Dem stellen wir ein Inertialsystem mit kartesischen Koordinaten $\vec{x}$ gegenüber. Für eine reine Rotation nehmen wir an, dass der Punkt $\vec{y} = 0$ dem Punkt $\vec{x} = 0$ entspricht. Die Beziehung zwischen den Koordinaten ist demnach linear und lautet

$$\vec{x} = R\,\vec{y}, \tag{4.40}$$

wobei $R \in \mathrm{SO}(3)$ die Lage des starren Körpers angibt. Für SO(3) kann man die Euler-Winkel $(\varphi, \vartheta, \psi)$ als Koordinaten verwenden: Das körperfeste Bezugssystem geht aus dem Inertialsystem durch die Folge von drei Drehungen hervor:

- eine Drehung um die x_3-Achse mit Winkel φ,
- eine Drehung um die K-Achse mit Winkel ϑ,
- eine Drehung um die y_3-Achse mit Winkel ψ.



(4.41)

Hierbei ist die sogenannte Knotenlinie K das Bild der x_1-Achse unter der ersten Drehung. Die totale Drehung R ist dann parametrisiert durch

$$R = R(\varphi, \vartheta, \psi) = R_3(\varphi) R_1(\vartheta) R_3(\psi) \tag{4.42}$$

mit den Rotationsmatrizen

$$\begin{aligned} R_3(\varphi) &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ R_1(\vartheta) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Die entsprechende Karte von SO(3) ist das Gebiet

$$\big\{(\psi, \vartheta, \varphi); 0 \le \vartheta \le \pi,\ 0 \le \varphi, \psi < 2\pi\big\}. \tag{4.44}$$

Für die Dynamik ist es noch wichtig zu verstehen, wie sich Änderungen der Winkel auswirken. Wir bezeichnen mit den Einheitsvektoren $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_\vartheta$ und $\vec{e}_\psi$ die Drehachsen im körperfesten Bezugssystem für Änderungen der Euler-Winkel φ, ϑ bzw. ψ. Per Konstruktion sind dies die x_3-Achse, die K-Achse bzw. die y_3-Achse. Demnach ist $\vec{e}_\psi$ der Einheitsvektor in der y^3-Richtung und für die anderen Vektoren erhält man die Ausdrücke[6]

$$\begin{aligned}
\vec{e}_\psi &= \vec{e}_3, \\
\vec{e}_\vartheta &= \cos\psi\,\vec{e}_1 - \sin\psi\,\vec{e}_2, \\
\vec{e}_\varphi &= \sin\vartheta\sin\psi\,\vec{e}_1 + \sin\vartheta\cos\psi\,\vec{e}_2 + \cos\vartheta\,\vec{e}_3.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Für die resultierende Winkelgeschwindigkeit finden wir

$$\begin{aligned}
\vec{\omega} &= \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{\vartheta}\,\vec{e}_\vartheta + \dot{\psi}\,\vec{e}_\psi \\
&= \begin{pmatrix} \dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi + \dot{\vartheta}\cos\psi \\ \dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi - \dot{\vartheta}\sin\psi \\ \dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

4.4 Der schwere symmetrische Kreisel

Das andere wichtige Beispiel ist *schwere Kreisel*, d.h. der Kreisel in einem homogenen Schwerefeld. Im Folgenden betrachten wir den Fall des symmetrischen Kreisels, d.h. wir nehmen an, dass $I_1 = I_2$.[7] Dieses Problem ist vollständig integrabel.

Bewegungsgleichungen. Als Lagekoordinaten benützen wir die Euler-Winkel $(\varphi, \vartheta, \psi)$, siehe Abbildung (4.41). Aus Symmetriegründen liegt der Schwerpunkt $\vec{Y}$ auf der Symmetrieachse

$$\vec{Y} = l\vec{e}_3 = l\vec{e}_\psi, \tag{4.47}$$

wobei wir o.B.d.A. $l > 0$ wählen. Wir wählen das inertiale Bezugssystem so, dass das Schwerefeld entlang der x_3-Achse vertikal nach unten zeigt, $\vec{F}_x = -mg\vec{e}_3$. Im körperfesten Bezugssystem gilt also $\vec{F}_y = -mg\vec{e}_\varphi$, und mit der Beziehung $\vec{e}_\psi \times \vec{e}_\varphi = -\sin\vartheta\,\vec{e}_\vartheta$ beträgt das Drehmoment

$$\vec{M}_y = \vec{Y} \times \vec{F}_y = -mgl\,\vec{e}_\psi \times \vec{e}_\varphi = mgl\sin\vartheta\,\vec{e}_\vartheta. \tag{4.48}$$

Die Bewegungsgleichungen lassen sich mit $\vec{S} = I\vec{\omega}$ durch den Drehimpulssatz (4.5) ausdrücken

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{S} = \vec{M}_y - \vec{\omega} \times \vec{S}. \tag{4.49}$$

[6]Man beachte, dass $\vec{e}_\vartheta$ orthogonal zu $\vec{e}_\varphi$ und $\vec{e}_\psi$ ist, aber die letzteren beiden sind nicht orthogonal zueinander. Weiterhin spannen die drei Vektoren den gesamten Raum auf, es sein denn $\vartheta = 0, \pi$.

[7]Der symmetrische Kreisel beinhaltet als Grenzfall $I_3 = 0$ das schwere Pendel. Wir wollen hier aber davon ausgehen, dass $I_3 > 0$.

Erhaltungsgrössen. Zur Integration der Bewegungsgleichungen lohnt es sich, zunächst die Erhaltungsgrössen herzuleiten.

Das System ist offensichtlich zeitunabhängig und damit ist die Gesamtenergie erhalten

$$E = T + V. \tag{4.50}$$

Die kinetische Energie $T = \frac{1}{2}I_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2$ berechnet sich zu

$$T = \tfrac{1}{2}I_1\big(\dot\varphi^2 \sin^2\vartheta + \dot\vartheta^2\big) + \tfrac{1}{2}I_3\big(\dot\psi + \dot\varphi\cos\vartheta\big)^2. \tag{4.51}$$

Das homogene Schwerefeld ergibt die potentielle Energie

$$V = mgl\cos\vartheta. \tag{4.52}$$

Die Schwerkraft bricht zwar die Rotationssymmetrie im Raum, Rotationen in der horizontalen Ebene bleiben aber als Symmetrien erhalten. Somit ist zumindest der Drehimpuls L_3 in vertikaler Richtung erhalten. Zudem ist der Kreisel symmetrisch um die y_3-Achse, was zu der weiteren Erhaltungsgrösse S_3 führt. Wir können diese als Projektionen $S_\varphi := \vec e_\varphi\cdot\vec S = L_3$ und $S_\psi := \vec e_\psi\cdot\vec S = S_3$ des Drehimpulses auf die Vertikale $\vec e_\varphi$, bzw. auf die Symmetrieachse $\vec e_\psi$ schreiben

$$\begin{aligned} S_\varphi &= \vec e_\varphi\cdot I\vec\omega = I_1\dot\varphi\sin^2\vartheta + I_3(\dot\psi + \dot\varphi\cos\vartheta)\cos\vartheta,\\ S_\psi &= \vec e_\psi\cdot I\vec\omega = I_3(\dot\psi + \dot\varphi\cos\vartheta). \end{aligned} \tag{4.53}$$

Man kann sich mit den Relationen $\vec e_\varphi\cdot\vec e_\vartheta = \vec e_\psi\cdot\vec e_\vartheta = \dot{\vec e}_\psi = \vec e_\psi\cdot(\vec\omega\times\vec S) = 0$ sowie $\dot{\vec e}_\varphi = -\vec\omega\times\vec e_\varphi$ und dem Drehimpulssatz (4.5) leicht überzeugen, dass die obigen Grössen in der Tat erhalten sind.

Integration der Bewegungsgleichungen. Wir haben drei Erhaltungsgrössen für ein System mit drei Freiheitsgraden gefunden. Das Problem lässt sich durch Betrachtung der Erhaltungsgrössen vollständig lösen und ist damit integrabel. Aus der Drehimpulserhaltung (4.53) folgt

$$\dot\psi + \dot\varphi\cos\vartheta = \frac{S_\psi}{I_3}\,, \qquad \dot\varphi = \frac{S_\varphi - S_\psi\cos\vartheta}{I_1\sin^2\vartheta}\,. \tag{4.54}$$

Einsetzen in die Energieerhaltung (4.50) liefert

$$E' := E - \frac{S_\psi^2}{2I_3} = \frac{I_1}{2}\,\dot\vartheta^2 + \frac{(S_\varphi - S_\psi\cos\vartheta)^2}{2I_1\sin^2\vartheta} + mgl\cos\vartheta. \tag{4.55}$$

Dies ist eine Differentialgleichung erster Ordnung für die *Nutationsbewegung* $\vartheta(t)$ (Nickbewegung).

Um sie zu lösen, führen wir die Variable $u = \cos\vartheta$ ein. Mit $\dot u = -\sin\vartheta\,\dot\vartheta$ findet man dann die Differentialgleichung

$$\dot u^2 = f(u), \tag{4.56}$$

mit dem Polynom

$$f(u) := 2(\varepsilon - \gamma u)(1 - u^2) - (\alpha - \beta u)^2 \tag{4.57}$$

und der positiven Konstanten $\gamma > 0$ sowie den skalierten Erhaltungsgrössen $\varepsilon, \alpha, \beta$

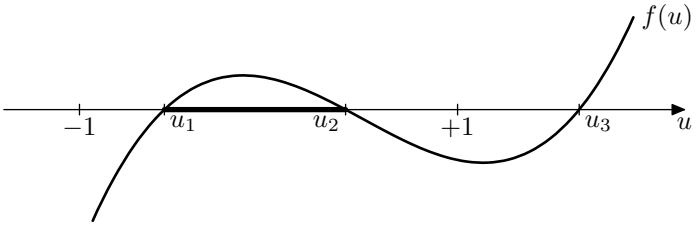
$$\gamma := \frac{mgl}{I_1}\,, \qquad \varepsilon := \frac{E'}{I_1}\,, \qquad \alpha := \frac{S_\varphi}{I_1}\,, \qquad \beta := \frac{S_\psi}{I_1}\,. \tag{4.58}$$

Man beachte, dass $u = \cos\vartheta$ nur für $u \in [-1, +1]$ definiert ist. Da die linke Seite positiv ist, $\dot{u}^2 \geq 0$, ist die allgemeine Lösung weiterhin auf das Gebiet beschränkt, für welches $f(u)$ positiv ist; dort lautet sie implizit

$$t(u) - t(u_0) = \pm \int_{u_0}^{u} \frac{\mathrm{d}u'}{\sqrt{f(u')}}\,. \tag{4.59}$$

Die Funktion $t(u)$ ist damit ein *elliptisches Integral*, dessen Umkehrfunktion eine elliptische Funktion ist. Man kann jedoch die allgemeine Natur der Bewegung verstehen, ohne das Integral tatsächlich ausführen zu müssen.

Die Funktion $f(u)$ ist ein Polynom dritten Grades. Die Wurzeln dieses kubischen Polynoms entsprechen den Winkeln, für die $\dot{\vartheta}$ sein Vorzeichen ändert, d.h. den Umkehrpunkten von $\vartheta(t)$. Für grosse u ist $2\gamma u^3$ der dominierende Term; da $\gamma > 0$, ist $f(u)$ positiv für grosse positive u und negativ für grosse negative u.



(4.60)

An den Punkten $u = \pm 1$ findet man mit $f(u) = -(\alpha \mp \beta)^2$ immer negative Werte.[8] Demnach muss mindestens eine der Wurzeln in dem Gebiet $u > 1$ liegen, das keinen reellen Winkeln entspricht. Wie wir oben gesehen haben, findet die Bewegung in dem Bereich statt, in dem $f(u)$ nichtnegativ ist, und dieses Intervall muss für ein physikalischen Kreisel in dem Bereich reeller Winkel liegen.[9] Das Polynom $f(u)$ muss also zwei Wurzeln $u_1 \leq u_2$ haben, die im Intervall $[-1, +1]$ liegen.

Seien nun u_1 und u_2 die Nullstellen von $f(u)$, also die Umkehrpunkte der Nutationsbewegung. Letztere ist damit periodisch mit der Periode

$$T_\vartheta = 2 \int_{u_1}^{u_2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{f(u)}}\,. \tag{4.61}$$

Mithilfe der Drehimpulserhaltung (4.54) kann man aus einer Lösung für $u(t) = \cos\vartheta(t)$ dann auch $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ bestimmen. Es gilt

$$\dot{\varphi} = \frac{\alpha - \beta u}{1 - u^2}\,, \qquad \dot{\psi} = \frac{I_1}{I_3}\,\beta - \frac{u(\alpha - \beta u)}{1 - u^2}\,, \tag{4.62}$$

[8] Wir schliessen zunächst den Fall aus, dass $u = \pm 1$ eine Wurzel ist.

[9] Diese Tatsache entspricht einer unteren Schranke für den Energieparameter ε.

und daher haben die Winkelgeschwindigkeiten $\dot\varphi(t)$ und $\dot\psi(t)$ *dieselbe* Periode T_ϑ. Durch Integration finden wir, dass $\varphi(t)$ in jeder Periode T_ϑ um den folgenden Betrag zunimmt

$$\Delta\varphi = 2\int_{u_1}^{u_2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{f(u)}}\,\frac{\alpha-\beta u}{1-u^2}\,. \tag{4.63}$$

Die lineare Zunahme von φ wird allerdings durch eine T_ϑ-periodische Funktion moduliert. Die mittlere Zeit für eine volle Präzession der Figurenachse um die Vertikale beträgt $2\pi T_\vartheta/\Delta\varphi$. Entsprechendes gilt auch für $\psi(t)$.

Locus der Figurenachse. Es ist üblich, die Bewegung des Kreisels zu beschreiben, indem man die Schnittkurve der Figurenachse mit der Einheitssphäre um den festgehaltenen Punkt aufträgt. Diese Kurve wird der *Locus* der Figurenachse genannt. Der Locus ist somit die Trajektorie der zwei Euler-Winkel (ϑ,φ).[10] Wie wir oben gesehen haben, verläuft der Locus zwischen den zwei begrenzenden Breitenkreisen $\vartheta_1 = \arccos u_1$ und $\vartheta_2 = \arccos u_2$. Die Gestalt der Locuskurve ist im Wesentlichen durch den Wert der Wurzel des obigen Faktors $\alpha - \beta u$ bestimmt, die wir mit u_4 bezeichnen wollen,

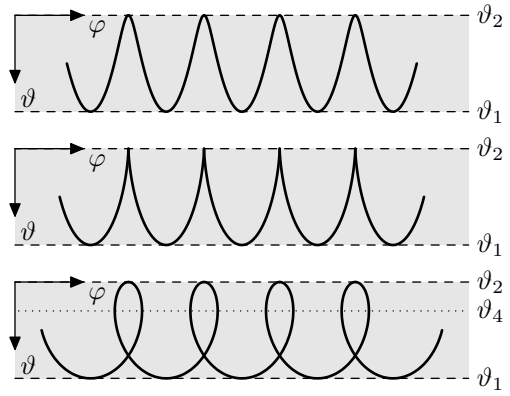
$$u_4 := \frac{\alpha}{\beta}\,. \tag{4.64}$$

Es gibt drei Fälle zu unterscheiden:

$u_4 > u_2$ (4.65)

$u_4 = u_2$ (4.66)

$u_4 < u_2$



Im Fall $u_4 > u_2$ liegt u_4 ausserhalb des physikalischen Intervalls von u_1 bis u_2. Dann wird $\dot\varphi$ per Konstruktion für die erlaubten Neigungswinkel zwischen ϑ_1 und ϑ_2 immer das gleiche Vorzeichen haben. Deshalb muss der Locus der Figurenachse die begrenzenden Kreise so berühren, dass $\dot\varphi$ die gleiche Richtung für ϑ_1 und ϑ_2 hat. Da φ monoton in der einen oder anderen Richtung anwächst, sagt man, die Achse des Kreisels *präzessiert* um die vertikale Achse. Die Präzession ist aber weniger regulär als im kräftefreien Fall, denn zusätzlich zum Umlauf schwankt die Figurenachse zwischen den Grenzwinkeln ϑ_1 und ϑ_2 hin und her; der Kreisel führt während der Präzession Nutationen aus.

Liegt hingegen u_4 zwischen u_1 und u_2, dann ist die Richtung der Präzession an den zwei Begrenzungskreisen gegensätzlich, und der Locus der Figurenachse weist

[10] Der dritte Winkel ψ beschreibt lediglich die Rotation des Kreisels um seine eigene Symmetrieachse.

Schleifen auf. Im Mittel wird $\dot{\varphi}$ jedoch im allgemeinen nicht verschwinden, so dass stets eine effektive Präzession in der einen oder anderen Richtung bleibt.

Es kann auch vorkommen, dass u_4 mit der Wurzel u_2 von $f(u)$ zusammenfällt. Am oberen Begrenzungskreis muss dann sowohl $\dot{\vartheta}$ als auch $\dot{\varphi}$ verschwinden. Dies bedeutet, dass der Locus Spitzen hat, die den Kreis berühren. Auch wenn dieser Fall singulär ist, entspricht er recht natürlichen Anfangsbedingungen: Dabei versetzt man den Kreisel um die festgehaltene Figurenachse in Drehung. Zu einem Zeitpunkt $t = 0$ überlässt man die Achse den Kräften der Gravitation, woraufhin sie beginnt, nach unten zu kippen. Explizit lauten die Anfangsbedingungen $\vartheta(0) = \vartheta_2$ sowie $\dot{\vartheta}(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$, welches genau die obigen Eigenschaften einer Spitze sind.

Der schnelle Kreisel. Für den Fall des schnellen Kreisels kann man auch quantitative Aussagen machen. Von einem *schnellen Kreisel* spricht man, falls die kinetische Energie der Rotation gross ist relativ zur maximalen Änderung der potentiellen Energie,

$$\tfrac{1}{2} I_3 \dot{\psi}^2 \gg 2mgl. \tag{4.67}$$

Die Wirkung der Gravitationsmomente, nämlich die Präzession $\dot{\varphi}$ und die sie begleitende Nutation $\dot{\vartheta}$, sind dann nur kleine Störungen der vorherrschenden Rotation $\dot{\psi}$ des Kreisels um seine Figurenachse

$$|\dot{\varphi}|, |\dot{\vartheta}| \ll |\dot{\psi}|. \tag{4.68}$$

Um diese Bewegungen konkret auszurechnen, müssen wir zunächst verstehen, wie die Parameter $\varepsilon, \gamma, \alpha, \beta$ für einen schnellen Kreisel zu wählen sind. Die erste Drehimpulsrelation (4.54) besagt in unserem Fall

$$\dot{\psi} \approx \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos\vartheta = \frac{S_\psi}{I_3} = \frac{I_1}{I_3}\, \beta, \tag{4.69}$$

Die Relation des schnellen Kreisels (4.67) impliziert dann

$$\beta^2 \gg \gamma. \tag{4.70}$$

Die zweite Drehimpulsrelation (4.54) lautet

$$\dot{\varphi} = \frac{S_\varphi - S_\psi \cos\vartheta}{I_1 \sin^2\vartheta} = \frac{\alpha - \beta u}{1 - u^2}\,. \tag{4.71}$$

Damit auch hier $|\dot{\varphi}| \ll |\dot{\psi}|$ zutrifft, muss $|\alpha - \beta u| \ll |\beta|$ für alle Zeiten gelten. Dies ist nur dann möglich, wenn u auf einen kleinen Bereich beschränkt ist,

$$u_1 = u_0 - \delta \le u \le u_0 + \delta = u_2 \tag{4.72}$$

und es gilt

$$\alpha \approx \beta u_0. \tag{4.73}$$

D.h. der schnelle Kreisel ist auf einen engen Winkelbereich um $\vartheta_0 = \arccos u_0$ eingeschränkt.[11] Wie Breite des Bereichs ist noch wählbar, und wir drücken die Konstante δ mit einem geeigneten kleinen Faktor aus

$$\delta := \frac{\gamma}{\beta^2}\,(1-u_0^2)\kappa, \tag{4.74}$$

wobei κ ein einstellbarer Parameter ist.[12] [13]

Wir haben nun das Polynom $f(u)$ durch die Werte der vier wählbaren Parameter γ, β, u_0 und κ implizit festgelegt. Wir können also prinzipiell durch Koeffizientenvergleich nach den beiden Parametern α und ε auflösen. Allerdings ist die Beziehung ein längliches quadratisches Gleichungssystem, und es gibt es zwei Lösungen.[14] Eine von ihnen ist die gesuchte Lösung mit langsamen φ, in der anderen bewegt sich φ ähnlich schnell wie ψ. Für den schnellen Kreisel mit $\beta^2 \gg \gamma$ können wir die Lösung für α und ε als Potenzreihe in γ/β^2 ausdrücken, die Entwicklung lautet dann[15]

$$\begin{aligned}\alpha &= \beta u_0 + \frac{\gamma}{\beta}\,(1-u_0^2) + \dots,\\ \varepsilon &= \gamma u_0 + \frac{\gamma^2}{2\beta^2}\,(1-u_0^2)(1+\kappa^2) + \dots.\end{aligned} \tag{4.75}$$

Wir können jetzt die Nutationsbewegung bestimmen. Sie spielt sich in dem Intervall zwischen u_1 und u_2 ab. Wir bilden dieses Intervall mittels der skalierten Variable x auf das Intervall von -1 bis $+1$ ab

$$u = u_0 + \delta\, x. \tag{4.76}$$

Das Polynom lautet dort $f(u_0+\delta\,x) \approx \beta^2\delta^2(1-x^2)$, und damit die Differentialgleichung

$$\dot{x}^2 = \beta^2(1-x^2) + \dots. \tag{4.77}$$

Diese lässt sich mit der Anfangsbedingung $x(0)=1$ leicht integrieren zu

$$x(t) = \cos(\beta t) + \dots. \tag{4.78}$$

Dies entspricht $u(t) = u_0 + \delta\cos(\beta t) + \dots$, bzw.

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 + \frac{\gamma\kappa}{\beta^2}\sin\vartheta_0\cos(\beta t) + \dots. \tag{4.79}$$

[11] Die dritte Wurzel des Polynoms $f(u)$ können wir durch Vergleich der expliziten Form (4.57) mit der faktorisierten Form $f(u) = 2\gamma(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)$ von $f(u)$ erhalten; sie ist mit $u_3 \approx \beta^2/2\gamma$ sehr gross.

[12] Der zusätzliche Faktor $(1-u_0^2)$ erweist sich später als bequem.

[13] Wir nehmen an, dass $\kappa \sim (\beta^2/\gamma)^0$ endlich ist. In den resultierenden Ausdrücken können wir aber auch κ numerisch gross oder klein wählen oder gar eine andere kleine reelle Potenz von β^2/γ ansetzen.

[14] Die Existenz einer zweiten Lösung hängt damit zusammen, dass das Polynom $f(u)$ die Symmetrien $(\alpha,\beta,\varepsilon) \to (\beta,\alpha,\varepsilon+\beta^2-\alpha^2)$ sowie $(\alpha,\beta) \to (-\alpha,-\beta)$ aufweist. Zu jedem Polynom, welches die Bewegung von ϑ beschreibt, gibt es somit vier mögliche Bahnen für φ und ψ.

[15] Diese Ausdrücke folgen durch Entwicklung der Lösung einer quadratischen Gleichung oder durch Ansatz einer Potenzreihe und Koffizientenvergleich in der quadratische Gleichung.

Die Frequenz der Nutation beträgt also

$$\omega_\vartheta = \beta + \dots . \tag{4.80}$$

Zum Vergleich schreiben wir die (mittlere) Frequenz der Rotation

$$\omega_\psi = \dot{\psi} = \frac{I_1}{I_3}\,\beta + \dots , \tag{4.81}$$

beide sind also proportional mit dem Verhältnis der Hauptträgheitsmomente als Proportionalitätsfaktor

$$\omega_\vartheta = \frac{I_3}{I_1}\,\omega_\psi . \tag{4.82}$$

Weiterhin sehen wir, dass die Amplitude der Nutation umso kleiner ist, je schneller sich der Kreisel dreht.

Zuletzt betrachten wir noch die Präzession. Die Differentialgleichung für φ lautet

$$\dot{\varphi} = \frac{\alpha - \beta u}{1-u^2} = \beta\delta\,\frac{\kappa^{-1} - \cos(\beta t)}{1-u_0^2} + \dots , \tag{4.83}$$

was wir direkt integrieren können zu

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi_0 + \frac{\beta\delta}{\kappa(1-u_0^2)}\,t - \frac{\delta}{1-u_0^2}\sin(\beta t) + \dots \\ &= \varphi_0 + \frac{\gamma}{\beta}\,t - \frac{\gamma\kappa}{\beta^2}\sin(\beta t) + \dots . \end{aligned} \tag{4.84}$$

Die Präzessionsgeschwindigkeit ist deshalb nicht konstant, sondern ändert sich harmonisch mit der Zeit. Die mittlere Präzessionsfrequenz beträgt

$$\omega_\varphi = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{mgl}{I_3\,\omega_\psi} = \frac{mgl}{I_1\,\omega_\vartheta} . \tag{4.85}$$

Sie ist also umgekehrt proportional zur Rotationsgeschwindigkeit. Die Schwankungen in der Präzession finden, wie bereits zuvor bemerkt, mit der gleichen Frequenz wie die Nutation statt. Weiterhin sind auch ihre Amplituden mit dem Faktor $\sin\vartheta_0$ proportional zueinender, und ihre Phasen um 90° zueinender verschoben.[16]

Je rascher sich der Kreisel dreht, um so kleiner ist die Nutation, um so grösser wird jedoch die Nutationsfrequenz, während die Präzession um die Vertikale langsamer wird. In der Praxis wird die Nutation eines hinreichend schnellen Kreisels durch die Reibung am Auflagepunkt gedämpft, und man kann sie nicht beobachten. Der Kreisel scheint dann gleichförmig um die vertikale Achse zu präzessieren.

[16] Wenn man die mittlere Präzession herausrechnet, beschreibt die Nutation näherungsweise einen Kreis auf der Einheitssphäre.

Gleichmässige Präzession. Es ist interessant, genau zu bestimmen, welche Anfangsbedingungen zu einer gleichmässigen Präzession mit konstantem $\dot{\varphi}$ führen. Dies ist genau dann der Fall, falls der Winkel $\vartheta(t) = \vartheta_0$ konstant ist. Dieser Fall lässt sich leicht durch direkten Ansatz lösen. Man erhält dann aus den Bewegungsgleichungen eine Beziehung zwischen Rotationsfrequenz ω_ψ, Präzessionsfrequenz ω_φ und Winkel ϑ_0

$$I_3\omega_\varphi(\omega_\psi + \omega_\varphi \cos\vartheta_0) - I_1\omega_\varphi^2 \cos\vartheta_0 - mgl = 0. \tag{4.86}$$

Selbige Relation können wir aber auch aus der obigen Behandlung mittels des Polynom $f(u)$ in (4.57) herleiten. Dort müssen die beiden Wurzeln u_1 und u_2 zusammenfallen; dann ist $u = u_0$ auch eine Nullstelle von $f'(u)$,

$$2\gamma(1 - u_0^2) + 4(\varepsilon - \gamma u_0)u_0 - 2\beta(\alpha - \beta u_0) = 0. \tag{4.87}$$

Ausserdem gilt natürlich auch $f(u_0) = 0$,

$$2(\varepsilon - \gamma u_0) = \frac{(\alpha - \beta u_0)^2}{1 - u_0^2} \tag{4.88}$$

und daher folgt

$$\frac{\gamma}{u_0} - \frac{\beta}{u_0}\,\frac{\alpha - \beta u_0}{1 - u_0^2} + \left(\frac{\alpha - \beta u_0}{1 - u_0^2}\right)^2 = \frac{\gamma}{u_0} - \frac{\beta}{u_0}\,\omega_\varphi + \omega_\varphi^2 = 0. \tag{4.89}$$

Dies ist dieselbe Bedingung wie oben.

Für gegebene ω_ψ und ϑ_0 gibt es zwei Lösungen für ω_φ,

$$\omega_\varphi = -\,\frac{I_3\omega_\psi}{(I_3 - I_1)\cos\vartheta_0}\left[\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{(I_3 - I_1)mgl\cos\vartheta_0}{I_3^2\omega_\psi^2}}\right], \tag{4.90}$$

die man die /Präzession!langsam]schnelle und die /Präzession!schnell]langsame Präzession nennt. Hier ist offensichtlich $\omega_\varphi = 0$ nur dann eine Lösung, falls die Rotationsfrequenz $\omega_\psi \to \infty$ unendlich wird. Um eine gleichförmige Präzession ohne Nutation zu erhalten, müssen wir also zu Beginn dem Kreisel einen geeigneten horizontalen Stoss geben. Weiterhin erhält man für den schnellen Kreisel mit langsamer Präzession die bekannte inverse Relation $\omega_\varphi = mgl/I_3\omega_\psi$.

Aufrechte Anfangsbedingungen. Ein weiterer interessanter Spezialfall tritt auf, falls $u = 1$ eine der Wurzeln von $f(u)$ ist. Nehmen wir also an, der rotierende Kreisel sei am Anfang vertikal aufgestellt, $\vartheta_0 = 0$. Dann ist natürlich $S_\varphi = S_\psi$ da am Anfang die Vertikale mit der Figurenachse übereinstimmt, und daher $\alpha = \beta$. In diesem Fall ist $u = 1$ eine Wurzel von $f(u)$. Da weiterhin am Anfang $\dot{\vartheta} = 0$, gilt ausserdem $E' = mgl$, und daher auch $\varepsilon = \gamma$,

$$\varepsilon = \gamma = \frac{mgl}{I_1}\,, \qquad \alpha = \beta = \frac{S_\psi}{I_1}\,. \tag{4.91}$$

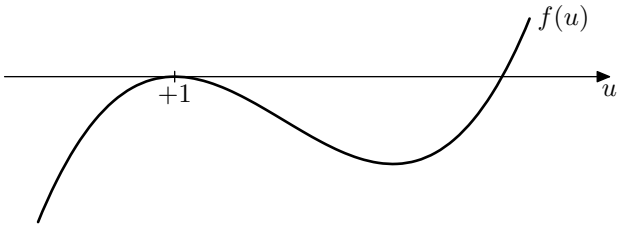
In diesem Fall hat $f(u)$ die faktorisierte Form

$$f(u) = (1-u)^2\big(2\gamma(1+u) - \beta^2\big), \tag{4.92}$$

und $u = 1$ ist eine doppelte Wurzel. Die dritte Wurzel ist gegeben durch

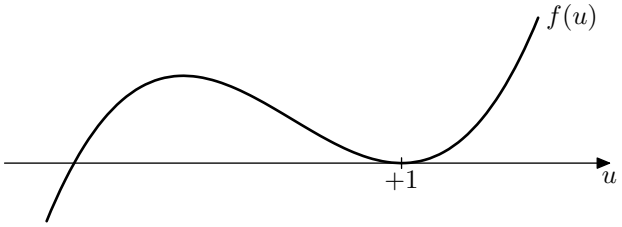
$$u_3 = \frac{\beta^2}{2\gamma} - 1. \tag{4.93}$$

Falls $\beta^2 > 4\gamma$, dies entspricht der Bedingung für einen recht schnellen Kreisel, ist $u_3 > 1$ und die Achse kann sich nicht von $u = 1$ entfernen: In diesem Fall dreht sich der Kreisel lediglich um seine Vertikale.



(4.94)

Wenn andererseits $\beta^2 < 4\gamma$ ist, dann ist $u_3 < 1$, und $f(u)$ ist nichtnegativ in dem Bereich $u_3 \le u \le 1$. Der Kreisel nutiert dann zwischen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \vartheta_3$.



(4.95)

Es gibt also eine kritische Winkelgeschwindigkeit ω',

$$\omega' = \frac{2}{I_3}\sqrt{mglI_1}, \tag{4.96}$$

oberhalb der nur eine vertikale Bewegung möglich ist. Wenn die Drehachse des rotierenden Kreisels anfangs vertikal steht und er sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_3 > \omega'$ dreht, so wird er sich in der Praxis für eine Weile weiter nur um die Vertikale drehen (*schlafender Kreisel*). Durch Reibung wird die Frequenz der Rotation jedoch allmählich unter den kritischen Wert gebracht, und der Kreisel beginnt dann in immer grösserem Masse zu taumeln, während er langsamer wird.

Teil II

Relativitätstheorie

5 Spezielle Relativitätstheorie

Die spezielle Relativitätstheorie (SRT) ist eine physikalische Theorie über die Bewegung von Körpern und Feldern in Raum und Zeit. Sie wurde von Einstein im Jahr 1905 veröffentlicht und erweitert das Galileische Relativitätsprinzip zum speziellen Relativitätsprinzip.

5.1 Die Spezielle Relativitätstheorie

Die Ursprünge der speziellen Relativitätstheorie liegen in der Elektrodynamik. Man kann sogar sagen, dass die Entwicklung der Maxwell-Gleichungen mit ihrer Vereinigung von Elektrizität, Magnetismus und Optik uns gleichermassen die spezielle Relativitätstheorie aufgezwungen hat. Wichtige Pioniere dieser Entwicklung waren Lorentz und Poincaré, aber es war Einstein, der die Verallgemeinerung des zu Grunde liegenden Prinzips auf alle Phänomene der Physik erkannte und die weitreichenden Konsequenzen des zweiten Postulats verstand.

Das Gesetz der Lichtausbreitung. Aus den Maxwell-Gleichungen folgt, dass sich ein Lichtsignal mit einer festen Geschwindigkeit c isotrop in alle Raumrichtungen ausbreitet. Das *Gesetz der Lichtausbreitung* besagt somit, dass die Ereignisse $(t_1, \vec{x}_1)$ und $(t_2, \vec{x}_2)$ der Erzeugung und des Empfangs eines Lichtsignals (auf direktem Weg) wie folgt in Beziehung stehen

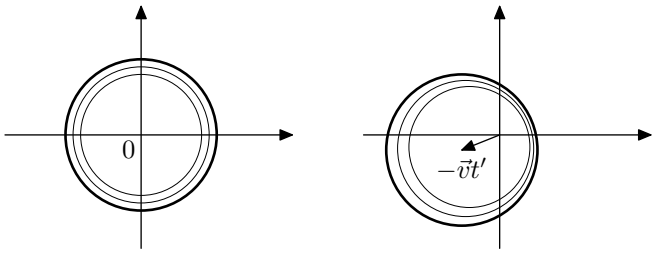
$$\big\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\big\| = c(t_2 - t_1). \tag{5.1}$$

Dieses Gesetz erscheint zwar plausibel, ist aber im Konflikt mit dem Galileischen Relativitätsprinzip als einem der grundlegenden Postulate der Mechanik: Es ist zwar invariant unter Euklidischen Transformationen, aber nicht unter den speziellen Galilei-Transformationen, die zwei relativ zueinander bewegte Bezugssysteme verknüpft. Zum Beispiel beschreibt $\|\vec{x}\| = ct$ die Front einer vom Ursprung $(0, \vec{0})$ ausgehenden Lichtwelle. Unter der speziellen Galilei-Transformation

$$t' = t, \qquad \vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t \tag{5.2}$$

behält das auslösende Ereignis die Koordinaten $(0, \vec{0})$, aber die Wellenfront zur

Zeit $t = t'$ wird zur Kugel $\|\vec{x}' + \vec{v}t'\| = ct'$ mit Zentrum $-\vec{v}t'$:



(5.3)

Dieser Effekt wäre natürlich nicht nur für Licht zu erwarten, sondern für jede Art von Welle. Im Fall mechanischer Wellen irritiert uns der Umstand nicht weiter, dass die Wellenausbreitung nicht Galilei-invariant ist, denn Wellen breiten sich typischerweise in einem *Medium* aus. Zum Beispiel propagieren Wasserwellen im Wasser, und das einfache Gesetz der Wellenausbreitung gilt nur in dem Bezugssystem, in dem das Medium ruht. Es war daher natürlich zu postulieren, dass auch das Licht in einem Medium propagiert, das man den *Äther* nannte. Nach allem, was man über Licht wusste, müsste der Äther überall sein; er müsste vernachlässigbare Dichte haben und vernachlässigbare Wechselwirkungen mit der übrigen Materie besitzen.

Diese *Ätherhypothese* würde insbesondere implizieren, dass sich die Elektrodynamik in wesentlicher Weise von der Mechanik unterscheidet: Es wird ein bevorzugtes Bezugssystem benötigt, in dem der Äther ruht, und in dem daher das Gesetz der Lichtausbreitung (5.1) gilt. Diese Hypothese ist jedoch unbefriedigend, da die einzige Rolle des Äthers darin bestünde, als Medium für elektromagnetische Wellen zu fungieren und das Galileische Relativitätsprinzip formal zu erfüllen.

Die Postulate von Einstein. Versuche, die Bewegung der Erde oder bewegter Bezugssysteme relativ zum Äther zu messen (insbesondere das Michelson-Morley-Experiment) schlugen fehl. Lorentz erklärte dieses *Nullexperiment*, indem er postulierte, dass Objekte, die sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ relativ zum Äther bewegen, in der Richtung ihrer Bewegung kürzer erscheinen, und zwar gerade mit der scheinbaren Länge

$$L(\vec{v}) = L_0\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}\,. \tag{5.4}$$

Weiterhin zeigten er und Poincaré, dass die Maxwell-Gleichungen unter den Transformationen invariant sind, die wir heute die *Lorentz-Transformationen* nennen. Wir werden sie in Kürze definieren.

Einstein erkannte, dass die Ätherhypothese grundsätzlich unbefriedigend war, und dass das Problem darin lag, die Forminvarianz der Gleichungen der Physik unter Galilei-Transformationen zu fordern. Er schlug vor, dass alle physikalischen Gesetze den folgenden *zwei Postulaten der speziellen Relativitätstheorie* genügen müssen:

Das *spezielle Relativitätsprinzip* fordert analog zum Galileischen Relativitätsprinzip, siehe Abschnitt 1.4, dass Naturgesetze in allen

Inertialsystemen die gleiche Form haben. Zwei Inertialsysteme können sich dabei mit konstanter Geschwindigkeit relativ zueinander bewegen, die Transformation zwischen ihnen wird allerdings nicht durch Galilei-Transformationen beschrieben.

Als Ersatz für die Festlegung auf Galilei-Transformationen wird die *Konstanz der Lichtgeschwindigkeit* gefordert. Die Lichtgeschwindigkeit ist unabhängig von der Geschwindigkeit ihrer Quelle, d.h. Licht hat dieselbe Geschwindigkeit in allen Inertialsystemen.

Wie wir später sehen werden, implizieren diese Postulate auch, dass die Gesetze der klassischen Mechanik modifiziert werden müssen. Als Einstein diese Postulate aufstellte, gab es dafür noch keine experimentellen Beweise; inzwischen sind diese Postulate jedoch in vielfältiger Weise experimentell überprüft worden, und es gibt keine Evidenz dafür, dass sie falsch sein könnten.

5.2 Lorentz- und Poincaré-Gruppe

Das zweite Postulat von Einstein behauptet, dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen gleich ist. Insbesondere impliziert dies, dass die relevanten Transformationen, unter denen die Naturgesetze invariant sind, nicht die Galilei-Transformationen sein können. Wir wollen nun die Struktur solcher Transformationen aus den Postulaten von Einstein ableiten.

Wir betrachten dazu zwei inertiale Koordinatensysteme, deren Ereignis-Koordinaten wir mit den Vektoren $X = (t, x, y, z)$ bzw. $\bar{X} = (\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ bezeichnen. Der Einfachheit halber nehmen wir zunächst an, dass der Ursprung der beiden Koordinatensysteme $X = \bar{X} = 0$ dasselbe Ereignis bezeichnet.

Aus dem ersten Postulat können wir folgern, dass die Transformation zwischen X und $\bar{X}$ linear ist: Ein kraftfreies Teilchen bewegt sich in einem Inertialsystem mit konstanter Geschwindigkeit, d.h. seine Bahnkurve $X(\mathbb{R})$ wird durch eine Gerade im Ereignisraum $\mathbb{R}^4$ dargestellt. Wegen des ersten Postulats gilt selbiges aber auch für die Bahnkurve $\bar{X}(\mathbb{R})$ im zweiten Inertialsystem. Dies impliziert, dass die Koordinatentransformation linear sein muss, d.h.

$$\bar{X} = A\,X, \tag{5.5}$$

mit einer (4×4)-Matrix A.

Bezüglich des zweiten Postulats nehmen wir an, dass eine Lichtquelle, zu dem Ereignis $X = \bar{X} = 0$ einen Lichtblitz aussendet. Dieser Lichtblitz wird sich in beiden Inertialssystemen mit derselben Geschwindigkeit c ausbreiten. Im ersten Koordinatensystem erreicht der Lichtblitz daher den Punkt (x, y, z) zur Zeit t, wobei letztere bestimmt ist durch

$$-c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0. \tag{5.6}$$

Die Menge der Punkte, die diese Gleichung erfüllen, wird der *Lichtkegel* (des Ereignises bei $X = 0$) genannt. Entsprechend erreicht der Lichtblitz den Punkt

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ des zweiten Koordinatensystems zur Zeit $\bar{t}$, wobei gilt

$$-c^2\bar{t}^2 + \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = 0. \tag{5.7}$$

Die Transformation, die die Koordinaten (t, x, y, z) auf $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ abbildet, muss daher die beiden obigen Lichtkegel als Mengen aufeinander abbilden.

Um die Lichtkegel bequemer zu beschreiben, führen wir eine symmetrische Matrix E ein

$$E = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

Die Punkte, die auf dem Lichtkegel (5.6) liegen, erfüllen dann die Bedingung

$$X^\intercal \, E \, X = 0. \tag{5.9}$$

Entsprechend ist der Lichtkegel im zweiten System bestimmt durch

$$\bar{X}^\intercal \, E \, \bar{X} = 0. \tag{5.10}$$

Setzen wir dann die lineare Transformation A ein, so lautet die Invarianz des Lichtkegels

$$X^\intercal E X = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X^\intercal A^\intercal E A X = 0. \tag{5.11}$$

Da die erste Gleichung für eine hinreichende Anzahl linear unabhängiger Vektoren X zutrifft, kann man sehen, dass der Lichtkegel nur erhalten sein kann, falls

$$A^\intercal E A = \alpha E, \tag{5.12}$$

mit einem Faktor $\alpha \neq 0$.

Unter diesen Transformationen befinden sich auch Transformationen, die lediglich den Raum und die Zeit simultan skalieren

$$A = \kappa \, \mathrm{id}, \qquad (\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \kappa(t, x, y, z). \tag{5.13}$$

Es ist aber leicht zu sehen, dass die Gesetze der Mechanik nur für $\kappa = 1$ und ggf. für $\kappa = -1$ forminvariant sind. Um die denkbaren Faktoren α einzuschränken, betrachten wir die Zerlegung $A = \lambda L$ mit einer Zahl $\lambda > 0$, wobei die Matrix L die obige Gleichung mit $\alpha = 1$ erfüllt

$$L^\intercal E L = E. \tag{5.14}$$

Man kann sich nun überlegen, dass die Gruppe der Matrizen A das direkte Produkt der Gruppe der Matrizen L mit der Gruppe der positiven Faktoren λ ist. Weiterhin kann man sich überlegen, dass man Elemente der Form $\kappa \, \mathrm{id}$ mit $\kappa \neq \pm 1$ nur ausschliessen kann, indem man allgemein $\lambda = 1$ fordert. Somit ist die Menge der (4×4)-Matrizen L, die die Gleichung $L^\intercal E L = E$ lösen, die gesuchte Gruppe. Sie wird die *Lorentz-Gruppe* L genannt, ihre Elemente heissen *Lorentz-Transformationen*

$$\bar{X} = LX. \tag{5.15}$$

Es gibt 6 unabhängige kontinuierliche Lorentz-Transformationen: Davon entsprechen 3 den üblichen räumlichen Rotationen des Inertialsystems. Die verbleibenden 3 Transformationen werden spezielle Lorentz-Transformationen oder auch *Lorentz-Boost* genannt. Sie beschreiben die Transformationen zwischen Bezugssystemen, die sich mit konstanter Relativgeschwindigkeit bewegen und verallgemeinern damit die entsprechenden speziellen Galilei-Transformationen. Wir werden sie später genauer untersuchen.

Schliesslich können wir noch die Einschränkung aufgeben, dass das Ereignis im Ursprung $X = \bar{X} = 0$ der Koordinatensysteme übereinstimmt. Dies erlaubt zusätzlich Translationen in Raum und Zeit

$$\bar{X} = LX + B, \tag{5.16}$$

wobei $B \in \mathbb{R}^4$ der Vektor der Verschiebung ist. Die Erweiterung erfüllt offensichtlich beide der Einsteinschen Postulate. Die Gruppe dieser Transformationen wird die *Poincaré-Gruppe* genannt. Wie die Galilei-Gruppe besteht sie aus 10 unabhängigen kontinuierlichen Transformationen.

5.3 Geometrie der Raumzeit

In der Relativitätstheorie hat sich die sogenannte Vierer-Notation etabliert, die wir im Folgenden einführen, um die Geometrie der Raumzeit zu beschreiben.

Minkowski-Raum. Wie wir später im Detail sehen werden, mischen die Poincaré-Transformationen die Raum- und Zeitkoordinaten mit den allgemeinen Abhängigkeiten

$$\bar{t} = \bar{t}(t, \vec{x}), \qquad \vec{\bar{x}} = \vec{\bar{x}}(t, \vec{x}). \tag{5.17}$$

Im Unterschied dazu sind die Galilei-Transformationen beschränkt auf die Abhängigkeit $\bar{t} = \bar{t}(t)$, die der Zeit eine absolute Bedeutung zuordnen. Die Zeitkoordinate ist aber in der Relativitätstheorie nicht besonders ausgezeichnet, und es ist sinnvoll, den dreidimensionalen Raum und die Zeitachse zu der vierdimensionalen *Raumzeit* als geometrisches Konzept zu vereinigen.

In der Raumzeit kombinieren wir den Ort $\vec{x}$ und die Zeit t eines Ereignis in einem vierdimensionalen Vektor. Anders als in dem oben verwendeten Vektor X skalieren wir die Zeitkomponente x^0 aber mit der Konstanten c, damit alle vier Komponenten des Vektors x die Einheit einer Länge tragen und damit gleichberechtigt sind

$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3) := (ct, \vec{x}). \tag{5.18}$$

Ein solcher *Vierer-Vektor* x bezeichnet ein Ereignis als Punkt in der Raumzeit. Oft wird er durch seine Komponenten x^μ ausgedrückt, wobei der Index μ meist mit einem kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet wird, und die Werte

$\mu = 0, 1, 2, 3$ annimmt. Dabei ist die nullte Komponente die Zeit $x^0 = ct$ multipliziert mit der konstanten Lichtgeschwindigkeit.[1]

Eine zentrale Struktur in der speziellen Relativitätstheorie ist die *Minkowski-Metrik* $\eta_{\mu\nu}$. Sie ist eine konstante, symmetrische Matrix

$$\eta_{\mu\nu} := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}. \tag{5.19}$$

Der vierdimensionale reelle Vektorraum mit der Metrik η wird üblicherweise *Minkowski-Raum* genannt. Aufgrund der Signatur der Metrik wird er mit $\mathbb{R}^{3,1}$ bezeichnet. Die Punkte, die auf dem Lichtkegel (5.6) zum Koordinatenursprung liegen, erfüllen dann die Bedingung

$$x^\intercal \, \eta \, x = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} \, x^\mu \, x^\nu = 0. \tag{5.20}$$

Die oben hergeleiteten Poincaré-Transformationen zwischen Inertialsystemen haben die Form

$$\bar{x} = \Lambda \, x + b \qquad \text{bzw.} \qquad \bar{x}^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu{}_\nu \, x^\nu + b^\mu, \tag{5.21}$$

wobei der Vierer-Vektor b die Translationen in Zeit und Raum beschreibt und die Vierer-Matrix Λ eine Lorentz-Transformation ist mit

$$\Lambda^\intercal \eta \Lambda = \eta \qquad \text{bzw.} \qquad \eta_{\mu\nu} = \sum_{\rho,\sigma=0}^{3} \Lambda^\rho{}_\mu \, \Lambda^\sigma{}_\nu \, \eta_{\rho\sigma}. \tag{5.22}$$

Diese Gleichung drückt aus, dass die Minkowski-Metrik η invariant unter Lorentz-Transformationen ist, d.h. $\bar{\eta} = \eta$ mit der transformierten Minkowski-Metrik $\bar{\eta} := (\Lambda^{-1})^\intercal \eta \Lambda^{-1}$.

Mit der Minkowski-Metrik können wir nun ein *Skalarprodukt* $x{\cdot}y$ für zwei Vierer-Vektoren x und y definieren durch

$$x{\cdot}y := x^\intercal \eta y = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} \, x^\mu \, y^\nu. \tag{5.23}$$

Per Konstruktion ist es invariant unter Lorentz-Transformationen. Die Gleichung des obigen Lichtkegels lässt sich damit kurz schreiben als $x{\cdot}x = 0$. Drückt man das Skalarprodukt in Orts- und Zeitkoordinaten aus, so ergibt sich

$$(ct, \vec{x}){\cdot}(cs, \vec{y}) = -c^2 ts + \vec{x}{\cdot}\vec{y}. \tag{5.24}$$

[1] In weiterführenden Behandlungen der Relativitiätstheorie wird aus Gründen der Bequemlichkeit und Übersichtlichkeit oft die Lichtgeschwindigkeit auf $c = 1$ gesetzt. Dies stellt keine Einschränkung dar, weil man durch Vergleich der Einheiten immer die zusätzlich benötigten Potenzen von c reproduzieren kann.

Insofern verallgemeinert dieses Skalarprodukt das Skalarprodukt des Euklidischen Raums.

Wie wir gesehen haben, beinhalten viele Ausdrücke eine Summe $\sum_{\mu=0}^{3}$ über einen Index μ. Eine solche Summe stammt meist aus der Matrixmultiplikation einer Zeile mit einer Spalte und sie tritt praktisch immer dann auf, wenn ein Term denselben Index μ sowohl in oberer als auch in unterer Position aufweist. Zum Vereinfachung der Ausdrücke hat sich hier die (Einsteinsche) *Summenkonvention* etabliert, die es erlaubt, ein solches Summationssymbol auszulassen. So schreibt man i.A. ein Skalarprodukt als[2]

$$\eta_{\mu\nu}x^\mu y^\nu := \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu}x^\mu y^\nu = x{\cdot}y. \tag{5.25}$$

Für die Poincaré-Transformation können wir kurz schreiben

$$\bar{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu := \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu = (Ax+b)^\mu. \tag{5.26}$$

Weiterhin können wir die Spur einer Matrix A mit Komponenten $A^\mu{}_\nu$ schreiben als

$$A^\mu{}_\mu := \sum_{\mu=0}^{3} A^\mu{}_\mu = \operatorname{Tr} A. \tag{5.27}$$

Schliesslich soll noch erwähnt werden, dass es zwei gebräuchliche Konventionen für die Vorzeichen der Minkowski-Metrik η und damit für das Skalarprodukt $x{\cdot}y$ gibt. Die alternative Konvention lautet

$$\eta'_{\mu\nu} := \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5.28}$$

Diese Konvention wird grösstenteils negative bzw. $(+---)$-Signatur genannt. Hier ändern sich alle Vorzeichen im Skalarprodukt

$$\eta'_{\mu\nu}(ct,\vec{x})^\mu(cs,\vec{y})^\nu = c^2ts - \vec{x}{\cdot}\vec{y}. \tag{5.29}$$

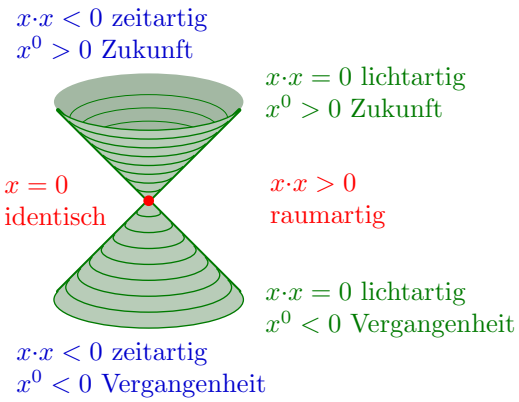
Wir verwenden hingegen die grösstenteils positive bzw. $(-+++)$-Signatur. Beide Konventionen beschreiben offensichtlich die gleiche Physik, sie unterscheiden sich lediglich in den geeigneten Vorzeichen für gewisse Ausdrücke und Grössen. Beide Konventionen haben Vor- und Nachteile. Die $(+---)$-Signatur eignet sich vor allem für Betrachtungen von Teilchen, deren Bahnen grösstenteils entlang der Zeitachse ausgerichtet sind. Die $(-+++)$-Signatur ist hingegen für geometrische Betrachtungen von Vorteil. In Anbetracht der Tatsache, dass es drei Raumkoordinaten und eine Zeitkoordinate gibt, entspricht die $(-+++)$-Signatur der demokratischen Wahl.

[2]Nein, diese Definition ist nicht iterativ zu behandeln: Ein explizites Summationssymbol unterdrückt die Summenkonvention in diesem Index.

Kausale Struktur. Der Minkowski-Raum besitzt eine *kausale Struktur*, welche beschreibt, wie zwei Ereignisse x_1 und x_2 sich möglicherweise gegenseitig beeinflussen können. Sei $x := x_2 - x_1$ der Abstandsvektor der Ereignisse. Anhand des Skalarprodukts des Abstandsvektors mit sich selbst

$$x{\cdot}x = -c^2t^2 + \vec{x}^2 \tag{5.30}$$

können wir drei Fälle unterscheiden, wie die Ereignisse zueinander stehen. Diese Fälle sind per Konstruktion stabil unter Poincaré-Transformationen, da das Skalarprodukt invariant ist.



(5.31)

Im Fall

$$x{\cdot}x < 0 \tag{5.32}$$

dominiert der zeitliche Abstand. Der Vektor x wird *zeitartig* genannt. In der Abbildung liegt ein zeitartiger Vektor x innerhalb einer der beiden Lichtkegelkomponenten. Die beiden Bereiche der Raumzeit sind allerdings nicht verbunden, und man unterscheidet deshalb zwischen zwei weiteren Fällen: Für $x^0 = ct > 0$ wird der Vektor *zukünftig* genannt; für $x^0 = ct < 0$ nennt man ihn in *vergangenheitsbezogen*.

Im Fall

$$x{\cdot}x = 0 \tag{5.33}$$

ist der räumliche und zeitliche Abstand ausgeglichen und der Vektor heisst *lichtartig*. In der Abbildung liegt er auf dem Lichtkegel, und man kann anhand von $x^0 = ct$ wieder zukünftige und vergangenheitsbezogene lichtartige Vektoren unterscheiden. Zudem gibt es den dritten Spezialfall $x = 0$, für den die beiden Ereignisse x_1, x_2 identisch sind.

Im verbleibenden Fall

$$x{\cdot}x > 0 \tag{5.34}$$

dominiert der räumliche Abstand und der Vektor wird *raumartig* genannt. Interessanterweise gibt es hier keine weitere Fallunterscheidung, denn der Bereich der Raumzeit ausserhalb des Lichtkegels ist verbunden. Insbesondere unterscheidet man in der Relativitätstheorie bei raumartigen Vektoren nicht zwischen Zukunft, Vergangenheit und Gegenwart! Wie wir sehen werden, kann man das Vorzeichen

von $x^0 = ct$ durch Lorentz-Transformationen beliebig ändern, und damit gibt es hier keine universell gültige Definition dieser Konzepte.

Die *Zukunft* stellt somit den Bereich der Raumzeit dar, der von der positiven Komponente des Lichtskegels begrenzt ist, d.h. durch

$$x{\cdot}x \leq 0 \qquad \text{und} \qquad x^0 = ct > 0. \tag{5.35}$$

Ein Ereignis x_1 kann ein Ereignis x_2 nur dann beeinflussen, wenn x zukünftig zeit- bzw. lichtartig ist. Entsprechend ist die *Vergangenheit* der Bereich der Raumzeit, der von der negativen Komponente des Lichtskegels begrenzt ist, d.h. durch

$$x{\cdot}x \leq 0 \qquad \text{und} \qquad x^0 = ct < 0. \tag{5.36}$$

Hier kann x_1 nur von x_2 beeinflusst werden, nicht aber umgekehrt. Eine *Gegenwart* im gewöhnlichen Sinn existiert in der Relativitätstheorie nicht; es ist in der Regel nicht sinnvoll über die *Gleichzeitigkeit* von Ereignissen nachzudenken, da dies keine universell gültige Eigenschaft ist, sondern vom Inertialsystem abhängt. Es gibt lediglich den Bereich der Raumzeit, der ausserhalb des Lichtskegels liegt, d.h.

$$x{\cdot}x > 0. \tag{5.37}$$

Man bezeichnet ihn als *Anderswo*.[3] Zwei raumartig getrennte Ereignisse x_1 und x_2 können sich in der Relativitätstheorie gegenseitig unter keinen Umständen beeinflussen.

Schliesslich können wir noch die quadratische Norm $x{\cdot}x$ interpretieren: Für raumartige x beschreibt $\sqrt{x{\cdot}x}$ den räumlichen Abstand der Punkte $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ in einem solchen Inertialsystem im dem $t_1 = t_2$ gilt. Für zeitartige x beschreibt hingegen $\sqrt{-x{\cdot}x}/c$ den zeitlichen Abstand von t_1 und t_2 in einem solchen Inertialsystem, im dem $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$ gilt. Für lichtartige x ist $x{\cdot}x = 0$ und es gibt keine Lorentz-invariante Charakterisierung des Abstandsvektors x ausser die Unterscheidung, welches der beiden Ereignisse x_1 und x_2 zuerst stattgefunden hat.

Ko- und kontravariante Vektoren. In Bezug auf die Poincaré-Transformation

$$\bar{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu \tag{5.38}$$

unterscheidet man zwischen ko- und kontravarianten Vektoren, die unterschiedlich transformieren.

Die Komponenten eines *kovarianten Vektors* v werden mit einem unteren Index v_μ bezeichnet. Ein kovarianter Vektor verhält sich ähnlich wie der Vektor der partiellen Ableitungen im folgenden Sinn: Sei $F(x)$ eine Funktion der Raumzeit mit der (aktiv) transformierten Funktion $\bar{F}$

$$\bar{F}(\bar{x}) = F(x). \tag{5.39}$$

[3] Skaliert man die Zeit- und Raumrichtungen des Lichtkegels mit alltäglichen Einheiten wie m und s, dann ist der Lichtkegel extrem breit und das Anderswo nahezu flach. Unser intuitives Konzept der Gleichzeitigkeit ist also (zumindest in unserer unmittelbaren räumlichen Umgebung) näherungsweise durch das Anderswo gegeben.

Weiter bezeichnen wir mit G_μ und $\bar{G}_\mu$ die partiellen Ableitungen der Funktionen F und $\bar{F}$

$$G_\mu(x) := \frac{\partial F}{\partial x^\mu}(x), \qquad \bar{G}_\mu(\bar{x}) := \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}^\mu}(\bar{x}). \tag{5.40}$$

Da wir G und $\bar{G}$ explizit definiert haben, können wir nun bestimmen, wie $\bar{G}_\mu$ mit G_μ zusammenhängt. Die Kettenregel der Differentialrechnung ergibt dann

$$\bar{G}_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu}\frac{\partial F}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} G_\nu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\, G_\nu. \tag{5.41}$$

Dies definiert die Transformationsregel eines allgemeinen kovarianten Vektors v_μ

$$\bar{v}_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\, v_\nu. \tag{5.42}$$

Im Gegensatz dazu verhält sich ein *kontravarianter Vektor* w, dessen Komponenten w^μ mit einem oberen Index bezeichnet werden, wie das Differential $\mathrm{d}x^\mu$. Es gilt nämlich

$$\mathrm{d}\bar{x}^\mu = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu}\,\mathrm{d}x^\nu = \Lambda^\mu{}_\nu\,\mathrm{d}x^\nu\,. \tag{5.43}$$

Somit lautet die Transformationsregel eines kontravarianten Vektors w^μ

$$\bar{w}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, w^\nu. \tag{5.44}$$

Demnach ist der Vektor der Koordinaten x^μ kontravariant unter Lorentz-Transformationen mit $b^\mu = 0$, nicht aber unter allgemeinen Poincaré-Transformationen mit $b^\mu \neq 0$. Der Abstandsvektor $x^\mu = x_2^\mu - x_1^\mu$ ist hingegen ein echter kontravarianter Vektor, da sich die Translationen herausheben.

Eine wichtige Eigenschaft der beiden Transformationsregeln ist, dass das Skalarprodukt zwischen zwei verschiedenartigen Vektoren w^μ und v_μ invariant ist

$$\bar{w}^\mu \bar{v}_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu w^\nu (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu v_\rho = (\Lambda^{-1}\Lambda)^\rho{}_\nu w^\nu v_\rho = \delta^\rho_\nu w^\nu v_\rho = w^\mu v_\mu. \tag{5.45}$$

Hier ist δ^μ_ν das *Kronecker-Symbol*,

$$\delta^\mu_\nu := \begin{cases} 1 & \text{falls } \mu = \nu, \\ 0 & \text{anderenfalls,} \end{cases} \tag{5.46}$$

welches die Einheitsmatrix verkörpert.

In dieser Charakterisierung entspricht die Metrik $\eta_{\mu\nu}$ dem Tensorprodukt zweier kovarianter Vektoren. Formal entspricht ihre Transformationsregel damit der Kombination der Transformationsregeln zweier kovarianter Vektoren

$$\bar{\eta}_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu\,(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\nu\,\eta_{\rho\sigma}. \tag{5.47}$$

Diese Kombination ist aber per Konstruktion der Lorentz-Transformation invariant, $\bar{\eta} = \eta$. Diese Eigenschaft erlaubt es, in invarianter Weise ko- und kontravariante Vektoren ineinander umzuwandeln: Für einen kontravarianten Vektor v^μ definiert man den zugehörigen kovarianten Vektor v_μ als

$$v_\mu := \eta_{\mu\nu} v^\nu. \tag{5.48}$$

Aufgrund von $\bar{\eta} = \eta$ kann man leicht bestätigen, dass diese Definition verträglich mit Poincaré-Transformationen ist, in dem Sinn, dass das Senken des Index mit der Transformation kommutiert. Umgekehrt kann man einen unteren Index heben

$$v^\mu := \eta^{\mu\nu} v_\nu. \tag{5.49}$$

Hier ist $\eta^{\mu\nu}$ die inverse Metrik, die in der Tat als kontravarianter Tensor transformiert, und die als Matrix hier gleich der Metrik selbst ist $\eta^{-1} = \eta$. Die Definition der inversen Metrik ist konsistent mit dem Heben und Senken von Indizes in dem Sinn, dass

$$\eta^{\mu\rho}\, \eta_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu. \tag{5.50}$$

Die Metrik mit einem oberen und einem unteren Index ist somit die Einheitsmatrix, die offensichtlich ebenfalls invariant ist.

5.4 Eigenschaften der Lorentz-Transformationen

Die Matrizen ${\Lambda^\mu}_\nu$ der Lorentz-Transformationen sind über die Eigenschaft (5.22) definiert, dass sie die Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu}$ wie folgt erhalten

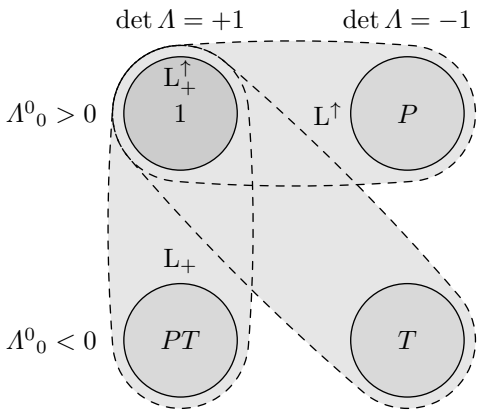
$$\Lambda^\intercal \eta \Lambda = \eta. \tag{5.51}$$

Formal bilden diese Matrizen die orthogonale Gruppe zu einem Skalarprodukt der Signatur $(3,1)$, welche mit $\mathrm{O}(3,1)$ bezeichnet wird; wir nennen sie hier kurz L.

Komponenten der Lorentz-Gruppe. Die Determinante und die 0,0-Komponenten der Invarianzeigenschaft der Metrik lauten

$$(\det \Lambda)^2 = 1, \qquad ({\Lambda^0}_0)^2 = 1 + \sum_{k=1}^{3} ({\Lambda^k}_0)^2. \tag{5.52}$$

Aus der ersten Gleichung folgt, dass $\det \Lambda = \pm 1$, und aus der zweiten, dass $|{\Lambda^0}_0| \geq 1$. Die Lorentz-Gruppe L zerfällt deshalb in vier Komponenten, zwischen denen es keinen stetigen Übergang gibt:



(5.53)

Die Zusammenhangskomponente, die die Identität enthält, ist die Untergruppe

$$\mathrm{L}_+^\uparrow := \{\Lambda \in \mathrm{L}; \det \Lambda = +1, \Lambda^0{}_0 \geq 1\} = \mathrm{SO}(3,1)^\uparrow, \tag{5.54}$$

die auch als *eigentliche orthochrone Lorentz-Gruppe* bezeichnet wird. Sie ist die Schnittmenge der Untergruppen

$$\begin{aligned} \mathrm{L}^\uparrow &:= \{\Lambda \in \mathrm{L}; \Lambda^0{}_0 \geq 1\} = \mathrm{O}(3,1)^\uparrow, \\ \mathrm{L}_+ &:= \{\Lambda \in \mathrm{L}; \det \Lambda = +1\} = \mathrm{SO}(3,1). \end{aligned} \tag{5.55}$$

Typische Vertreter der anderen drei Zusammenhangskomponenten sind die Matrizen T der Zeitumkehr an $t = 0$, P der Raumspiegelung am Punkt $\vec{x} = 0$, und PT als Kombination dieser beiden diskreten Lorentz-Transformationen

$$\begin{aligned} T &= \mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1), \\ P &= \mathrm{diag}(+1,-1,-1,-1), \\ PT &= \mathrm{diag}(-1,-1,-1,-1). \end{aligned} \tag{5.56}$$

Die allgemeinen Elemente der entsprechenden Komponenten können durch Komposition mit eigentlichen orthochronen Lorentz-Transformation aus $\mathrm{L}_+^\uparrow$ erzeugt werden. Im Weiteren werden wir uns deshalb auf $\mathrm{L}_+^\uparrow$ beschränken.

Transformationen in 1 + 1 Dimensionen. Wir betrachten zunächst den einfacheren Fall von eigentlichen orthochronen Lorentz-Transformationen in einer räumlichen und einer zeitlichen Dimension, d.h. die Gruppe $\mathrm{SO}(1,1)^\uparrow$.

Mit dem allgemeinen Ansatz für eine (2×2)-Matrix

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{5.57}$$

lautet die Invarianzbedingung der Metrik $\eta := \mathrm{diag}(-1,+1)$

$$\Lambda^\mathsf{T} \eta \Lambda = \begin{pmatrix} -a^2 + c^2 & -ab + cd \\ -ab + cd & -b^2 + d^2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix} = \eta. \tag{5.58}$$

Aus dem Nebendiagonalelement folgt $b = cd/a$. Durch Vergleich der Diagonalelemente folgt $a^2 = d^2$ und damit $d = \pm a$ und $b = \pm c$. Die verbleibende Relation lautet $a^2 = 1 + c^2$, welche bequem durch die hyperbolischen Funktionen cosh und sinh gelöst werden kann. Mit $a > 0$ und $\det \Lambda = +1$ können wir die allgemeine Lösung schreiben als

$$L(\theta) := \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}. \tag{5.59}$$

Diese Transformationen bilden eine Gruppe mit dem Multiplikationsgesetz

$$L(\theta_1)\, L(\theta_2) = L(\theta_1 + \theta_2). \tag{5.60}$$

Wir wollen nun verstehen, wie die Transformation $\bar{x} = L(\theta)x$ auf ein freies Teilchen wirkt. Dazu schreiben wir sie in Komponenten als

$$\begin{aligned} c\bar{t} &= ct\cosh\theta + x\sinh\theta, \\ \bar{x} &= ct\sinh\theta + x\cosh\theta. \end{aligned} \tag{5.61}$$

Wir legen das freie Teilchen im ersten Inertialsystem an die feste Position $x = 0$. Für die Koordinaten im zweiten Inertialsystem ergibt sich dann

$$c\bar{t} = ct\cosh\theta, \qquad \bar{x} = ct\sinh\theta. \tag{5.62}$$

Eliminieren wir die ursprüngliche Zeit t aus diesen Beziehungen,[4] so erhalten wir die Bahn des Teilchens im zweiten Inertialsystem

$$\bar{x} = c\bar{t}\tanh\theta. \tag{5.63}$$

Dies bedeutet, dass $L(\theta)$ eine spezielle Lorentz-Transformation mit der folgenden Relativgeschwindigkeit beschreibt

$$v = c\tanh\theta. \tag{5.64}$$

Die Grösse $\theta \in \mathbb{R}$ wird *Rapidität* genannt. Da $|\tanh u| < 1$ gilt insbesondere, dass die Relativgeschwindigkeit v durch die Lichtgeschwindigkeit c beschränkt ist, $|v| < c$.

Wir können natürlich die speziellen Lorentz-Transformationen mittels der Relativgeschwindigkeit v anstelle der Rapidität θ parametrisieren. Durch Auflösen der Relation $v(\theta)$ nach θ finden wir

$$\cosh\theta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,, \qquad \sinh\theta = \frac{v}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,, \tag{5.65}$$

somit hat die Transformationsmatrix $L(\theta)$ die Form

$$L(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \begin{pmatrix} 1 & v/c \\ v/c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}, \tag{5.66}$$

wobei die Grössen β und γ in der Relativitätstheorie gewöhnlich die folgenden Funktionen der Geschwindigkeit v bezeichnen

$$\beta := \frac{v}{c}\,, \qquad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}\,. \tag{5.67}$$

Die obige Koordinatentransformation lautet also

$$\bar{t} = \frac{t + xv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,, \qquad \bar{x} = \frac{x + vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,. \tag{5.68}$$

[4] Das Teilchen durchläuft alle Zeiten t im ersten Inertialsystem.

An dieser Form kann man unmittelbar ablesen, dass die speziellen Lorentz-Transformationen für kleine Geschwindigkeiten $|v| \ll c$ in spezielle Galilei-Transformationen übergehen

$$\bar{t} = t + \mathcal{O}(v/c), \qquad \bar{x} = x + vt + \mathcal{O}(v^2/c^2). \tag{5.69}$$

Es bestehen zwei grundlegende Unterschiede zwischen diesen beiden Arten von Transformationen: Der erste ist, dass die Lorentz-Transformationen die Zeitkomponente nichttrivial abbilden, d.h. die transformierte Zeit ist eine Funktion des Ortes, während die Zeit in den Galilei-Transformationen unberührt bleibt. Ein weiterer Unterschied ist, dass die Relativgeschwindigkeit v in Galilei-Transformationen additiv ist, nicht aber in Lorentz-Transformationen; dort ist stattdessen die Rapidität θ additiv![5] Führt man zwei Transformationen mit Relativgeschwindigkeiten v_1 und v_2 hintereinander aus, dann resultiert daraus eine Transformation mit Relativgeschwindigkeit

$$v = c\tanh(\theta_1 + \theta_2) = \frac{c\tanh\theta_1 + c\tanh\theta_2}{1 + \tanh\theta_1\tanh\theta_2} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2/c^2}\,. \tag{5.70}$$

Dies ist das *relativistische Additionsgesetz für Geschwindigkeiten*. Es garantiert insbesondere, dass der Betrag der Relativgeschwindigkeit v immer kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c bleibt.

Transformationen in $3+1$ Dimensionen. Kehren wir nun zu drei räumlichen Dimensionen zurück. Jede eigentliche orthochrone Lorentz-Transformation $\Lambda \in \mathrm{L}_+^\uparrow$ lässt sich schreiben als Kombination einer speziellen Lorentz-Transformation $L(\vec{\theta})$ und einer Rotation $R(\vec{\varphi})$.

$$\Lambda = L(\vec{\theta})\, R(\vec{\varphi}). \tag{5.71}$$

Die Rotation $R(\vec{\varphi})$ wirkt nur auf die räumlichen Komponenten eines Vierer-Vektors und rotiert wie gewohnt mit dem Winkel $\|\vec{\varphi}\|$ um die Achse $\vec{\varphi}$. Eine spezielle Lorentz-Transformation $L(\vec{\theta})$ führt zwei Inertialsysteme ineinander über, die mit Rapidität $\|\vec{\theta}\|$ entlang der Richtung $\vec{\theta}$ zueinander bewegt sind. Für die x_3-Achse lauten die beiden Arten von Transformationen

$$\begin{aligned} R(\varphi\vec{e}_3) &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ L(\theta\vec{e}_3) &:= \begin{pmatrix} \cosh\theta & 0 & 0 & \sinh\theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\theta & 0 & 0 & \cosh\theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.72}$$

Durch Konjugation mit einer weiteren räumlichen Rotation $R \in \mathrm{SO}(3)$ kann die Achse beider Transformationen beliebig angepasst werden.

[5] Die Additivität gilt aber nur in einer räumlichen Dimension, bzw. für kollineare spezielle Lorentz-Transformationen in mehr als einer Dimension.

5.5 Relativistische Mechanik

In diesem Abschnitt wollen wir die Auswirkung der Einsteinschen Postulate auf die Mechanik beschreiben.

Weltlinie. Die relativistische Bewegung eines Teilchens wird durch seine *Weltlinie* in der Raumzeit $\mathbb{R}^{3,1}$ dargestellt. Dies ist die Bahnkurve $x(\mathbb{R}) = \{x(\lambda); \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{3,1}$ mit der Parametrisierung

$$x(\lambda) = \big(x^0(\lambda), \vec{x}(\lambda)\big), \tag{5.73}$$

wobei λ ein beliebiger Kurvenparameter ist. Man kann z.B. die Zeitkoordinate $\lambda = t$ als Parameter wählen,

$$x(t) = \big(ct, \vec{x}(t)\big). \tag{5.74}$$

Wie wir jedoch zuvor gesehen haben, hängt die Zeitkoordinate t von dem benutzten Koordinatensystem ab und ist damit keine universelle Grösse. Um eine solche zu konstruieren, betrachten wir die Geschwindigkeit des Teilchens in einem bestimmten Inertialsystem

$$\vec{v} := \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}\right)^{-1}. \tag{5.75}$$

Mit dem Poincaré-invarianten Quadrat des Bogenelements

$$(\mathrm{d}x)^2 := \eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu = -(\mathrm{d}x^0)^2 + (\mathrm{d}\vec{x})^2 \tag{5.76}$$

gilt dann

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = -\left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\right)^2 = -c^2 + \vec{v}^2. \tag{5.77}$$

Dieser Ausdruck hängt per Konstruktion vom gewählten Inertialsystem ab. Er motiviert aber, dass man über die Beziehung

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = -c^2 \tag{5.78}$$

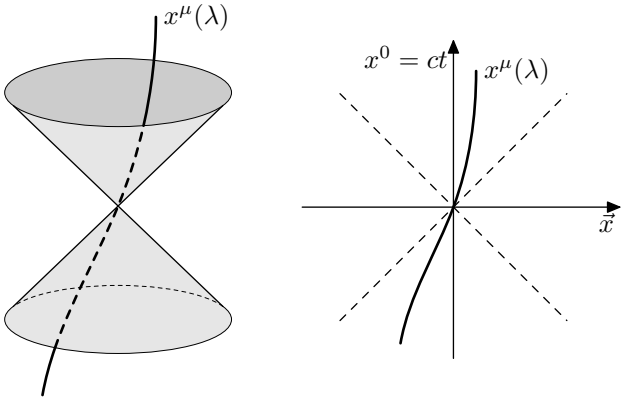
eine vom Inertialsystem unabhängige *Eigenzeit* τ definieren kann. Diese Definition ist so konstruiert, dass in einem Ruhesystem des Teilchens, d.h. einem Inertialsystem, in dem das Teilchen momentan ruht, $\vec{v} = 0$, der Verlauf der Eigenzeit τ mit dem Verlauf der Zeit t übereinstimmt, $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t$. Die Beziehung zwischen der Eigenzeit τ und einer beliebigen Parametrisierung λ bzw. der Parametrisierung mittels der Zeit t in einem vorgegebenen Inertialsystem lautet also

$$\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}\lambda}{c}\sqrt{-\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2} = \mathrm{d}t\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}\,. \tag{5.79}$$

Wir wählen hier stets das positive Vorzeichen für die Quadratwurzel, so dass $\mathrm{d}\tau$ das gleiche Vorzeichen wie $\mathrm{d}t$ hat. Die Eigenzeit ist dadurch bis auf eine konstante Verschiebung festgelegt.

Die Eigenzeit τ ist das Analogon zur Bogenlänge s einer Kurve, allerdings ist die zugrundeliegende Kurve hier zeitartig und passend dazu trägt die Eigenzeit die Einheit einer Zeit.

Die obige Definition der Eigenzeit geht davon aus, dass die Bahn an jedem Punkt zeitartig ist, d.h. $(\mathrm{d}x)^2 < 0$. Dies ist gleichbedeutend damit, dass die Geschwindigkeit des Teilchens durch die Lichtgeschwindigkeit beschränkt ist, $\|\vec{v}\| < c$. Nur dann sind alle auftretenden Quadratwurzeln reell und nur dann können wir mit Hilfe einer Lorentz-Transformation in das *Ruhesystem* des Teilchens transformieren. Geometrisch bedeutet dies, dass für jeden Punkt der Weltlinie die gesamte Weltlinie innerhalb des Lichtkegels ausgehend von diesem Punkt liegt.



(5.80)

Im Rahmen der Relativitätstheorie wird die Dynamik eines Systems oft in sogenannten *Raumzeidiagrammen* (*Minkowski-Diagrammen*) illustriert. In diesen läuft die Zeit vertikal und es wird meist nur eine räumliche Dimension in der horizontalen Richtung dargestellt. Der Lichtkegel hat in aller Regel den Neigungswinkel 45° zu der Zeit- und der Raumachse. Punkte des Diagramms sind Ereignisse und Teilchen werden durch ihre Weltlinien als eindimensionale Kurven dargestellt. Nach unserer Diskussion sind Weltlinien zeitartig und damit an jedem Punkt stärker vertikal als horizontal ausgerichtet.

Dynamik. Als nächstes betrachten wir die Dynamik von Teilchen. Dazu definieren wir die *Vierer-Geschwindigkeit* u und den *Vierer-Impuls* p

$$u^\mu = \dot{x}^\mu := \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\,, \qquad p^\mu := m\,u^\mu. \tag{5.81}$$

Hier ist $m > 0$ die Masse des Teilchens, die wie in der klassischen Mechanik als intrinsische Eigenschaft des Teilchen angesehen wird und in der Regel konstant ist. Insbesondere ist sie unabhängig vom gewählten Inertialsystem. Beide Grössen transformieren unter den eigentlichen orthochronen Lorentz-Transformationen als[6]

$$\bar{u}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu, \qquad \bar{p}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu. \tag{5.82}$$

[6]Unter allgemeinen Lorentz-Transformationen tritt zusätzlich der Faktor $\mathrm{sign}(\Lambda^0{}_0)$ auf; daher sind u und p eigentlich Pseudovektoren.

Die quadratische Norm dieser Vektoren ist per Konstruktion der Eigenzeit jeweils fest vorgegeben[7]

$$u{\cdot}u = -c^2, \qquad p{\cdot}p = -m^2c^2. \tag{5.83}$$

Demnach kann man die Masse eines Teilchens auch definieren als $m = \sqrt{-p{\cdot}p}/c$.

In Komponenten lauten die Vierer-Geschwindigkeit und der Vierer-Impuls[8]

$$u^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}\,(c,\vec{v}), \qquad p^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}\,(mc, m\vec{v}). \tag{5.84}$$

Die lineare Beziehung zwischen Impuls $\vec{p}$ und Geschwindigkeit $\vec{v}$ aus der klassischen Mechanik wird also in der Relativitätstheorie wie folgt abgeändert

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}\,. \tag{5.85}$$

Der Nenner dieses Ausdrucks impliziert, dass der Impuls für relativistische Geschwingigkeiten $\|\vec{v}\| \to c$ stark ansteigt und divergiert. In Anbetracht der Tatsache, dass der Impuls auch in der Relativitätstheorie eine Erhaltungsgrösse ist, ist es unmöglich mit einem endlichen Impulsaufwand ein Teilchen bis zur Lichtgeschwindigkeit c zu beschleunigen. Dies ist konsistent mit den vorigen Betrachtungen, die $\|\vec{v}\| < c$ verlangt haben.

Desweiteren ist die zeitliche Komponente p^0 des Vierer-Impulses interessant: Sie ist per Konstruktion positiv und für kleine Geschwindigkeiten lautet die Entwicklung von cp^0

$$cp^0 = mc^2 + \tfrac{1}{2}m\vec{v}^2 + \frac{3m\vec{v}^4}{8c^2} + \mathcal{O}(v^6/c^4). \tag{5.86}$$

Nach einem konstanten Beitrag ist der zweite Term die gewöhnliche kinetische Energie $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$ eines klassischen Teilchens. Da auch p^0 eine Erhaltungsgrösse ist, betrachtet man cp^0 als die relativistische Energie des Teilchens

$$E = cp^0. \tag{5.87}$$

Zusätzlich zur klassischen kinetischen Energie hat die relativistische Energie Korrekturen der Art $mv^2(v^2/c^2)^n$, die dazu führen, dass auch die Energie für $\|\vec{v}\| \to c$ divergiert. Somit ist die Lichtgeschwindigkeit ebenso aus energetischer Sicht für gewöhnliche Teilchen mit $m > 0$ unerreichbar. Zudem besitzt die relativistische Energie einen führenden geschwindigkeitsunabhängigen Beitrag

$$E_0 = mc^2. \tag{5.88}$$

Dieser wird *Ruheenergie* genannt.[9] Die Ruheenergie spielt als konstanter Beitrag für die übliche Dynamik keine Rolle, aber sie ist insbesondere relevant für

[7] In der Konvention mit Signatur $+---$ der Minkowski-Metrik lautet das Quadrat des Vierer-Impulses $p{\cdot}p = m^2c^2$. Ein positives Vorzeichen an dieser Stelle ist zwar bequem, hat aber an anderen Stellen einige Nachteile.

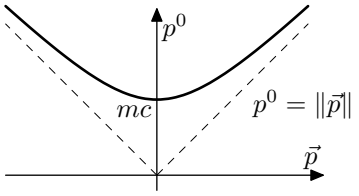
[8] Da für die räumlichen Komponenten der Vierer-Geschwindigkeit gilt $\vec{u} = \vec{v}/\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}$, wählt man einen anderen Buchstaben als v für die Vierer-Geschwindigkeit.

[9] In Analogie zur Ruheenergie wird die Masse m gelegentlich auch Ruhemasse genannt. Entsprechend der obigen Definition der Masse ist sie aber per Konstruktion unabhängig vom Bewegungszustand.

Zerfallsprozesse von Teilchen, da hier sowohl die Ruheenergie als auch die kinetische Energie in die Energiebilanz eingehen. Hierzu werden wir werden in Kürze ein Beispiel betrachten.

Insgesamt liegt der Vierer-Impuls auf dem positiven Massenhyperboloid im Raum der Impulse, der ebenfalls der Minkowski-Raum $\mathbb{R}^{3,1}$ ist,

$$(p^0)^2 - \vec{p}^2 = m^2c^2. \tag{5.89}$$



Schliesslich wollen wir noch die *Vierer-Kraft* diskutieren, die die Änderungsrate des Vierer-Impulses vorgibt

$$\dot{p}^\mu = F^\mu. \tag{5.90}$$

Für die drei räumlichen Komponenten ist dies das zweite Newtonsche Gesetz $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$. Da die zeitliche Komponente p^0 des Vierer-Impulses die Energie E/c beschreibt, muss die zeitliche Komponente F^0 der Vierer-Kraft nach dieser Gleichung der Leistung P/c entsprechen. Die zeitliche Komponente der Gleichung ist aber nicht als unabhängige Bewegungsgleichung zu verstehen, denn das Quadrat des Impulses ist mit $p{\cdot}p = -m^2c^2$ fest vorgegeben. Damit gilt

$$0 = \dot{p}{\cdot}p = F{\cdot}p = mF{\cdot}u = 0, \tag{5.91}$$

und die Vierer-Kraft ist orthogonal zum Vierer-Impuls und zur Vierer-Geschwindigkeit. Letzteres besagt in Komponenten aber nur, dass die Leistung gleich Kraft mal Geschwindigkeit ist

$$P = cF^0 = \vec{F}{\cdot}\vec{v}. \tag{5.92}$$

Die Dynamik wird also wie in der klassischen Mechanik durch die räumlichen Komponenten der Kraft bestimmt.

Masselose Teilchen. Die relativistische Beziehung zwischen Impuls und Energie

$$p{\cdot}p = -m^2c^2 \qquad \text{bzw.} \qquad E^2 = m^2c^4 + c^2\vec{p}^2 \tag{5.93}$$

hat im Gegensatz zur entsprechenden Beziehung $2mE = \vec{p}^2$ der klassischen Mechanik auch für Teilchen mit Masse $m = 0$ sinnvolle Lösungen. In dem Fall ist die Energie $E = c\|\vec{p}\|$, und der Vierer-Impuls lautet

$$p^\mu = (\|\vec{p}\|, \vec{p}). \tag{5.94}$$

Ein Teilchen ohne Masse trägt daher sowohl Energie als auch Impuls. Da p^μ lichtartig ist, ist seine Geschwindigkeit immer gerade die Lichtgeschwindigkeit, unabhängig von seinem Impuls $\vec{p}$. Allerdings besitzt es kein Ruhesystem, da die Lorentz-Transformationen für $\|\vec{v}\| \to c$ divergieren. Ein Beispiel eines masselosen

Elementarteilchens ist das Photon, das die Anregungen des elektromagnetischen Strahlungsfeldes beschreibt. Da Photonen masselos sind, ist es vielleicht nicht überraschend, dass man die Theorie des elektromagnetischen Strahlungsfeldes nicht auf der klassischen Mechanik mit dem Galileischen Relativitätsprinzip aufbauen kann, sondern dass sie in einem Rahmen formuliert werden muss, in dem die Lichtgeschwindigkeit als natürliche Grenzgeschwindigkeit auftritt. Das reflektiert die Tatsache, dass die Maxwell-Gleichungen relativistisch sind.

5.6 Relativistische Effekte

Die spezielle Relativitätstheorie führt zu einigen ungewöhnlichen Effekten, die der nichtrelativistischen Intuition widersprechen. Wir wollen im Folgenden einige von ihnen besprechen.

Zerfälle. Ein wichtiger Effekt der relativistischen Physik sind *Teilchenzerfälle*, in denen sich die Gesamtmasse aller beteiligten Teilchen ändern kann. Dies kann an dem Beispiel des symmetrischen Zerfalls illustriert werden: Wir betrachten ein Teilchen der Masse M in seinem Ruhesystem, welches in zwei Teilchen der Masse m zerfällt.



(5.95)

Die Geschwindigkeiten der Zerfallsprodukte können wir mittels Impulserhaltung vollständig lösen: Analog zur klassischen Mechanik postuliert man, dass der Gesamtimpuls P^μ eines isolierten Systems erhalten ist. Mit der Vierer-Geschwindigkeit $U = (c, 0)$ des ursprünglichen Teilchens und den Vierer-Geschwindigkeiten u_i der Zerfallsprodukte gilt also

$$MU^\mu = P^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu = mu_1^\mu + mu_2^\mu. \tag{5.96}$$

Die Erhaltung des räumlichen Anteils $\vec{P}$ impliziert offensichtlich, dass die Produkte mit gleicher Geschwindigkeit v in gegensätzliche Richtungen davonfliegen

$$\vec{u}_1 = -\vec{u}_2 = \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,. \tag{5.97}$$

Damit haben sie auch die gleiche Energie $u_1^0 = u_2^0$. Die Erhaltung der Energiekomponente P^0 ergibt nun die Beziehung

$$Mc = \frac{2mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,. \tag{5.98}$$

Anders ausgedrückt gilt die Ungleichung

$$2m = M\sqrt{1 - v^2/c^2} < M. \tag{5.99}$$

Wir sehen also, dass die Gesamtmasse nicht erhalten ist. Der *Massendefekt* bestimmt die Geschwindigkeit

$$(M-2m)c^2 = 2m\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right)c^2 = 2\cdot\tfrac{1}{2}mv^2+\dots. \tag{5.100}$$

Für $v \ll c$ ist das gleich der klassischen Energie der Zerfallsprodukte; ein Teil der Ruheenergie des ursprünglichen Teilchens wurde somit in kinetische Energie der Produkte umgewandelt.

Zeitdilatation. Ein seltsames Phänomen der speziellen Relativitätstheorie ist die *Zeitdilatation*. Um es zu verstehen machen wir das folgende Gedankenexperiment (in einer räumlichen Dimension): Wir betrachten zwei Inertialsysteme, die sich mit Geschwindigkeit v gegeneinander bewegen. Im ersten System befindet sich eine Uhr am Ursprung $x = 0$ und zwischen zwei Zyklen der Uhr vergeht genau die Zeit t, z.B. $t = 1\,\mathrm{s}$. Zwei aufeinanderfolgende Schläge der Uhr sind also getrennt durch $x^\mu = (ct, 0)$. Nun transformieren wir diese Ereignisse in das zweite Inertialsystem, das sich mit der Geschwindigkeit v relativ zum ersten bewegt. Dann folgt aus der Lorentz-Transformation (5.68), dass sich die beiden Ereignisse im zweiten System gerade unterscheiden um

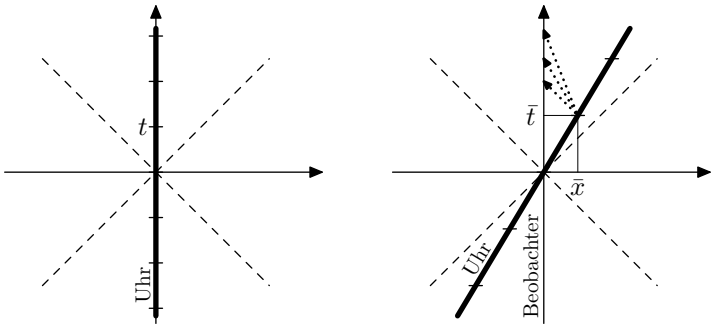
$$\bar{t} = \frac{t}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,, \qquad \bar{x} = \frac{vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,. \tag{5.101}$$

Im zweiten Inertialsystem ist das Zeitintervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zyklen der Uhr also mit dem folgenden Faktor gedehnt

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \geq 1. \tag{5.102}$$

Die Uhr geht mit $\bar{t} > t$ scheinbar langsamer. Dies ist das Phänomen der Zeitdilatation, das bei erster Betrachtung verwirrend ist.

Hierbei ist ein sehr wichtiger Punkt, der allerdings allzu gerne übersehen wird, dass mit $x \neq 0$ die beiden Ereignisse im zweiten Inertialsystem nicht mehr am selben Raumpunkt stattfinden. Will man zwei Messungen vergleichen, so muss die Information über die Messungen aber zur selben Zeit am gleichen Ort vorliegen, d.h. am selben Ereignis bzw. Punkt in der Raumzeit. Jede Information hat jedoch selbst eine physikalische Natur bzw. einen physikalischen Träger, und sie bewegt sich nur mit einer bestimmten Geschwindigkeit, die die Lichtgeschwindigkeit c keinesfalls überschreiten kann.

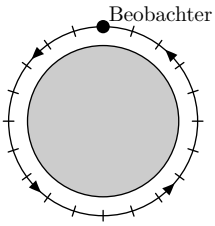


(5.103)

In unserem Beispiel muss die Information im zweiten Inertialsystem den Weg x zurücklegen, bevor die beiden Schläge verglichen werden können. Die Übertragung benötigt aber zusätzliche Zeit, so dass sich die Zeitdilatation $\bar{t}$ in den meisten Versuchsanordnungen einer direkten Beobachtung entzieht. Letztlich läuft der Punkt darauf hinaus, dass das Konzept der *Gleichzeitigkeit* in der Relativitätheorie nicht existiert.[10]

Die Effekte der Zeitdilatation können auf verschiedene Art beobachtet werden, aus denen sich jeweils verschiedene Messergebnisse ergeben. So kann man die Uhr wieder zum Ausgangspunkt zurückbringen, und dort Zeit ablesen, die auf dem Weg abgelaufen ist. Man kann auch die Zyklen der Uhr als Lichtimpulse zurück zum Ausgangspunkt übermitteln. Für die beobachtete Frequenz ist hier der relativistische Doppler-Effekt ausschlaggebend. Schliesslich kann man auch die zurückgelegte Strecke zwischen zwei Ereignissen messen. Hierfür ist die verwandte Längenkontraktion relevant, die z.B. den Zerfall bewegter Myonen beeinflusst.

Eine instruktive Methode, die Zeitdilatation direkt zu messen, ist es, die Uhr in einen kreisförmigen Orbit zu versetzen, und sie an einem bestimmten Punkt des Orbits zu beobachten.



(5.104)

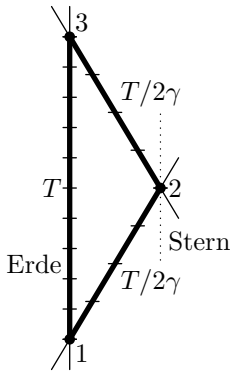
Nach einem vollständigen Orbit befindet sich die Uhr wieder an demselben Punkt in der Raumzeit wie der ruhende Beobachter, und die abgelaufene Zeit kann direkt gemessen werden. Hierbei ergibt sich in der Tat der obige Wert für den Faktor γ der Zeitdilatation. Z.B. ist die Zeitdilatation einer Uhr auf einem Satelliten im Erdorbit ein relevanter Effekt.[11]

Zwillingsparadoxon. Das *Zwillingsparadoxon* ist eine andere Version des obigen Gedankenexperiments: Hier fliegt eine Person mit relativistischer Geschwindigkeit v zu einem weit entfernten Stern. Dort kehrt sie um und fliegt mit derselben Geschwindigkeit zur Erde zurück. Ihr Zwilling verbleibt auf der Erde und altert dabei um eine Zeit T (in der Grössenordnung von Jahren). Sie selbst

[10] In Gedankenexperimenten der der klassischen Physik stellt man sich gerne vor, dass Messgeräte den Zustand des Systems zu beliebigen Zeitpunkten beliebig genau erfassen können. Jedes Messgerät ist aber selbst ein physikalisches Objekt, welches sich nach den Gesetzen der Physik richtet. So wird die Verarbeitung der Messung immer nur mit begrenzter Genauigkeit und mit begrenzter Geschwindigkeit stattfinden. Insbesondere kann bei Messungen relativistischer Effekte eine hohe zeitliche Genauigkeit gefordert sein, die auch eine Betrachtung relativistischer Details der Signalübertragung innerhalb des Messgeräts einschliesst.

[11] In diesem Beispiel spielt allerdings die allgemeine Relativitätttheorie eine Rolle, da das Gravitationsfeld der Erde einen weiteren Betrag zur Zeitdilatation leistet.

altert aufgrund der Zeitdilatation aber nur um die Zeit $T/\gamma < T$.



(5.105)

Das Paradoxon besteht darin, dass die Situation für beide Personen symmetrisch erscheint. Sie bewegen sich beide mit derselben Relativgeschwindigkeit zueinander und die eine Person sollte damit aus der Perspektive der jeweils anderen mit demselben relativen Zeitfaktor altern.[12] Das ist aber unmöglich, denn sie treffen schliesslich aufeinander und können dann ihr Alter vergleichen.[13]

Zur Auflösung des Paradoxons sind zwei Punkte zu vermerken: Zum einen ist es wie bereits erwähnt nicht sinnvoll, die Zeitdilatation zweier entfernter Objekte zu betrachten, denn das Konzept der Gleichzeitigkeit existiert in der Relativitätstheorie nicht. Zum andern ist die Situation der beiden Zwillinge tatsächlich nicht symmetrisch. Der eine Zwilling befindet sich während der gesamten Dauer der Reise in dem Inertialsystem auf der Erde. Der andere Zwilling beschleunigt aber am entfernten Punkt der Reise und wechselt damit zwischen zwei Inertialsystemen. Demnach ist es kein Widerspruch, wenn die reisende und beschleunigte Person tatsächlich weniger altert als die ruhende. Die Details der Beschleunigung spielen für die Zeitdilatation zwar keine unmittelbare Rolle und der Altersunterschied wird hauptsächlich durch den zurückgelegten Weg bestimmt. Es ist aber wichtig, dass überhaupt eine Beschleunigung stattgefunden hat, denn ohne sie könnten die Zwillinge nicht wieder an einen gemeinsamen Punkt in der Raumzeit gelangen um ihr Alter zu vergleichen.[14]

Den Altersunterschied können wir auch anhand der Eigenzeit der beiden Weltlinien berechnen. Die drei Ereignisse der Abreise, des Umkehrens und der Ankunft befinden sich im Inertialsystem der Erde bei den Koordinaten

$$x_1^\mu = (0,0), \qquad x_2^\mu = (\tfrac{1}{2}cT, \tfrac{1}{2}vT), \qquad x_3^\mu = (cT, 0). \tag{5.106}$$

Für den ruhenden Zwilling ergibt sich die Eigenzeit

$$\int_{13} \mathrm{d}\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-(x_3 - x_1)^2} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2T^2} = T. \tag{5.107}$$

[12] Die Richtung der Bewegung spielt hierfür keine Rolle, da der Faktor γ nur vom Betragsquadrat des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}$ abhängt.

[13] Nach allen unseren Erfahrungen zum Altern ist das Ergebnis eines solchen Vergleichs eindeutig bestimmbar. Alternativ kann man das Gedankenexperiment auch mit Atomuhren durchführen.

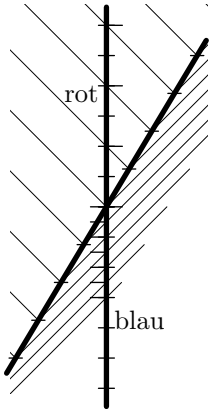
[14] Alternativ könnte auch der ruhende Zwilling nach einer gewissen Zeit zum Stern aufbrechen. Reist er mit derselben Geschwindigkeit, so werden beide Zwillinge auf dem Stern dort wieder dasselbe Alter haben.

Für den reisenden ist die Eigenzeit stattdessen

$$\int_{12} \mathrm{d}\tau + \int_{23} \mathrm{d}\tau = 2\int_{12} \mathrm{d}\tau = \frac{2}{c}\sqrt{-(x_2 - x_1)^2} \\ = \frac{2}{c}\sqrt{\tfrac{1}{4}T^2(c^2 - v^2)} = T\sqrt{1 - v^2/c^2} = T/\gamma. \qquad (5.108)$$

Dieses Resultat entspricht der ursprünglichen Analyse anhand der Zeitdilatation.

Doppler-Effekt. In der klassischen Wellenmechanik hängt die wahrgenommene Frequenz einer übertragenen Welle vom Bewegungszustand des Senders und des Empfängers relativ zum Medium ab. In der Relativitätstheorie gibt es einen analogen Effekt, der ohne Abhängigkeit vom (nichtexistenten) Medium auskommt, dafür aber auch die Zeitdilatation einbezieht. Wir können ihn anhand einer kleinen Modifikation des Gedankenexperiments des Zwillingsparadoxons so beschreiben, dass die reisende Person bei der Ankunft am entfernten Stern nicht umdreht, sondern eine Nachricht zur Erde funkt. Da sich dieses Signal nicht instantan ausbreitet, sondern lediglich mit der Lichtgeschwindigkeit, kann man auch auf diese Weise die Zeitdilatation nicht direkt messen. Die Ankunftszeit des Signals ist aber die früheste Zeit, zu der der daheimgebliebene Zwilling über die Ankunft informiert sein kann. Wenn man die reisende Person durch eine Uhr ersetzt, so erkennt man den *Doppler-Effekt*: Beobachtet man den Takt einer bewegten Uhr, so muss neben der Zeitdilatation auch die endliche Geschwindigkeit des Lichts berücksichtigt werden, welches die Zeigerposition zu dem ruhenden Beobachter übermittelt. Entsprechendes gilt natürlich auch, wenn ein bewegtes Objekt eine Lichtwelle mit einer bestimmten Frequenz aussendet. Die ruhende Person nimmt dann eine andere Frequenz wahr. Dieser Effekt wird *Rot-* bzw. *Blauverschiebung* genannt, je nachdem ob sich die Lichtquelle von dem Beobachter entfernt bzw. sich auf ihn zu bewegt, denn die Frequenz des sichtbaren Lichts wird zu diesen Farben hin verschoben.



(5.109)

Es ist nicht schwierig, den relativistischen Doppler-Effekt zu berechnen. Wir betrachten dazu die Ereignisse der Abreise der Uhr, des Aussendens sowie des Empfangs einer Funknachricht

$$x_1^\mu = (0, 0), \qquad x_2^\mu = (\gamma c\tau, \gamma v\tau), \qquad x_3^\mu = (cT, 0). \qquad (5.110)$$

Hier bezeichnet τ die Eigenzeit, nach der die Nachricht abgesetzt wird, und T die Zeit im ruhenden Inertialsystem, zu der die Nachricht empfangen wird. Da die Strecke von x_2 nach x_3 lichtartig ist, gilt

$$(x_2 - x_3)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad c^2(\gamma\tau - T)^2 = v^2\gamma^2\tau^2 \tag{5.111}$$

Eine Lösung der Gleichung lautet

$$T = \gamma(1 + v/c)\tau = \frac{1 + v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,\tau = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}\,\tau = \sqrt{\frac{c + v}{c - v}}\,\tau. \tag{5.112}$$

Wie auch beim gewöhnlichen Doppler-Effekt ist die Bewegungsrichtung der Uhr relativ zum Beobachter relevant. Die obige Formel gilt für eine Uhr, die sich vom Beobachter entfernt. Dort wird der Takt einer bewegten Uhr um den Faktor der Quadratwurzel verlangsamt wahrgenommen. Für eine Uhr, die sich zum Beobachter hin bewegt, gilt stattdessen

$$T = \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}\,\tau, \tag{5.113}$$

der beobachtete Takt ist also grösser. In beiden Fällen ist aber der Doppler-Effekt für beide Inertialsysteme gleich: Die Uhr des jeweils anderen Systems wird mit derselben Taktänderung wahrgenommen.

Längenkontraktion. Der Effekt der Zeitdilatation kann sehr schön am Zerfall von Myonen illustriert werden. Das Myon ist eine Art schwereres und instabiles Elektron. Seine Masse ist rund 200 mal grösser als die des Elektrons, und es kann spontan in ein Elektron und zwei Neutrinos zerfallen. Bringt man eine grosse Anzahl Myonen im Labor zur Ruhe und misst deren mittlere Lebensdauer, dann findet man

$$\tau = (2.19703 \pm 0.00004) \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}\,. \tag{5.114}$$

Macht man jedoch dieselbe Messung an einem Strahl von Myonen mit der konstanten Geschwindigkeit v so findet man die mittlere Weglänge

$$x = v\gamma\tau. \tag{5.115}$$

Dies ist grösser als die erwartete Weglänge $v\tau$ basierend auf einer Galilei-Transformation. Zum einen kann man dieses Resultat mit $x = v(\gamma\tau)$ als die Zeitdilatation der mittleren Lebensdauer ansehen. Schnelle Myonen leben daher in einem ruhenden Inertialsystem länger.

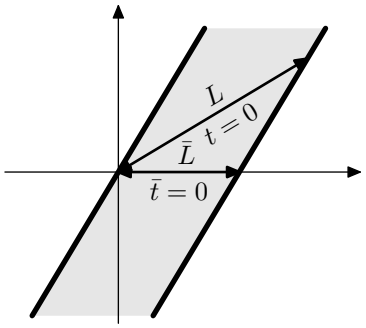
Aus der Perspektive des Myons kommt allerdings ein anderer Effekt zum tragen, denn in dem bewegten Inertialsystem ist die mittlere Lebensdauer genau τ und die Relativgeschwindigkeit v. Hier beruht der Effekt auf einer verkürzten Weglänge

$$\bar{x} = \frac{x}{\gamma} = x\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{5.116}$$

im bewegten Inertialsystem relativ zur Weglänge x im ruhenden Inertialsystem, so dass $\bar{x} = v\tau$. Dieser Effekt wird *Längenkontraktion* genannt.

Bei Myonen, die in grosser Anzahl in der oberen Atmosphäre erzeugt werden und dann mit grosser Geschwindigkeit in Richtung der Erde fliegen, wird zum Beispiel die Dicke der zu passierenden Atmosphäre kontrahiert. Ohne die Längenkontraktion wäre der Weg durch die Atmosphäre zu lang, und ein Grossteil der Myonen würde vor Erreichen der Erdoberfläche zerfallen. Aufgrund dieses relativistischen Effekts, liegt die Erdoberfläche aber innerhalb der mittleren Reichweite.

Zur Berechnung der Längenkontraktion stellen wir uns zwei statische markierte Punkte im Abstand L in einem Inertialsystem vor.



(5.117)

Ihre Weltlinien haben die Form

$$x_1^\mu(\lambda) = (\lambda, 0), \qquad x_2^\mu(\lambda) = (\lambda, L). \tag{5.118}$$

Wir betrachten nun ein zweites Inertialsystem, welches sich mit Relativgeschwindigkeit v in Richtung der Verbindungslinie der Punkte bewegt. Der Koordinatenursprung beider Inertialsysteme stimme für $t = \bar{t} = 0$ überein. Unter einer Lorentz-Transformation lauten die transformierten Weltlinien

$$\begin{aligned} \bar{x}_1^\mu(\lambda) &= (\lambda\gamma, \lambda\gamma v/c), \\ \bar{x}_2^\mu(\lambda) &= (\lambda\gamma + L\gamma v/c, \lambda\gamma v/c + L\gamma). \end{aligned} \tag{5.119}$$

Indem wir die Bahnparameter nun so einstellen, dass die Zeitkomponenten übereinstimmen, finden wir

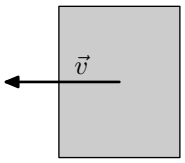
$$\bar{x}_2^\mu(\lambda - Lv/c) - \bar{x}_1^\mu(\lambda) = (0, \gamma L - \gamma L v^2/c^2) = (0, L/\gamma). \tag{5.120}$$

Der Abstand der Markierungen wird also in dem bewegten Bezugssystem zu $\bar{L} = L/\gamma < L$ verkürzt wahrgenommen

$$\bar{L} = \frac{L}{\gamma} = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,. \tag{5.121}$$

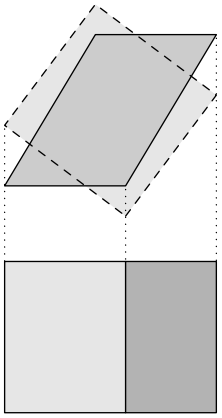
Das ist die zuvor erwähnte Lorentz-Kontraktion. Es ist klar, dass dieses Phänomen nicht die Abstände in Richtungen betrifft, die orthogonal zur Bewegungsrichtung sind: Bewegte, räumlich ausgedehnte Objekte sind in der Richtung der Geschwindigkeit $\vec{v}$ kontrahiert; die Richtungen senkrecht zur Geschwindigkeit $\vec{v}$ bleiben unverändert. Allerdings ist die Längenkontraktion hier wieder nur einer der Beiträge zu den sichtbaren Auswirkungen der Relativitätstheorie, wie wir im Folgenden sehen werden.

Transformationen des Lichtkegels. Neben der Längenkontraktion trägt auch die Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit zum Erscheinungsbild relativistisch bewegter Körper bei. Um dies zu illustrieren stelle man sich einen Würfel vor, der senkrecht zu seiner Bewegungsrichtung beobachtet wird.



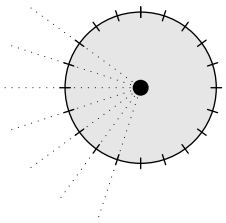
(5.122)

Zum einen ist er in seiner Bewegungsrichtung verkürzt. Zum anderen benötigt das Licht von seinen hinteren Kanten länger zum Beobachter, als jenes von den vorderen Kanten. Die Wahrnehmung des Würfels findet aber instantan beim Beobachter statt, so dass das Licht der hinteren Kanten früher ausgesendet werden muss und damit von einem Ort, der weiter in der Bewegungsrichtung zurück liegt. All dies führt dazu, dass der Würfel effektiv nicht als gestaucht, sondern eher als gekippt wahrgenommen wird.



(5.123)

Dieser Effekt erscheint recht komplex, wenn man ihn aus der Perspektive eines ruhenden Beobachters untersucht. Er ist viel leichter aus dem Ruhesystem des Körpers zu bestimmen: Dort ist das Aussehen des Körpers an jedem Punkt zeitunabhängig und unverzerrt. Ein bewegter Beobachter nimmt das Strahlungsfeld des Lichts aber anders wahr. Hierzu stellen wir uns eine kleine Sphäre um den Beobachter vor, auf der der Beobachter seine Beobachtungen in der jeweiligen Raumrichtung aufträgt.



(5.124)

Ein Punkt dieser Sphäre entspricht einem Strahl auf dem Lichtkegel mit der Richtung

$$n^\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \tag{5.125}$$

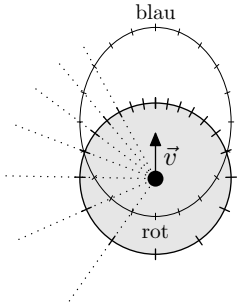
wobei wir die Zeitkomponente auf 1 normiert haben. Für einen bewegten Beobachter wird diese Richtung durch eine Lorentz-Transformation abgebildet auf

$$\bar{n}^\mu = \begin{pmatrix} \gamma + \gamma\beta\cos\vartheta \\ \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \gamma\cos\vartheta + \gamma\beta \end{pmatrix}. \tag{5.126}$$

Diese Richtung ist per Konstruktion wieder lichtartig, allerdings ist die Zeitkomponente nicht mehr normiert.[15] Nach Normierung ergeben sich die neuen Winkel

$$\cos\bar{\vartheta} = \frac{c\cos\vartheta + v}{c + v\cos\vartheta}, \qquad \bar{\varphi} = \varphi. \tag{5.127}$$

Die Sphäre des Sehens wird damit entgegen der Bewegungsrichtung gestaucht.



(5.128)

Objekte in Bewegungsrichtung erscheinen kleiner und Objekte entgegen der Bewegungsrichtung erscheinen entsprechend grösser. Objekte senkrecht zur Bewegungsrichtung werden zur Bewegungsrichtung hin verschoben. Man kann sich dann überlegen, dass die oben beschriebene scheinbare Kippung des Objekts zustandekommt, weil die Perspektive des Objekts nicht mit der Richtung übereinstimmt.

[15] Der Faktor $\gamma + \gamma\beta\cos\vartheta$ der Zeitkomponente stellt eine Frequenzverschiebung dar und entspricht genau dem Doppler-Effekt.

Teil III

Analytische Mechanik

6 Lagrange-Formalismus

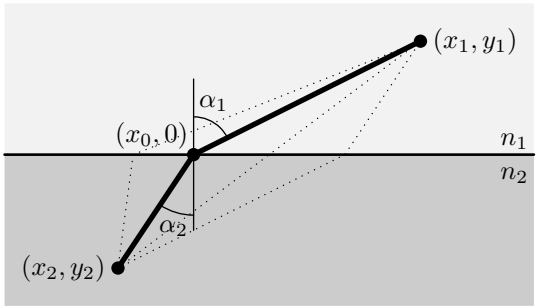
Der Lagrange-Formalismus ist eine Formulierung der klassischen Mechanik, in der die Dynamik eines Systems durch eine einzige skalare Funktion, die Lagrange-Funktion, beschrieben wird. Im Gegensatz zu den Newtonschen Bewegungsgleichungen ist sie unabhängig von der Wahl der Koordinaten und auch in beschleunigten Bezugssystemen gültig. Weiter hat der Formalismus den Vorteil, dass sich Zwangsbedingungen einfach durch eine geeignete Wahl der Koordinaten integrieren lassen. Die Lagrange-Formulierung folgt aus dem Prinzip der stationären Wirkung. Dieses Prinzip postuliert, dass die Teilchenbahnen eines Systems gerade so sind, dass die Wirkung extremal (meist minimal) ist.

6.1 Minimierungsprobleme

Wir betrachten zunächst einige allgemeine Minimierungsprobleme und leiten grundsätzliche Methoden der Variationsrechnung her, bevor wir uns der Definition und Minimierung der Wirkung zuwenden.

Fermatsches Prinzip. Motiviert ist das Prinzip der stationären Wirkung unter anderem durch Beobachtungen aus der Optik. Zum Beispiel kann man das Reflexionsgesetz und Brechungsgesetz als Extremalprinzip formulieren: Der vom Licht eingeschlagene Weg ist derjenige, für den die Zeit extremal ist, die das Licht benötigt, um vom Start- zum Endpunkt zu gelangen (*Fermatsches Prinzip*).

Wir betrachten die Konfiguration zweier optischer Medien mit Brechungsindizes n_1 und n_2 welche durch die x,z-Ebene getrennt sind. Die Koordinaten der beiden Punkte seien o.B.d.A. $(x_1, y_1, 0)$ und $(x_2, y_2, 0)$, wobei $y_1 > 0$ und $y_2 < 0$.



(6.1)

Um den Weg der kürzesten Zeit zu suchen, können wir offensichtlich annehmen, dass das Licht auf gerader Linie in Medium 1 von $(x_1, y_1, 0)$ zu einem Punkt $(x, 0, z)$ auf der Trennebene gelangt, und von dort in Medium 2 gerade zum Punkt

$(x_2, y_2, 0)$.[1] Offensichtlich sollte der Punkt auf der Trennebene für einen minimalen Weg auch in der x,y-Ebene liegen, d.h. wir können sofort $z = 0$ setzen. In einem Medium mit Brechungsindex n hat das Licht die Geschwindigkeit c/n, wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist. Die Zeit $T(x)$, die das Licht auf einer dieser Probekurven benötigt, ist deshalb

$$T(x) = \frac{n_1}{c}\sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2} + \frac{n_2}{c}\sqrt{(x-x_2)^2 + y_2^2}\,. \tag{6.2}$$

Wir suchen den Punkt $x = x_0$, für den diese Zeit minimal wird. An diesem Punkt muss die Ableitung verschwinden

$$T'(x_0) = \frac{n_1(x_0 - x_1)}{c\sqrt{(x_0-x_1)^2 + y_1^2}} + \frac{n_2(x_0 - x_2)}{c\sqrt{(x_0-x_2)^2 + y_2^2}} \stackrel{!}{=} 0. \tag{6.3}$$

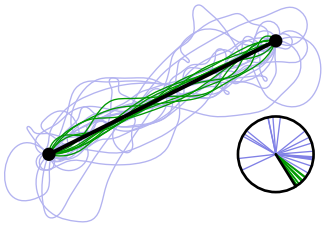
Wenn wir mit α_i den Winkel des Strahls relativ zur Normalen bezeichnen, dann ist

$$\sin\alpha_1 = \frac{x_1 - x_0}{\sqrt{(x_0-x_1)^2 + y_1^2}}\,, \qquad \sin\alpha_2 = \frac{x_0 - x_2}{\sqrt{(x_0-x_2)^2 + y_2^2}}\,. \tag{6.4}$$

Daher ist die obige Extremalbedingung gerade das *Snelliussche Brechungsgesetz*

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2. \tag{6.5}$$

Wellenoptik. Dass sich Licht innerhalb eines Mediums geradlinig bewegt und an Grenzflächen gebrochen wird, lässt sich mit Hilfe der *Wellenoptik* erklären: Licht ist ein Effekt des elektromagnetischen Feldes, welches sich in Form von Wellen ausbreitet. Dazu betrachte man eine Wellenfront als eine kollektive Anregung des Feldes. Jede lokale Anregung des Feldes breitet sich in alle Richtungen aus, und dabei ändert sich die Phase entsprechend dem zurückgelegten Weg. Die Anregungen einer Wellenfront überlagern sich nun und bilden ein bestimmtes Interferenzmuster. Bei ähnlichen zurückgelegten Weglängen kommt es zu konstruktiver Interferenz. Sind die Weglängen jedoch stark verschieden (auf der Skala der Wellenlänge des Lichts) bzw. zufällig verteilt, kommt es im Mittel zu destruktiver Interferenz.



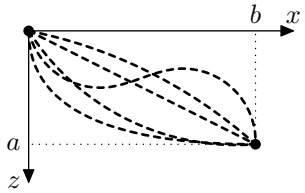
(6.6)

Der Weg minimaler Länge, d.h. eine Gerade im freien Raum, ist per Konstruktion so geartet, dass die benachbarten Wege alle ungefähr dieselbe Länge haben. Die Phase des Lichts ist somit in der Umgebung einer Geraden stationär und es kommt auf diesem Weg zu konstruktiver Interferenz. Für jeden anderen gekrümmten Weg dürfen wir im Mittel mit destruktiver Interferenz rechnen.

[1] Wir werden etwas später sehen, dass dies nicht nur offensichtlich, sondern auch tatsächlich so ist.

Demnach verhält sich Licht, zumindest auf Längenskalen, die weit oberhalb seiner Wellenlänge liegen, wie Strahlen entsprechend der geometrischen Optik. Allgemeiner breitet sich Licht dort auf Wegen extremaler Länge aus; das Fermatsche Prinzip bestimmt also die geometrische Optik. Auf der Skala der Wellenlänge der Lichts hingegen, sind die möglichen Wege in der Umgebung eines geraden Strahls auch relevant, und es kommt zu nicht-trivialen Interferenzeffekten und -mustern. Diese werden durch die Wellenoptik beschrieben und ausführlicher im Rahmen der *Elektrodynamik* diskutiert. Die geometrische Optik ergibt sich somit als Grenzfall der Wellenoptik für kleine Wellenlängen bzw. für grosse Abstände.

Brachistochronenproblem. Ein etwas komplizierteres Problem ist das sogenannte Brachistochronenproblem: Bestimme diejenige Kurve in einer vertikalen Ebene, in der ein reibungsfreier Körper unter dem Einfluss eines homogenen Schwerefeldes in der kürzesten Zeit von einem vorgegebenen Punkt zu einem anderen gelangt.



(6.7)

Wir beschreiben die Kurve durch eine Funktion

$$x = f(z), \tag{6.8}$$

wobei x die horizontale und z die nach unten gerichtete vertikale Koordinate ist. Die Randbedingungen seien

$$f(0) = 0, \qquad f(a) = b, \tag{6.9}$$

d.h. die beiden Punkte haben die Koordinaten $(0, 0)$ und (b, a) in der x,z-Ebene. Wir nehmen an, dass $b > 0$, und dass der Körper an der Stelle $x = z = 0$ in Ruhe beginnt. Wegen der Energieerhaltung $\frac{1}{2}mv^2 = mgz$ beträgt seine Geschwindigkeit in der Höhe z

$$v = \sqrt{2gz}\,. \tag{6.10}$$

Weiterhin beträgt das Streckenelement $\mathrm{d}s$ der Kurve $(f(z), z)$ seitlich von $\mathrm{d}z$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}z^2 + \mathrm{d}x^2} = \mathrm{d}z\,\sqrt{1 + f'(z)^2}\,. \tag{6.11}$$

Zum Durchlaufen der Kurve benötigt der Körper daher die Zeit

$$T[f] = \int_0^a \frac{\mathrm{d}s(z)}{v(z)} = \int_0^a \mathrm{d}z\,\sqrt{\frac{1 + f'(z)^2}{2gz}}\,. \tag{6.12}$$

Man muss jetzt diejenige *Funktion* $f(z)$ finden, für die diese Zeit minimal ist. Dies ist ein Extremalproblem in dem unendlichdimensionalen Raum der (hinreichend

oft) differenzierbaren Funktionen. Es lässt sich wie folgt auf ein Extremalproblem in einer Dimension zurückführen.

Sei f die Lösung des Extremalproblems, und sei h eine beliebige unendlich oft differenzierbare Funktion mit $h(0) = h(a) = 0$. Dann wird durch $f + \alpha h$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ eine andere Kurve beschrieben, die auch die richtigen Randbedingungen erfüllt. Da nach Voraussetzung $T[f]$ minimal ist, muss $T[f + \alpha h]$ grösser oder gleich $T[f]$ sein. Insbesondere muss daher die Ableitung von $T[f + \alpha h]$ nach α verschwinden

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} T[f + \alpha h]\bigg|_{\alpha=0} = 0. \tag{6.13}$$

Nach Vertauschen der Integration und Differentiation ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^a \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{2gz}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \sqrt{1 + \big(f'(z) + \alpha h'(z)\big)^2}\,\bigg|_{\alpha=0} \\ &= \int_0^a \frac{\mathrm{d}z\, f'(z)\, h'(z)}{\sqrt{2gz(1 + f'(z)^2)}}\,. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Schliesslich integrieren wir partiell und erhalten dann die Beziehung

$$\begin{aligned} 0 = &\left[\frac{f'(z)}{\sqrt{2gz(1 + f'(z)^2)}}\, h(z)\right]_{z=0}^{z=a} \\ &- \int_0^a \mathrm{d}z \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{f'(z)}{\sqrt{2gz(1 + f'(z)^2)}}\right) h(z). \end{aligned} \tag{6.15}$$

Die Randterme verschwinden nach Voraussetzung an die Funktion $h(z)$. Da $h(z)$ ansonsten beliebig ist, kann das Integral nur dann verschwinden, und zwar für alle denkbaren $h(z)$ gleichzeitig, falls der Faktor vor $h(z)$ im Integranden verschwindet, d.h.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{f'(z)}{\sqrt{2gz(1 + f'(z)^2)}} = 0. \tag{6.16}$$

Damit haben wir eine Differentialgleichung abgeleitet, die von der Lösung $f(z)$ des Brachistochronenproblems erfüllt werden muss!

Konkret verlangt die Differentialgleichung natürlich, dass der abgeleitete Term unabhängig von z ist, d.h. eine bestimmte Konstante c

$$\frac{f'(z)}{\sqrt{z(1 + f'(z)^2)}} = c. \tag{6.17}$$

Falls $c = 0$, dann gilt $f'(z) = 0$, und die Kurve ist eine vertikale Gerade. Dies ist die Lösung für den Fall $b = 0$. Sei nun $c > 0$, welches $b = f(a) > 0$ entspricht. Auflösen der obigen Gleichung nach $f'(z)$ ergibt

$$f'(z) = \sqrt{\frac{c^2 z}{1 - c^2 z}}\,. \tag{6.18}$$

Aufgrund der Form von $f'(z)$ substituieren wir jetzt eine geeignete trigonometrische Funktion

$$z(\phi) = \frac{1}{c^2}\sin^2(\tfrac{1}{2}\phi) = \frac{1}{2c^2}\,(1-\cos\phi), \tag{6.19}$$

so dass

$$\begin{aligned} f'(z) &= \sqrt{\frac{\sin^2(\frac{1}{2}\phi)}{\cos^2(\frac{1}{2}\phi)}} = \tan(\tfrac{1}{2}\phi), \\ \mathrm{d}z &= z'(\phi)\,\mathrm{d}\phi = \frac{1}{c^2}\sin(\tfrac{1}{2}\phi)\cos(\tfrac{1}{2}\phi)\,\mathrm{d}\phi\,. \end{aligned} \tag{6.20}$$

Dann ergibt sich für $x(\phi) := f\big(z(\phi)\big)$

$$\begin{aligned} x(\phi) &= \int_0^{z(\phi)} \mathrm{d}z'\, f'(z') \\ &= \frac{1}{c^2}\int_0^{\phi} \mathrm{d}\phi'\sin(\tfrac{1}{2}\phi')\cos(\tfrac{1}{2}\phi')\tan(\tfrac{1}{2}\phi') \\ &= \frac{1}{c^2}\int_0^{\phi} \mathrm{d}\phi'\sin^2(\tfrac{1}{2}\phi') = \frac{1}{2c^2}\int_0^{\phi}\mathrm{d}\phi'\,(1-\cos\phi') \\ &= \frac{1}{2c^2}\,(\phi-\sin\phi). \end{aligned} \tag{6.21}$$

Weiterhin können wir die Zeit $t(\phi)$, zu der der Punkt ϕ durchquert wird, ausdrücken durch

$$t(\phi) = \int_0^{z(\phi)} \mathrm{d}z'\,\sqrt{\frac{1+f'(z')^2}{2gz'}} = \int_0^{\phi}\frac{\mathrm{d}\phi'}{\sqrt{2g}\,c} = \frac{\phi}{\sqrt{2g}\,c}\,. \tag{6.22}$$

Der obige Ansatz für $z(\phi)$ war zufälligerweise so gewählt, dass ϕ bis auf einen Faktor bereits der Zeit t entspricht.

Die gesuchte Kurve schreibt sich mit Hilfe des Parameters ϕ also als

$$\begin{aligned} x(\phi) &= \frac{1}{2c^2}\,(\phi-\sin\phi), \\ z(\phi) &= \frac{1}{2c^2}\,(1-\cos\phi), \\ t(\phi) &= \frac{1}{\sqrt{2g}\,c}\,\phi. \end{aligned} \tag{6.23}$$

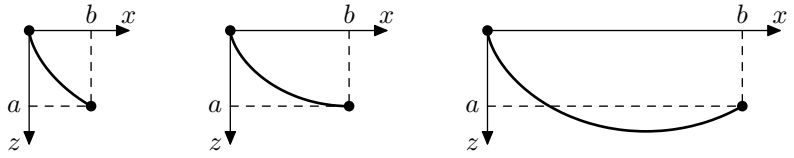
Dies ist gerade die *Zykloide*, also die Bahn eines Punktes auf der Peripherie eines Kreises mit Radius $R := 1/2c^2$, der auf der Geraden $z = 0$ abrollt. Dies folgt daraus, dass die obige Kurve die folgende Gleichung erfüllt

$$\big(x(\phi)-R\phi\big)^2 + \big(z(\phi)-R\big)^2 = R^2. \tag{6.24}$$

Schliesslich bestimmt man die Konstante c aus der Bedingung, dass es genau ein $\phi_0 \in [0, 2\pi]$ gibt, so dass $x(\phi_0) = b$ und $z(\phi_0) = a$, d.h.[2]

$$\frac{b}{a} = \frac{\phi_0 - \sin\phi_0}{1 - \cos\phi_0}\,, \qquad c = \frac{\sin(\frac{1}{2}\phi_0)}{\sqrt{a}}\,. \tag{6.25}$$

Die Zeit zum Durchlaufen dieser Kurve kann dann durch Einsetzen der Lösung berechnet werden zu $T[f] = \phi_0/\sqrt{2g}\,c$.



(6.26)

6.2 Die Euler-Lagrange-Gleichungen

Das Brachistochronenproblem, das von den schweizer Mathematikern Johann und Jakob Bernoulli 1697 gelöst wurde, war historisch der Ausgangspunkt für eine allgemeine Untersuchung von *Extremalproblemen* für *Funktionale* S der Form

$$S[f] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, s\big(f(x), f'(x), x\big), \tag{6.27}$$

wobei $s(f, f', x)$ eine zweimal stetig differenzierbare reelle Funktion von drei reellen Variablen, und f eine zweimal stetig differenzierbare reelle Funktion auf dem Intervall $[x_1, x_2]$ ist, deren Werte bei x_1 und x_2 vorgegeben sind.

Variation. Mit denselben Überlegungen wie im Abschnitt 6.1 können wir eine Bedingung an die Funktion f bestimmen, die das Funktional $S[f]$ extremal macht. Wir wollen diese im Formalismus der Variationsrechnung herleiten, die in der theoretischen Physik gebräuchlich ist und mit der sich viele Herleitungen der analytischen Mechanik recht bequem formulieren lassen. Dazu erinnern wir zunächst an die Definition des *totalen Differentials* $\mathrm{d}F$ einer Funktion $F(x)$ von n Variablen $x = (x_1, \ldots, x_n)$

$$\mathrm{d}F(x) := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}\,(x)\,\mathrm{d}x_j\,. \tag{6.28}$$

Hier bilden die $\mathrm{d}x_j$ formal eine Basis des n-dimensionalen Vektorraums der Differentiale (Kotangentialraum bei x). Insbesondere stellt der Koeffizient von $\mathrm{d}x_j$ in $\mathrm{d}F(x)$ die partielle Ableitung von F nach x_j im Punkt x dar. Das totale

[2] Man beachte, dass für $\phi_0 > \pi$ die obige Funktion $x = f(z)$ im Bereich $z > a$ zwei Werte annehmen müsste; in der Parametrisierung $x(\phi), z(\phi)$ behält die Herleitung aber ihre Gültigkeit. Zudem haben die obigen Gleichungen weitere Lösungen mit $\phi_0 > 2\pi$, allerdings stellen diese nur lokale Minima, nicht aber globale Minima dar.

Differential ist somit im Wesentlichen die Ableitung von F nach allen ihrer Argumente.[3]

Wir können das totale Differential aber auch als die lineare Änderung der Funktion unter einer kleinen Änderung $\mathrm{d}x_i$ ihrer Argumente x_i ausdrücken

$$\begin{aligned}\mathrm{d}F(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\, F(x+\epsilon\,\mathrm{d}x)\bigg|_{\epsilon=0} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}\,(x+\epsilon\,\mathrm{d}x)\,\frac{\partial(x_j+\epsilon\,\mathrm{d}x_j)}{\partial\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}\,(x)\,\mathrm{d}x_j\,. \end{aligned} \tag{6.29}$$

Dies entspricht dem Ausdruck, dem wir weiter oben zur Minimierung eines Funktionals $S[f]$ verwendet haben. Die *Variation* δ ist eine Verallgemeinerung des totalen Differentials, die auch auf Funktionale $S[f]$ angewendet wird

$$\delta S[f] := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\, S[f+\epsilon\,\delta f]\bigg|_{\epsilon=0}. \tag{6.30}$$

Hier ist δf eine beliebige Funktion, und der Koeffizient von $\delta f(x)$ in δS stellt die lineare Änderung des Funktionals unter einer kleinen Änderung von f im Punkt x dar. Allgemeiner werden Variationen in der Physik auch verwendet, um die Abhängigkeit eines Objekts von seinen Parametern,[4] bzw. die Änderung eines solchen unter einer kontinuierlichen Transformation in linearer Näherung zu beschreiben.

Euler-Lagrange-Gleichungen. Sei f eine Funktion, für die das Funktional $S[f]$ extremal ist. Dann muss die Variation von S bei dem Argument f verschwinden

$$\delta S[f] \stackrel{!}{=} 0, \tag{6.31}$$

wobei δf eine beliebige Funktion ist, bei der wir uns auf $\delta f(x_1) = \delta f(x_2) = 0$ beschränken. Man erhält aus dieser Extremalbedingung[5]

$$0 = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \left[\delta f(x)\,\frac{\partial s}{\partial f}\left(f(x), f'(x), x\right)\right.$$

[3] Für Funktionen auf Vektorräumen entspricht die totale Ableitung dem Gradienten mit $\mathrm{d}F = (\partial F/\partial\vec{x})\cdot\mathrm{d}\vec{x}$.

[4] Wie im totalen Differential können alle solche Abhängigkeiten auf einmal betrachtet werden, man kann sich aber auch auf die relevanten Abhängigkeiten beschränken.

[5] Wir bezeichnen die Argumente der Funktion $s(f, f', x)$ mit f, f' und x und somit bezeichnen $\partial s/\partial f$ und $\partial s/\partial f'$ die partiellen Ableitungen von s nach ihrem ersten bzw. zweiten Argument. Hier sind a priori f und f' unabhängige Variablen; erst nach Auswertung der partiellen Ableitungen werden die Funktion $f(x)$ und ihre Ableitung $f'(x)$ eingesetzt. Man beachte, dass der Ausdruck $s = s(f(x), f'(x), x)$ zwar oft mit $s = s(f, f', x)$ abgekürzt wird, aber umgekehrt $s = s(f, f', x)$ nicht immer $s = s(f(x), f'(x), x)$ bedeutet.

$$
\begin{aligned}
&\qquad + \delta f'(x)\, \frac{\partial s}{\partial f'}\big(f(x), f'(x), x\big)\Big] \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, \delta f(x) \Big[\frac{\partial s}{\partial f}\big(f(x), f'(x), x\big) \\
&\qquad - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial s}{\partial f'}\big(f(x), f'(x), x\big)\right)\Big], \qquad (6.32)
\end{aligned}
$$

wobei wir in der letzten Gleichung wiederum partiell integriert haben und ausgenutzt haben, dass die Randterme wegen $\delta f(x_1) = \delta f(x_2) = 0$ nicht beitragen. Da diese Gleichung für beliebige $\delta f(x)$ gelten muss, folgt daraus, dass eine Funktion f, die das Extremalproblem löst, die folgende Differentialgleichung erfüllt

$$
\frac{\partial s}{\partial f}\big(f(x), f'(x), x\big) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\partial s}{\partial f'}\big(f(x), f'(x), x\big)\right] = 0. \qquad (6.33)
$$

Diese Gleichung wird *Euler-Lagrange-Gleichung* genannt. Wenn man die Ableitung nach x ausschreibt, so erkannt man, dass die Gleichung typischerweise eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ist,

$$
\frac{\partial^2 s}{(\partial f')^2}\big(f(x), f'(x), x\big)\, f''(x) = \ldots. \qquad (6.34)
$$

Eine Differentialgleichung zweiter Ordnung erlaubt es, Anfangsbedingungen für $f(x)$ und $f'(x)$ frei zu wählen. Somit bestimmen die beiden Randbedingungen an $f(x)$ die Funktion in der Regel vollständig.[6]

Die obige Herleitung für den Fall eines Funktionals $S[f]$ einer reellen Funktion f lässt sich leicht auf den Fall eines Funktionals n reeller Funktionen f_i verallgemeinern.[7] Dann hängt s von mehreren Funktionen $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ sowie ihren Ableitungen ab,

$$
s := s\big(f_1, \ldots, f_n; f_1', \ldots, f_n'; x\big), \qquad (6.35)
$$

so bestehen die Euler-Lagrange-Gleichungen aus n Gleichungen der Form (6.33), je einer für jedes $f_i(x)$

$$
\frac{\partial s}{\partial f_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial s}{\partial f_i'} = 0. \qquad (6.36)
$$

Diese n Differentialgleichungen zweiter Ordnung zusammen mit den Randbedingungen legen die n Funktionen in der Regel vollständig fest.

Man beachte, dass die obige Kurzform (6.36) der Euler-Lagrange-Gleichungen die Zeitabhängigkeit von $f = f(x)$ und $f' = f'(x)$ und von $s = s(f(x), f'(x), x)$ nicht explizit aufführt. In dieser Form impliziert die *totale Ableitung* $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$, dass der folgende Ausdruck unter der Annahme $f = f(x)$ und $f' = f'(x)$ ausgewertet wird

[6] Vollständige Bestimmtheit bedeutet hier, dass keine kontinuierlichen Freiheitsgrade verbleiben. Es ist möglich, dass keine oder mehrere diskrete Lösungen existieren. Die individuellen Lösungen f_i stellen lokale Extrema bzw. stationäre Punkte des Funktionals $S[f]$ dar.

[7] Gleichwertig kann man den Satz von Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als eine einzige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ oder $f : \mathbb{R} \to \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ betrachten.

und somit neben der expliziten x-Abhängigkeit auch die implizite x-Abhängigkeit via $f(x)$ und $f'(x)$ beiträgt. Die totale Ableitung einer Funktion $s(f, f', x)$ implementiert somit die Kettenregel für die impliziten Abhängigkeiten mit der Definition[8]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} := \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} \left[f'_j \frac{\partial}{\partial f_j} + f''_j \frac{\partial}{\partial f'_j} \right]. \tag{6.37}$$

so dass für jede Funktion $s(f, f', x)$ und jede Funktion $f(x)$ gilt

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}\right)\big(f(x), f'(x), x\big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(s\big(f(x), f'(x), x\big)\Big). \tag{6.38}$$

Die totale Ableitung entspricht im Übrigen der Definition des totalen Differentials in (6.28)

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}x \frac{\partial s}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} \left[\mathrm{d}f_j \frac{\partial s}{\partial f_j} + \mathrm{d}f'_j \frac{\partial s}{\partial f'_j} \right], \tag{6.39}$$

wobei nach Einsetzen $\mathrm{d}f_j = \mathrm{d}x\, f'_j$ und $\mathrm{d}f'_j = \mathrm{d}x\, f''_j$ gilt.

Geodäte im Euklidischen Raum. Bevor wir besprechen, wie sich die Gesetze der Mechanik als Extremalprinzip beschreiben lassen, wollen wir noch ein paar Beispiele zur Variationsrechnung besprechen, um uns damit besser vertraut zu machen.

Seien $\vec{x}_0$ und $\vec{y}_0$ zwei Punkte in der Euklidischen Ebene. Jede beliebige Kurve $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ zwischen diesen zwei Punkten lässt sich beschreiben durch eine Bahn

$$\vec{x} : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \qquad [0,1] \mapsto \mathcal{C}, \tag{6.40}$$

wobei $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ und $\vec{x}(1) = \vec{x}_1$. Die Länge der Kurve ist

$$L[\mathcal{C}] = \int_0^1 \mathrm{d}\sigma \, \sqrt{x'^2 + y'^2}. \tag{6.41}$$

Das Problem, die *Geodäte* als kürzeste Verbindungsstrecke zu finden, führt dann zu den Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x'^2 + y'^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} \frac{\partial}{\partial x'} \sqrt{x'^2 + y'^2} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{x'^2 + y'^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} \frac{\partial}{\partial y'} \sqrt{x'^2 + y'^2} &= 0. \end{aligned} \tag{6.42}$$

Der erste Term auf der linken Seite verschwindet jeweils, da die Wurzel nur von x' und y' abhängt, nicht aber von x und y. Daher folgt die Konstanz der beiden Grössen

$$\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \qquad \text{und} \qquad \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\,. \tag{6.43}$$

[8]Die totale Ableitung $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ wirkt auf den Raum der Funktionen $s(f, f', x)$, bei denen f, f' und x unabhängige Parameter sind. Setzt man dort eine beliebige Funktion $f(x)$ ein, so ist die totale Ableitung äquivalent zur Ableitung der Funktion $s(f(x), f'(x), x)$, die nur von x abhängt. Die totale Ableitung einer Funktion, die nicht von f oder f' abhängt sei als die reguläre Ableitung definiert.

Diese sind gerade die Komponenten des Einheitsvektors in Richtung der Tangente der Kurve. Die Kurve ändert also nirgends ihre Richtung und ist somit eine Gerade. Die Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen lautet

$$\vec{x}(\sigma) = \vec{x}_0 + (\vec{x}_1 - \vec{x}_0)\tilde{\sigma}(\sigma), \tag{6.44}$$

wobei die Parametrisierung mit $\tilde{\sigma}(\sigma)$ nur über die Randwerte $\tilde{\sigma}(0) = 0$, $\tilde{\sigma}(1) = 1$ festgelegt ist. Die Verallgemeinerung auf den $\mathbb{R}^n$ ist offensichtlich.

Geodäte auf einer Sphäre. Als zweites Beispiel analysieren wir die kürzeste Verbindungslinie zwischen zwei Punkten auf einer Kugeloberfläche. Wir parametrisieren die Sphäre mit Radius r durch die Kugelkoordinaten

$$(x, y, z) = r(\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta). \tag{6.45}$$

Die Kurve wird wie zuvor durch $\sigma \mapsto (\vartheta(\sigma), \varphi(\sigma))$ beschrieben, und das Längenelement beträgt

$$\mathrm{d}t\,\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = r\,\mathrm{d}\sigma\,\sqrt{\vartheta'^2 + \varphi'^2\sin^2\vartheta}\,. \tag{6.46}$$

Damit ist die Länge der Kurve

$$L[\mathcal{C}] = r\int_0^1 \mathrm{d}\sigma\,\sqrt{\vartheta'^2 + \varphi'^2\sin^2\vartheta}\,. \tag{6.47}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten nun

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\,\frac{\varphi'\sin^2\vartheta}{\sqrt{\vartheta'^2 + \varphi'^2\sin^2\vartheta}} = 0, \tag{6.48}$$

sowie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\,\frac{\vartheta'}{\sqrt{\vartheta'^2 + \varphi'^2\sin^2\vartheta}} = \frac{\varphi'^2\sin\vartheta\,\cos\vartheta}{\sqrt{\vartheta'^2 + \varphi'^2\sin^2\vartheta}}\,. \tag{6.49}$$

O.B.d.A. wählen wir als Anfangspunkt der Kurve C den Nordpol $\vartheta_0 = 0$ und einen beliebigen Punkt (ϑ_1, φ_1) als Endpunkt. Dann impliziert die erste Gleichung

$$\frac{\varphi'\sin^2\vartheta}{\sqrt{\vartheta'^2 + \varphi'^2\sin^2\vartheta}} = \mathrm{const}\,. \tag{6.50}$$

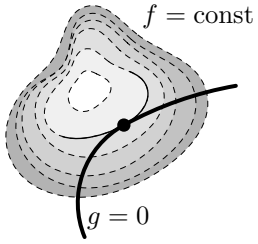
Nun ist die Koordinate φ im Nordpol $\vartheta = 0$ singulär, was die Behandlung des Anfangspunkts erschwert. Für eine differenzierbare Kurve, die den Nordpol tatsächlich verlässt, können wir annehmen, dass $\vartheta'(0) > 0$ und $\varphi'(0)$ endlich. Im Grenzwert $t \to 0$ ist der obige Ausdruck Null, aufgrund der Konstanz ist er damit auch für alle t gleich Null und somit $\varphi'(t) = 0$. Dies genügt bereits, um auch die zweite Gleichung zu erfüllen. Die kürzeste Verbindungslinie zu dem Endpunkt verläuft daher auf dem Grosskreis

$$\big(\vartheta(\sigma), \varphi(\sigma)\big) = \big(\vartheta_1\tilde{\sigma}(\sigma), \varphi_1\big). \tag{6.51}$$

6.3 Lagrange-Multiplikatoren

Oft möchte man ein Extremum einer Funktion bzw. eines Funktionals unter gewissen Nebenbedingungen finden. Zu diesem Zweck führen wir die Methode der Lagrange-Multiplikatoren ein.

Lagrange-Multiplikatoren. Die Methode der *Lagrange-Multiplikatoren* erlaubt es, das Maximum einer Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ unter der Nebenbedingung $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$ zu finden.



(6.52)

Für $n = 2$ kann man das Problem gut visualisieren indem man $f(x_1, x_2)$ als Höhe über der 1,2-Ebene betrachtet. Wenn man dem durch $g = 0$ beschriebenen Weg entlang folgt, so muss beim Maximum von f auf diesem Weg letzterer parallel zu der Höhenlinie von f in diesem Punkt verlaufen. Ebenso müssen die Gradienten von f und g, die senkrecht zu der Höhenlinie bzw. den Weg liegen, parallel sein.

Dies gilt auch für allgemeinere Probleme: Ein Extremwert ist erreicht, wenn die Gradienten von f und g parallel sind, wenn also für ein geeignetes λ gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0 \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, n. \tag{6.53}$$

Der Parameter λ wird Lagrange-Multiplikator genannt. Zur Formulierung des Problems als Extremalproblem definiert man eine neue Funktion

$$F(x_1, \ldots, x_n, \lambda) := f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda g(x_1, \ldots, x_n). \tag{6.54}$$

Die Bedingungen für ein Extremum lauten also

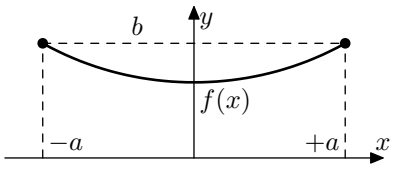
$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0. \tag{6.55}$$

Die erste Bedingung ist genau die obige Parallelitätsbedingung (6.53) und die zweite implementiert die Nebenbedingung

$$g = 0. \tag{6.56}$$

An dem Extremalpunkt gilt deswegen auch $F = f$.

Die Kettenlinie. Im Folgenden werden wir diese Methode auf die Optimierung von Funktionalen an, d.h. die Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n)$ werden durch Funktionen ersetzt. Als Beispiel betrachten wir die sogenannte Kettenlinie.



(6.57)

Eine Kette mit homogener linearer Massendichte ρ und Länge ℓ, ist unter dem Einfluss eines homogenen vertikalen Schwerefeldes zwischen den Punkten $(-a, b)$ und (a, b) aufgehängt. Wir wollen berechnen, welche Form die aufgehängte Kette im Gleichgewicht annimmt. Wir suchen also die Funktion $f(x)$, die die Randbedinungen $f(-a) = b = f(a)$ erfüllt, und für die die potentielle Energie $V[f]$ minimiert wird mit

$$V[f] = g\rho \int_{-a}^{a} \mathrm{d}s(x)\, f(x). \tag{6.58}$$

Da g und ρ konstant sind und uns der Wert von $V[f]$ letztlich nicht interessiert, können wir diese Faktoren auf 1 setzen. Mit dem Euklidischen Längenelement $\mathrm{d}s := \mathrm{d}x\, \sqrt{1 + f'(x)^2}$ folgt

$$V[f] = \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x\, f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}. \tag{6.59}$$

Natürlich hat dieses Variationsproblem nur dann eine vernünftige Lösung, wenn wir uns auf Kurven beschränken, deren Länge gerade ℓ ist

$$\ell \stackrel{!}{=} L[f] := \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x\, \sqrt{1 + f'(x)^2}. \tag{6.60}$$

Um dieses Problem im Rahmen der oben angegebenen Methode behandeln zu können, führen wir einen sogenannten Lagrange-Multiplikator ein: Wir betrachten das Problem als Variationsproblem von $f(x)$ und λ, wobei λ ein Parameter ist, und keine Funktion. Wir müssen also das Funktional $V[f] + \lambda(L[f] - \ell)$ minimieren. Um auch den Term $\lambda\ell$ als Funktional zu schreiben, können wir formal ℓ als das Integral $\int_{-a}^{a} \mathrm{d}x\, \ell/2a$ schreiben. Die Nebenbedingung lautet schliesslich

$$\int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \left(\sqrt{1 + f'(x)^2} - \frac{\ell}{2a} \right) = 0. \tag{6.61}$$

Wir betrachten also das Funktional

$$S[f; \lambda] := \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x\, s\big(f(x), f'(x); \lambda\big) \tag{6.62}$$

mit dem Integranden

$$s(f, f'; \lambda) := f \sqrt{1 + f'^2} + \lambda \left(\sqrt{1 + f'^2} - \frac{\ell}{2a} \right). \tag{6.63}$$

Die Bedingung $\partial S/\partial\lambda = 0$, dass S als Funktion von λ extremal ist, ist dann genau die Nebenbedingung (6.61). Für die Kurven $f(x)$, die diese Nebenbedingung erfüllen, ist $S[f;\lambda] = V[f]$, und daher minimieren wir tatsächlich die potentielle Energie.

Die Euler-Lagrange-Gleichung für $f(x)$ lautet nun

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\big(f(x)+\lambda\big)f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}\right) = \sqrt{1+f'(x)^2}\,. \tag{6.64}$$

Wir definieren $g(x) = f(x) + \lambda$, und erhalten nach Differentiation

$$\frac{g'^2 + gg''}{\sqrt{1+g'^2}} - \frac{g\,g'^2\,g''}{(1+g'^2)^{3/2}} = \sqrt{1+g'^2}\,. \tag{6.65}$$

Multiplikation mit der positiven Funktion $(1+g'^2)^{3/2}$ führt zu der einfacheren Gleichung

$$g'^2 - gg'' + 1 = 0. \tag{6.66}$$

Um die Lösung dieser Differentialgleichung zu erhalten, beobachten wir, dass sich die weitere Ableitung nach x schreiben lässt als

$$2g'g'' - g'g'' - gg''' = -g^2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{g''}{g}\right) = 0. \tag{6.67}$$

Wir müssen nun zwei Fälle unterscheiden. Im Fall $g(x) = 0$ für alle x ist die Kette mit $\ell = 2a$ straff gespannt. Anderenfalls werden wir sehen, dass $g(x) \neq 0$ und es folgt die lineare Differentialgleichung

$$g'' = cg. \tag{6.68}$$

Die allgemeine Lösung davon ist

$$g(x) = A\cosh(\sqrt{c}\,x) + B\sinh(\sqrt{c}\,x). \tag{6.69}$$

Aus den symmetrischen Randbedingungen folgt $g(-a) = g(a)$, und daher ist $B = 0$. Einsetzen der Lösung $g(x)$ in die ursprüngliche Differentialgleichung (6.66) ergibt

$$A^2\,c\sinh^2(\sqrt{c}\,x) - A^2\,c\cosh^2(\sqrt{c}\,x) + 1 = 0, \tag{6.70}$$

was zu $A^2c = 1$ führt. Die gesuchte Funktion $f(x)$ differiert von $g(x)$ um λ, und daher haben wir für $f(x)$ gerade

$$f(x) = \lambda + A\cosh\frac{x}{A}\,. \tag{6.71}$$

Die Werte von A und λ werden dann durch die Randbedingung $f(a) = b$ sowie durch die Nebenbedingung der Länge (6.61) eindeutig festgelegt. Zusammen lauten sie

$$b = \lambda + A\cosh\frac{a}{A}\,, \qquad 2A\sinh\frac{a}{A} = \ell. \tag{6.72}$$

Die Gleichung für A hat eine eindeutige Lösung, die sich aber nicht explizit mittels elementarer Funktionen ausdrücken lässt.

6.4 Prinzip der stationären Wirkung

Auch die Gesetze der Mechanik lassen sich (zumindest in einem konservativen Kraftfeld, d.h. einem Kraftfeld, das durch ein Potential beschrieben werden kann) aus einem Extremalprinzip ableiten.

Lagrange-Funktion und Wirkung. Wir betrachten dazu ein Teilchen der Masse m in einem Potential $\vec{V}(\vec{x})$. Die kinetische Energie T ist wie wie üblich gegeben durch

$$T = \tfrac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2. \tag{6.73}$$

Wir definieren dann die *Lagrange-Funktion* als *Differenz* der kinetischen Energie T und der potentiellen Energie V.

$$L := T - V, \tag{6.74}$$

Die Lagrange-Funktion ist somit eine Funktion der der Ortskoordinaten $\vec{x}$ und der Geschwindigkeiten $\dot{\vec{x}}$. Dann betrachten wir das Funktional[9]

$$S[\vec{x}] := \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \, L\big(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t)\big), \tag{6.75}$$

welches die *Wirkung*[10] der Bahn $\vec{x}(t)$ genannt wird.

Wir suchen nach der Bahn $\vec{x}(t)$, welche zu einem Extremalwert dieses Funktionals führt, wobei wir den Anfangspunkt $\vec{x}(t_0)$ und den Endpunkt $\vec{x}(t_1)$ festhalten wollen.[11] [12] Die Euler-Lagrange-Gleichungen zu dem Variationsproblem $\delta S[\vec{x}] = 0$ lauten

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = 0, \tag{6.76}$$

[9] Die Zeiten t_0 und t_1 haben keine elementare Bedeutung in der Physik. Im Rahmen einer Messung können wir sie als Start- und Endzeit des Experiments betrachten, an denen wir den Zustand des Systems präparieren bzw. messen und zwischen denen wir die Dynamik ganz der Physik überlassen. Für die Formulierung allzeit gültiger physikalischer Gesetze bietet es sich hingegen an, die Zeiten nach unendlich gehen zu lassen, $(t_0, t_1) \to (-\infty, +\infty)$. Allerdings wäre dann die mathematische Beschreibung aufgrund des nichtkompakten Gebiets komplizierter. Die Wahl der Zeiten t_0 und t_1 wird sich aber als irrelevant für die Bewegungsgleichungen herausstellen.

[10] Die Bezeichnung *Wirkung* für das Funktional S hat nichts mit dem Konzept einer *Wirkung* von etwas auf etwas anderes zu tun.

[11] Die Festlegung des Anfangs- und Endpunkts ist äquivalent zur Festlegung der Anfangsbedingungen an Ort und Geschwindigkeit: Dazu legen wir einen Startpunkt $\vec{x}_0$ zur Zeit t_0 fest, und stellen die Geschwindigkeit $\vec{v}_0$ an diesem Zeitpunkt genau so ein, dass der gewünschte Endpunkt $\vec{x}_1$ zur Zeit t_1 getroffen wird. Dieses Zuordnungsproblem $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) \to \vec{v}_0$ besitzt zwar nicht unbedingt immer eine Lösung, und die Lösung muss nicht eindeutig sein. Zumindest aber sollte die Lösungsmenge in der Regel diskret sein, da es für jede unbekannte Geschwindigkeitskomponente genau eine Gleichung gibt. Umgekehrt bestimmen $\vec{x}_0$ und $\vec{v}_0$ natürlich $\vec{x}_1$ immer eindeutig.

[12] Man kann sich fragen, warum das Prinzip der stationären Wirkung anhand von Start- und Endwerten des Ortes und nicht anhand von Anfangsbedingungen an Ort und Geschwindigkeit formuliert ist: Zum einen liefert es das gewünschte Ergebnis. Zum anderen ist es schwierig, ein Variationsproblem mit Anfangsbedingungen so zu formulieren, dass die Bewegungsgleichungen korrekt reproduziert werden.

wobei $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ die totale zeitliche Ableitung bezeichnet. Nun ist

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = m\dot{\vec{x}} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{x}} = \vec{F}, \tag{6.77}$$

wobei $\vec{F}$ die durch das Potential V beschriebene Kraft ist. Die Euler-Lagrange-Gleichung ergibt hier demnach

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}, \tag{6.78}$$

was gerade die Newtonsche Bewegungsgleichung unseres Teilchens ist. Wir haben also die Bewegungsgleichung als Extremalbedigung des Wirkungsfunktionals $S[\vec{x}]$ formuliert.

Es ist klar, dass dieselbe Argumentation auch für den Fall von n Teilchen in einem Potential $V(x)$ zutrifft, und ihre Bewegungsgleichungen als Extremalbedigung geschrieben werden können. Das *Prinzip der stationären Wirkung* (*Hamiltonsches Prinzip*) besagt, dass sich die Dynamik recht allgemeiner mechanischer Systeme auf diese Art formulieren lassen: Hierbei definiert die Differenz der kinetischen und potentiellen Energie des Systems wieder die Lagrange-Funktion

$$L = T - V. \tag{6.79}$$

Sie ist eine Funktion der Ortskoordinaten $q^\alpha(t)$, der Geschwindigkeiten $\dot{q}^\alpha(t)$ und möglicherweise auch der Zeit t. Das Wirkungsfunktional lautet

$$S[q] = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, L\big(q(t), \dot{q}(t), t\big), \tag{6.80}$$

Eine Bahn $q^\alpha(t)$ erfüllt die Bewegungsgleichungen genau dann, wenn sie zu einem Extremalwert der Wirkung führt, $\delta S[q] = 0$. Für dieses Variationsproblem wollen wir wieder den Anfangspunkt $q(t_0)$ und den Endpunkt $q(t_1)$ festhalten. Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten dann

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0. \tag{6.81}$$

Die Dynamik eines solchen Systems wird vollständig durch seine Lagrange-Funktion beschrieben. Die Gesamtheit der Kraftgesetze lässt sich also mit einer einzigen skalaren Funktion $L(q, \dot{q}, t)$ ausdrücken.

Elektrisch geladenes Teilchen. Wir haben bereits gesehen, wie sich Systeme mit einem oder mehreren Teilchen, deren Kraftgesetz durch ein Potential V bestimmt ist, mittels einer Lagrange-Funktionen $L = T - V$ beschreiben lassen. Ein Beispiel für eine Lagrange-Funktion, die nicht direkt diesem Schema folgt, ist durch die Lorentz-Kraft auf ein elektrisch geladenes Teilchen im *elektromagnetischen Feld* gegeben.[13]

[13]Die Diskussion greift mit den Maxwell-Gleichungen und elektromagnetischen Potentialen zwar auf Konzepte der Vorlesung *Elektrodynamik* vor. Wir wollen sie hier als gegeben voraussetzen und zur detaillierte Herleitung und Besprechung auf die weiterführende Vorlesung verweisen.

Interessanterweise lässt sich die Lorentz-Kraft nicht direkt über die elektromagnetischen Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ mittels Lagrange-Funktion formulieren. Die homogenen Maxwell-Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{B} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \tag{6.82}$$

implizieren aber, dass sich die Felder durch *elektromagnetische Potentiale* Φ und $\vec{A}$ darstellen lassen

$$\vec{B} = \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \times \vec{A}, \qquad \vec{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \vec{x}} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\,. \tag{6.83}$$

Mithilfe dieser Potentiale können wir nun eine passende Lagrange-Funktion für die Bewegung eines Teilchens $\vec{x}(t)$ mit Masse m und elektrischer Ladung q formulieren

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \tfrac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - q\Phi(\vec{x}, t) + q\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t). \tag{6.84}$$

In der Tat ist dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_k} &= -q\,\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} + q \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i\,\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\,, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} &= m\dot{x}_k + qA_k, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} &= m\ddot{x}_k + q\,\frac{\partial A_k}{\partial t} + q \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i\,\frac{\partial A_k}{\partial x_i}\,, \end{aligned} \tag{6.85}$$

so dass die Euler-Lagrange-Gleichung den bekannten Ausdruck für die Lorentz-Kraft ergibt

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_k &= q\left[-\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial t}\right] + q \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i \left[\frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i}\right] \\ &= qE_k + q(\dot{\vec{x}} \times \vec{B})_k \end{aligned} \tag{6.86}$$

bzw. in Vektornotation $m\ddot{\vec{x}} = q\vec{E} + q\dot{\vec{x}} \times \vec{B}$. Das zeigt, dass die obige Lagrange-Funktion die Bewegung des geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld korrekt beschreibt.

Äquivalente Lagrange-Funktionen. Eine interessante Tatsache ist, dass die Lagrange-Funktion eines Systems nicht eindeutig bestimmt ist: Zwei Lagrange-Funktionen L und $\tilde{L}$, die sich nur um die totale zeitliche Ableitung einer Funktion $F(q, t)$ unterscheiden

$$\tilde{L} = L + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = L + \sum_{\alpha=1}^{N} \dot{q}^\alpha\,\frac{\partial F}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial F}{\partial t}\,, \tag{6.87}$$

beschreiben dieselbe Dynamik. Diese Äquivalenz ist insbesondere für das elektrisch geladene Teilchen relevant.

Zunächst wollen wir diese Äquivalenzeigenschaft direkt zeigen. Dazu rechnen wir die benötigten Terme der Euler-Lagrange-Gleichungen für die Lagrange-Funktion $\tilde{L}$ aus

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^\alpha} &= \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} + \sum_{\beta=1}^{N} \dot{q}^\beta \, \frac{\partial^2 F}{\partial q^\alpha \, \partial q^\beta} + \frac{\partial^2 F}{\partial t \, \partial q^\alpha}\,, \\ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} + \frac{\partial F}{\partial q^\alpha}\,. \end{aligned} \tag{6.88}$$

Hier sind die zwei zusätzlichen Terme in der ersten Zeile genau die totale Zeitableitung des zusätzlichen Terms der zweiten Zeile. Somit hat $\tilde{L}$ dieselben Euler-Lagrange-Gleichungen wie L. Dies ist nicht weiter erstaunlich, denn die Wirkungen der beiden Lagrange-Funktionen unterscheiden sich lediglich durch eine Konstante

$$\tilde{S}[q] = S[q] + \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \, \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = S[q] + \big[F(q(t),t)\big]_{t_0}^{t_1}. \tag{6.89}$$

Man beachte hier, dass die Funktion $F(q,t)$ nur von den $q^\alpha(t)$ abhängt, welche bei der Variation typischerweise zu den Randzeiten $t = t_0, t_1$ festgehalten werden; sie hängt insbesondere nicht von den $\dot{q}^\alpha(t)$ ab. Ein konstanter Beitrag zur Wirkung ändert aber nichts an den Extremalbahnen.

Ändert man in dem obigen Beispiel die elektromagnetischen Potentiale $(\Phi, \vec{A})$ durch eine *Eichtransformation*

$$\Phi \to \Phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}\,, \qquad \vec{A} \to \vec{A} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \vec{x}}\,, \tag{6.90}$$

wobei Λ eine beliebige skalare Funktion ist, so ändern sich die elektromagnetischen Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ nicht. Daher sollte auch die Bewegungsgleichung invariant sein. In der Tat geht die Lagrange-Funktion L unter einer Eichtransformation in eine äquivalente Lagrange-Funktion über

$$L \to L + q\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial t} + \dot{\vec{x}} \cdot \frac{\partial \Lambda}{\partial \vec{x}}\right) = L + q\,\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}t}\,. \tag{6.91}$$

Mit der obigen Herleitung folgt dann die Invarianz der Euler-Lagrange-Gleichung unter einer Eichtransformation.

Quantenmechanik. Wir können das Prinzip der stationären Wirkung als elementar für die klassische Mechanik hinnehmen. Im Hinblick auf das sehr ähnliche Fermatsche Prinzip der Optik lohnt es sich aber, es zu hinterfragen: Warum bestimmt die Forderung nach einer stationären Wirkung die erlaubten Pfade eines klassischen mechanischen Systems? Weiter oben haben wir argumentiert, dass die geometrische Optik in Form des Fermatschen Prinzips als Grenzfall der Wellenoptik angesehen werden kann. Analog dazu könnte man argumentieren, dass sich die klassische Mechanik als Grenzfall einer *Wellenmechanik* ergibt, bei der die Dynamik der Objekte durch Wellen eines

abstrakten Feldes beschrieben wird. Dies führt direkt zu einem zentralen Punkt der *Quantenmechanik*. Da die Quantenmechanik aber noch weitere Konzepte der klassischen Physik grundlegend abändert, wie z.B. den Determinismus in eine Wahrscheinlichkeitsinterpretation, ist sie für uns Menschen kaum intuitiv zu erfassen. Sie wird daher in der weiterführenden Vorlesung *Quantenmechanik* ausführlich besprochen, und wir wollen hier nur kurz auf diesen konkreten Zusammenhang eingehen.

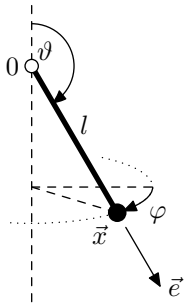
Die Quantenmechanik führt mit dem Planckschen Wirkungsquantum h eine Naturkonstante mit der Dimension einer Wirkung ein. Im Vergleich zur Grössenordnung der Wirkung $S[q]$ alltäglicher Gegenstände ist die Plancksche Konstante sehr sehr klein. Dies bedeutet, dass die zu erwartende (quantenmechanische) Wellenlänge alltäglicher Gegenstände verschwindend klein ist. In Analogie zu unserer Diskussion des Fermatschen Prinzips impliziert dies, dass Pfade mit stationärer Wirkung die Entwicklung quantenmechanischer Wellen stark dominieren. Alltägliche Gegenstände bewegen sich also in der Quantenmechanik mit extrem hoher Genauigkeit (und mit nahezu absoluter Determiniertheit) entsprechend der Euler-Lagrange-Gleichungen.

Betrachtet man hingegen mikroskopisch kleine Objekte wie Moleküle, Atome oder deren Bausteine, ist die quantenmechanische Wellenlänge in derselben Grössenordnung wie ihre Ausmasse. Dort sind also quantenmechanische Effekte wie die Interferenz von Wellen relevant. Für solche Situationen wird demnach das Wirkungsfunktional $S[q]$ auch abseits der klassische erlaubten Pfade getestet.

6.5 Holonome Zwangsbedingungen

Die Umformulierung der Newtonschen Bewegungsgleichungen als Variationsprinzip ist besonders nützlich für Systeme mit *Zwangsbedingungen*. In dieser Betrachtungsweise wird ein Teil der Kräfte indirekt dadurch beschrieben, dass die Bewegungsmöglichkeiten der Massepunkte eingeschränkt wird.

Sphärisches Pendel. So ist zum Beispiel beim sphärischen Pendel die Bewegung eines im Raum schwingenden Massepunktes dadurch eingeschränkt, dass der Faden den Abstand vom Aufhängepunkt konstant gleich l hält.[14] Wir wollen die Formulierung im Lagrange-Formalismus nun kurz erklären.



(6.92)

[14]Das sphärische Pendel ist der Spezialfall $I_3 = 0$ des schweren Kreisels mit $I_1 = ml^2$, dessen Lösung bereits in Abschnitt 4.4 diskutiert wurde.

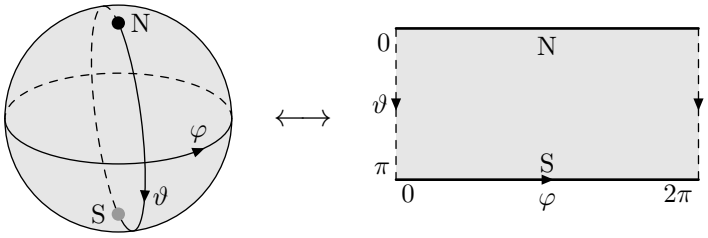
Die unter diesen Zwangsbedingungen noch zulässigen Lagen des Pendels sind

$$\vec{x}(\vec{e}) = l\vec{e}, \tag{6.93}$$

wobei $\vec{e}$ ein Punkt auf der Einheitssphäre S^2 ist, welche den Konfigurationsraum des Systems darstellt. Die Bahn des Pendels ist durch eine Funktion $\vec{e}(t) \in S^2$ gegeben. Auf der Sphäre S^2 können Lagekoordinaten eingeführt werden, z.B. die Polarkoordinaten ϑ, φ:

$$\vec{e}(\vartheta, \varphi) := \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}. \tag{6.94}$$

Dadurch wird der Konfigurationsraum auf einen rechteckigen Bereich des $\mathbb{R}^2$ abgebildet.[15]



(6.95)

Wir können nun die kinetische und potentielle Energie als Funktion der Lagekoordinaten ϑ, φ und ihrer zeitlichen Ableitungen ausdrücken. Hierfür setzen wir die eingeschränkten Koordinaten $\vec{x}(\vartheta, \varphi)$ aus (6.93,6.94) in die Ausdrücke für T und V in kartesischen Koordinaten ein. Dies ergibt

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 = \tfrac{1}{2}ml^2\dot{\vec{e}}^2 = \tfrac{1}{2}ml^2\big(\dot\vartheta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\vartheta\big), \\ V &= mgx_3 = mgle_3 = mgl\cos\vartheta. \end{aligned} \tag{6.96}$$

Für die einzelnen Terme in den Euler-Lagrange-Gleichungen finden wir dann

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot\vartheta} &= ml^2\ddot\vartheta, \\ \frac{\partial L}{\partial\vartheta} &= ml^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot\varphi^2 + mgl\sin\vartheta, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} &= ml^2\sin^2\vartheta\,\ddot\varphi + 2ml^2\dot\vartheta\dot\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta, \\ \frac{\partial L}{\partial\varphi} &= 0, \end{aligned} \tag{6.97}$$

und insgesamt lauten die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} ml^2\,\ddot\vartheta &= ml^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot\varphi^2 + mgl\sin\vartheta, \\ ml^2\sin^2\vartheta\,\ddot\varphi &= -2ml^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot\vartheta\dot\varphi. \end{aligned} \tag{6.98}$$

[15] Die Abbildung ist nicht bijektiv auf dem Rand des Rechtecks. Zur Darstellung von ganz S^2 benötigt man mindestens zwei Karten (einen Atlas).

Diese Gleichungen stellen genau das Kraftgesetz eines sphärischen Pendels dar, wie man mittels elementarer Mechanik bestätigen kann: Dort kann man die Zwangsbedingung durch eine unbestimmte Kraft $\lambda\vec{x}$ entlang des Fadens implementieren

$$m\ddot{\vec{x}} = -mg\vec{e}_3 + \lambda\vec{x}. \tag{6.99}$$

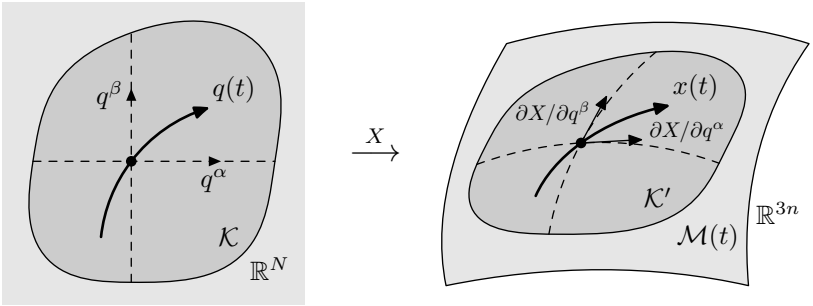
Setzen wir hier die Koordinaten (6.93,6.94) ein, so erhalten wir die beiden obigen Bewegungsgleichungen für ϑ, φ sowie eine Gleichung, die die Fadenspannung λ bestimmt.

Mehrteilchen-Systeme. Allgemeiner betrachten wir nun ein System von n Teilchen, deren erlaubte kartesische Koordinaten $x = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ zur Zeit t eine glatte N-dimensionale Fläche $\mathcal{M}(t) \subset \mathbb{R}^{3n}$ bilden. Zwangsbedingungen dieser Art werden *holonome Zwangsbedingungen* genannt. Dieses System hat dann N *Freiheitsgrade.*

Lokal können wir das System durch Koordinaten $q = (q^1, \ldots, q^N)$ beschreiben, d.h. wir haben einen Bereich $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^N$ und eine bijektive Abbildung $X : \mathcal{K} \to \mathcal{M}(t)$

$$q \mapsto X(q;t), \tag{6.100}$$

die sowohl in q als auch in t differenzierbar ist.



(6.101)

Die Tangentialabbildung hat Rang N, d.h. die N Vektoren $\partial X/\partial q^\alpha$ sind linear unabhängig. Jede mit dem Zwangsbedingungen verträgliche Bahn $x(t)$ des Systems ist dann durch eine Bahn $q(t) \in \mathcal{K}$ dargestellt

$$x(t) = X\big(q(t);t\big). \tag{6.102}$$

Wir fassen nun die Lagrange-Funktion als Funktion der Konfigurationsraumkoordinaten q^α, ihrer Zeitableitungen $\dot{q}^\alpha$ sowie der Zeit t auf, und definieren

$$L(q,\dot{q},t) := \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2} m_i \left(\frac{\mathrm{d}\vec{X}_i}{\mathrm{d}t}\right)^2 - V(X). \tag{6.103}$$

Dies führt dazu, dass die Lagrange-Funktion auf der Bahn $q(t)$ im Konfigurationsraum mit der Lagrange-Funktion einer Bahn $x(t)$ im uneingeschränkten Raum übereinstimmt

$$L\big(q(t),\dot{q}(t),t\big) = T\big(\dot{x}(t)\big) - V\big(x(t)\big). \tag{6.104}$$

Für diese Lagrange-Funktion bestimmen wir die Euler-Lagrange-Gleichungen. Wir finden

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\mathrm{d}\vec{X}_i}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\partial \vec{X}_i}{\partial q^\alpha}\,, \tag{6.105}$$

da

$$\frac{\mathrm{d}\vec{X}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{\beta=1}^{N} \dot{q}^\beta \frac{\partial \vec{X}_i}{\partial q^\beta} + \frac{\partial \vec{X}_i}{\partial t}\,. \tag{6.106}$$

Weiterhin ist

$$\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\mathrm{d}\vec{X}_i}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \vec{X}_i}{\partial q^\alpha} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_i} \cdot \frac{\partial \vec{X}_i}{\partial q^\alpha}\,, \tag{6.107}$$

da letztlich $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ mit $\partial/\partial q$ vertauscht. Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten daher

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\mathrm{d}^2\vec{X}_i}{\mathrm{d}t^2} \cdot \frac{\partial \vec{X}_i}{\partial q^\alpha} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_i} \cdot \frac{\partial \vec{X}_i}{\partial q^\alpha}\,, \end{aligned} \tag{6.108}$$

wobei sich bereits zwei Terme gegenseitig aufgehoben haben, und wir erhalten nach Einsetzen der Bahn

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\vec{x}}_i \cdot \vec{T}_{i\alpha} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_i} \cdot \vec{T}_{i\alpha}, \qquad \vec{T}_{i\alpha} := \frac{\partial \vec{X}_i}{\partial q^\alpha}\,. \tag{6.109}$$

Dies stimmt genau mit den üblichen Newtonschen Bewegungsgleichungen überein, wenn man beachtet, dass die Abbildung $\vec{T}_{i\alpha}$ das Kraftgesetz auf den Tangentialraum von $\mathcal{M}(t)$ einschränkt, welcher die möglichen Bewegungsrichtungen der Freiheitsgrade darstellt. Die Zwangsbedingungen äussern sich dann als diejenigen Kräfte, die benötigt werden um alle weiteren Komponenten des Kraftgesetzes im $\mathbb{R}^{3n}$ zu erfüllen.

Allgemeine Konstruktion. Die Bewegungsgleichungen eines Systems mit Zwangsbedingungen kann man daher im allgemeinen wie folgt aufstellen:

- Schreibe $T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2$ und $V = V(x,t)$ in kartesischen Komponenten, ohne Berücksichtigung der Zwangsbedingungen.
- Drücke die gemäss der holonomen Zwangsbedingungen zulässigen Konfigurationen der $x = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ durch unabhängige Lagekoordinaten $q = (q^1, \ldots, q^N)$ aus $x = X(q;t)$ und berechne $\dot{x} = (\mathrm{d}X/\mathrm{d}t)(q, \dot{q}; t)$.
- Setze $x, \dot{x}$ in $L = T - V$ ein.
- Für nichtholonome (sowie verbleibende holonome) Neben- und Zwangsbedingungen, führe Lagrange-Multiplikatoren[16] ein und nimm diese entsprechend Abschnitt 6.3 in die Lagrange-Funktion auf.
- Stelle die Euler-Lagrange-Gleichungen (6.81) auf.

Diese Vorgehensweise soll nun an ein paar Beispielen illustriert werden.

[16] Lagrange-Multiplikatoren können entweder Variablen oder Funktionen sein, je nachdem ob die Bedingung auf die Bahn insgesamt oder für jeden Zeitpunkt zutreffen muss.

Ebenes Pendel. Wir wollen hier das Beispiel des getriebenen Pendels aus Abschnitt 3.4 wieder aufgreifen: Die Masse m eines Pendels hängt im vertikalen homogenen Schwerefeld mit Beschleunigung g an einem Seil mit vorgegebener, zeitabhängiger Länge $R(t)$. Zusätzlich bewege sich der Aufhängepunkt vertikal mit einer vorgegeben Funktion $H(t)$. Wir lenken das Seil nur in einer vertikalen Ebene aus, so dass eine Lagekoordinate $\theta(t)$ zur Beschreibung der Bahn des Pendels genügt.

Die zulässigen Lagen des Pendels lauten somit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} R\sin\theta \\ H - R\cos\theta \end{pmatrix} \tag{6.110}$$

und für die Geschwindigkeit erhalten wir

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \dot{R}\sin\theta + R\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{H} - \dot{R}\cos\theta + R\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}. \tag{6.111}$$

Wir setzen dies nun in die üblichen Ausdrücke für die kinetische und potentielle Energie ein

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mR\dot{H}\,\dot{\theta}\sin\theta - m\dot{R}\dot{H}\cos\theta + \tfrac{1}{2}m\dot{H}^2 + \tfrac{1}{2}m\dot{R}^2, \\ V &= mgH - mgR\cos\theta. \end{aligned} \tag{6.112}$$

Die partiellen Ableitungen von L lauten

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} &= mR^2\dot{\theta} + mR\dot{H}\sin\theta, \\ \frac{\partial L}{\partial\theta} &= mR\dot{H}\,\dot{\theta}\cos\theta + m\dot{R}\dot{H}\sin\theta - mgR\sin\theta, \end{aligned} \tag{6.113}$$

und schliesslich die Euler-Lagrange-Gleichungen

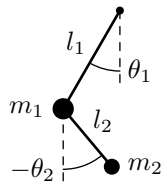
$$mR^2\ddot{\theta} = -2mR\dot{R}\,\dot{\theta} - mR\ddot{H}\sin\theta - mgR\sin\theta. \tag{6.114}$$

Wir können sie schreiben als

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(R^2\dot{\theta}\right) = -(g + \ddot{H})R\sin\theta, \tag{6.115}$$

wobei $R^2\dot{\theta}$ der Drehimpuls bezüglich des Aufhängepunkts ist und $g + \ddot{H}$ die effektive Schwerebeschleunigung in einem vertikal mit $\ddot{H}$ beschleunigten Bezugssystem darstellt. Dieses Ergebnis ist konsistent mit den in Abschnitt 3.4 aufgestellten Bewegungsgleichungen.

Doppelpendel. Beim ebenen Doppelpendel bewegen sich zwei Massepunkte unter dem Einfluss eines homogenen Schwerefeldes in einer vertikalen Ebene, der erste mit einem festen Abstand l_1 von einem festgehaltenen Punkt, und der zweite mit einem festen Abstand l_2 vom ersten Massepunkt.



(6.116)

Wir bezeichnen die Auslenkungen von der Vertikalten vom jeweiligen Aufhängepunkt durch θ_1 und θ_2. Dann sind die Ortskoordinaten in der Ebene

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &= l_1(\sin\theta_1, -\cos\theta_1),\\ \vec{x}_2 &= \vec{x}_1 + l_2(\sin\theta_2, -\cos\theta_2).\end{aligned} \tag{6.117}$$

Für die kinetische und potentielle Energie findet man

$$\begin{aligned}T &= \tfrac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2 l_2\dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2),\\ V &= -(m_1+m_2)gl_1\cos\theta_1 - m_2 g l_2\cos\theta_2.\end{aligned} \tag{6.118}$$

Die Lagrange-Funktion ist $L = T - V$, und daraus kann man dann leicht die Bewegungsgleichungen ableiten.

Das Doppelpendel ist ein bekanntes Beispielsystem welches *nicht integrabel* ist: Die Bewegungsgleichungen können nicht auf die Berechnung von Integralen zurückgeführt werden. In der Tat weisen numerische Berechnungen und Experimente auf ein *chaotisches Verhalten* hin. Das Verhalten des Doppelpendels kann nach endlicher Zeit bereits in starker Weise von minimalen Änderungen der Anfangsbedingungen abhängen.

6.6 Relativistisches Teilchen

Hier wollen wir noch das freie und das geladene relativistische Teilchen im Lagrange-Formalismus behandeln.

Freies Teilchen. Die Weltlinien freier relativistischer Teilchen sind Geraden im $\mathbb{R}^{3,1}$ und damit *Geodäten* im Sinne der Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu$. Sie sind also charakterisiert durch stationäre Bahnen der Wirkung

$$S[x] = \int_{x_0}^{x_1} (-mc^2)\,\mathrm{d}\tau\,, \qquad \delta S[x] = 0, \tag{6.119}$$

bei festen Endpunkten im $\mathbb{R}^{3,1}$. In jedem Inertialsystem können wir dies nach der Definition der Eigenzeit

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = -c^2 \tag{6.120}$$

schreiben als Hamiltonsches Prinzip für die Wirkung

$$S[x] = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, L(\vec{v}), \qquad \delta S[x] = 0, \tag{6.121}$$

wobei L die Lagrange-Funktion ist

$$L(\vec{v}) = -mc^2\,\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = -mc^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}\,. \tag{6.122}$$

Der für die Euler-Lagrange-Gleichungen irrelevante Faktor $-mc^2$ ist so gewählt, dass sich im nichtrelativistischen Grenzfall $v \ll c$ die klassische Lagrange-Funktion eines freien Teilchens ergibt

$$L(\vec{v}) = -mc^2 + \tfrac{1}{2}m\vec{v}^2 + \mathcal{O}(v^4/c^2). \tag{6.123}$$

Er ist auch so gewählt, dass sich die normierten Ausdrücke für die Erhaltungsgrössen zur Poincaré-Gruppe ergeben.

Geladenes Teilchen. Wir können nun auch untersuchen, wie das Teilchen an das elektromagnetische Feld gekoppelt werden kann, siehe Abschnitt 6.4 und die Vorlesung *Elektrodynamik*. Im nichtrelativistischen Grenzfall geschieht dies durch den Zusatzterm $-q\Phi + q\vec{v}\cdot\vec{A}$ mit dem skalaren Potential Φ und Vektorpotential $\vec{A}$. Wir können ihn unverändert in die relativistische Lagrange-Funktion übernehmen

$$L(\vec{x},\vec{v},t) = -mc^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}} - q\Phi(\vec{x},t) + q\vec{v}\cdot\vec{A}(\vec{x},t). \tag{6.124}$$

Dieser Ausdruck transformiert sich in der Tat geeignet unter Poincaré-Transformationen, so dass die resultierende Wirkung $S[x]$ invariant ist. Um diese Eigenschaft klarer zu formulieren, kombiniert man die Potentiale in dem *Vierer-Potential* $A_\mu = (-\Phi/c, \vec{A})$. Dann lautet die Lagrange-Funktion kurz

$$L(x,u) = \big(-mc^2 + qu\cdot A(x)\big)\,\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\,, \tag{6.125}$$

wobei der Faktor $\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}t$ für einen Poincaré-invarianten Integranden $\mathrm{d}t\,L(x,u)$ der Wirkung benötigt wird

$$S[x] = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}\tau\,\big(-mc^2 + qu\cdot A(x)\big). \tag{6.126}$$

Wie schon zuvor ist diese Lagrange-Funktion nicht invariant unter der Eichtransformationen $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial\Lambda/\partial x^\mu$. Sie ändert sich aber nur um ein totales Differential

$$\mathrm{d}t\,L \mapsto \mathrm{d}t\,L + q\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial t} + \vec{v}\cdot\frac{\partial\Lambda}{\partial\vec{x}}\right)\mathrm{d}t = \mathrm{d}t\,L + q\,\mathrm{d}\Lambda. \tag{6.127}$$

Insbesondere bleiben daher die Bewegungsgleichungen unverändert.

Die Bewegungsgleichungen eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld sind die Euler-Lagrange-Gleichungen zur Lagrange-Funktion (6.124)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} = q\big(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\big). \tag{6.128}$$

Sie entsprechen den Bewegungsgleichungen der klassischen Lorentz-Kraft mit einem zusätzlichen relativistischen Faktor. Dies sind die drei benötigten

Komponenten eines Kraftgesetzes. Die entsprechende zeitliche Komponente des Vierer-Kraftgesetzes ist der Energiesatz, der hier lautet

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{mc}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} = \frac{q}{c}\,\vec{v}\cdot\vec{E}. \tag{6.129}$$

Die Leistung über ein endliches Zeitintervall und für ein endliches elektrisches Feld $\vec{E}$ ist beschränkt. Das bestätigt unsere vorherigen Betrachtungen, dass ein Teilchen niemals bis zur Lichtgeschwindigkeit beschleunigt werden kann.

6.7 Das Prinzip von Maupertuis

Für mechanische Systeme einer leicht eingeschränkten Klasse können die Bahnen auch mit einem etwas anders gearteten Variationsprinzip bestimmt werden, dem Prinzip von Maupertuis. Zum Beispiel entspricht unsere Herleitung der Bahnen des Kepler-Problems in Abschnitt 2.3 diesem Schema.

Prinzip von Maupertuis. Wir betrachten im Folgenden ein System mit Lagrange-Funktion $L = T - V$, für das die kinetische und potentielle Energie die Form haben

$$T(q,\dot{q}) = \tfrac{1}{2}G_{\alpha\beta}(q)\,\dot{q}^\alpha\,\dot{q}^\beta, \qquad V = V(q), \tag{6.130}$$

wobei die kinetische Energie positiv definit ist, d.h. $T(q,\dot{q}) > 0$ für $\dot{q} \neq 0$.

In diesem Abschnitt wollen wir der Einfachheit wieder die im Rahmen der Relativitätstheorie in Abschnitt 5.3 eingeführte Summenkonvention verwenden: Über einen Index $\alpha, \beta, \ldots$, der in einem einzigen Term sowohl in oberer als auch in unterer Position auftritt, wird automatisch summiert

$$G_{\alpha\beta}(q)\,\dot{q}^\alpha\,\dot{q}^\beta := \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} G_{\alpha\beta}(q)\,\dot{q}^\alpha\,\dot{q}^\beta. \tag{6.131}$$

Da T und V nicht explizit von der Zeit abhängen, ist für ein solches System die Energie $E = T + V$ erhalten. Aufgrund der Form von T können wir den Massentensor $G_{\alpha\beta}$ auch als eine *Riemannsche Metrik* des Konfigurationsraums auffassen,[17] welche dort ein Linienelement definiert

$$\mathrm{d}s^2 := G_{\alpha\beta}(q)\,\mathrm{d}q^\alpha\,\mathrm{d}q^\beta\,. \tag{6.132}$$

Das *Prinzip von Maupertuis* bestimmt die Trajektorie $\mathcal{C} := \{q(t); t \in [t_0, t_1]\}$ der Lösungen der Bewegungsgleichung mit vorgegebenen Endpunkten $q_i = q(t_i)$ und

[17] Wir gehen hier nicht weiter auf Konzepte der Differentialgeometrie und speziell der Riemannschen Geometrie ein, die auch zentral für die Formulierung der allgemeinen Relativitätstheorie sind. Wir verwenden lediglich einige elementare Ausdrücke und verweisen für Erläuterungen auf die entsprechenden Vorlesungen.

vorgegebener Energie E.[18] Wir definieren hierzu das Funktional

$$M[\mathcal{C}] := \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, 2\sqrt{T(q,\dot{q})}\sqrt{E - V(q)}, \tag{6.133}$$

und verlangen, dass es für $q(t)$ einen extremalen Wert annimmt

$$\delta M[\mathcal{C}] \stackrel{!}{=} 0. \tag{6.134}$$

Die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen legen dann die Trajektorie $\mathcal{C} = \{q(t)\}$ fest, allerdings nicht seine parametrisierte Bahn $q(t)$. Der Grund dafür ist, dass die Kombination

$$\mathrm{d}t\,\sqrt{2T(q,\dot{q})} = \mathrm{d}\sigma\,\sqrt{2T(q,q')} = \mathrm{d}s \tag{6.135}$$

mit $q' = (\mathrm{d}t/\mathrm{d}\sigma)\dot{q}$ unabhängig von der Parametrisierung der Bahn q ist. Dementsprechend ist das Funktional $M[\mathcal{C}]$ unabhängig von der Parametrisierung, und jede Reparametrisierung eines Extremums $q(t)$ ist ebenso ein Extremum. Die Bedingung $\delta M[\mathcal{C}] = 0$ kann also bestenfalls die Trajektorie $\mathcal{C}$ bestimmen.

Den korrekten Zeitverlauf auf einer Trajektorie können wir schliesslich mit der Energiebeziehung bestimmen

$$T(q,\dot{q}) \stackrel{!}{=} E - V(q). \tag{6.136}$$

Zusammen mit der Extremalbedingung (6.134) für $M[\mathcal{C}]$ legt dies die Bahn $q(t)$ bis auf Zeittranslationen eindeutig fest und damit auch die Dauer $t_1 - t_0$.[19]

Äquivalenz. Wir wollen nun die Äquivalenz der Prinzipien von Hamilton und Maupertuis beweisen: Die Euler-Langrange-Gleichungen zum Funktional $M[\mathcal{C}]$ lauten[20]

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\sqrt{E-V}}{\sqrt{T}}\,G_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta\right] - \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{E-V}}{\sqrt{T}}\,\frac{\partial G_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha}\,\dot{q}^\beta\dot{q}^\gamma \\
&\quad + \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{E-V}}\,\frac{\partial V}{\partial q^\alpha} \\
&= \frac{\sqrt{E-V}}{\sqrt{T}}\,G_{\alpha\delta}\big(\ddot{q}^\delta + \Gamma^\delta_{\beta\gamma}\dot{q}^\beta\dot{q}^\gamma\big) \\
&\quad + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\sqrt{E-V}}{\sqrt{T}}\right]G_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta + \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{E-V}}\,\frac{\partial V}{\partial q^\alpha}\,.
\end{aligned} \tag{6.137}$$

[18] Man beachte, dass im Hamiltonschen Prinzip der stationären Wirkung die beiden Endpunkte q_i bereits die gesamte Bahn und damit auch ihre Energie E festlegen. Im Prinzip von Maupertuis ist die Parametrisierung der Bahn zunächst irrelevant, und damit auch die Endzeiten t_i. Somit kann die Energie E frei gewählt werden, und die Länge des Zeitintervalls $t_1 - t_0$ wird erst im nächsten Schritt bestimmt.

[19] Man kann die Zwangsbedingung (6.136) auch mittels Lagrange-Multiplikator an das Funktional (6.133) koppeln. In diesem Fall muss man entweder die Energie E oder die Dauer $t_1 - t_0$ als Freiheitsgrad auffassen, da die beiden sich gegenseitig festlegen. Die korrekte Wahl für den Startwert des Lagrange-Multiplikators ist Null.

[20] Man kann sich vergewissern, dass die Kontraktion der Gleichung mit $\dot{q}^\alpha$ trivial ist; dies bedeutet, dass die Gleichung die Parametrisierung nicht festlegt.

Hier ist der Tensor $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ der sogenannte *Zusammenhang* zu der Riemannschen Metrik $G_{\alpha\beta}$

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(q) := \tfrac{1}{2} G^{\alpha\delta}\left[\frac{\partial G_{\delta\gamma}}{\partial q^{\beta}} + \frac{\partial G_{\beta\delta}}{\partial q^{\gamma}} - \frac{\partial G_{\beta\gamma}}{\partial q^{\delta}}\right], \tag{6.138}$$

wobei $G^{\alpha\beta}$ die inverse Matrix zu $G_{\alpha\beta}$ ist.

Benutzen wir nun die Energiebeziehung (6.136) um die Parametrisierung festzulegen, dann vereinfacht sich die Gleichung für die Bahn $q(t)$ zu

$$G_{\alpha\delta}\big(\ddot{q}^{\delta} + \Gamma^{\delta}_{\beta\gamma}\dot{q}^{\beta}\dot{q}^{\gamma}\big) + \frac{\partial V}{\partial q^{\alpha}} = 0. \tag{6.139}$$

Dies sind genau die Euler-Lagrange-Gleichungen, die aus dem Hamiltonschen Prinzip der stationären Wirkung für $S[q]$ folgen.

Umgekehrt können wir zeigen, dass das Prinzip von Maupertuis aus dem Prinzip der stationären Wirkung folgt. Zunächst vergewissern wir uns, dass die Energie einer Lösung konstant ist. Dazu kontrahieren wir Euler-Lagrange-Gleichungen (6.139) für die Bahn $q(t)$ mit $\dot{q}^{\alpha}$. Dies liefert die Bedingung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(T+V) = 0. \tag{6.140}$$

Wir schreiben also $T + V = E$ und damit sind die Gleichungen (6.137) für die Trajektorie und offensichtlich auch die Energiebeziehung (6.136) erfüllt.

Beispiel. Als Beispiel betrachten wir den Fall eines freien Teilchens, $V(q) := 0$. Dann lautet das Variationsprinzip (6.134) schlicht

$$\delta \int \mathrm{d}s = 0, \tag{6.141}$$

wobei s die Bogenlänge der Trajektorie in der Metrik (6.132) des Konfigurationsraums bezeichnet. Die Trajektorien zu jeder Energie $E > 0$ sind demnach *Geodäten*, d.h. Kurven extremaler Länge. Eine Illustration dazu liefert ein Massepunkt, der reibungsfrei auf einer zweidimensionalen Fläche $\mathcal{M}$ im $\mathbb{R}^3$ gleitet. In diesem Fall ist

$$T = \tfrac{1}{2} m\dot{\vec{x}}^{\,2} = \tfrac{1}{2} m\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^{2}, \tag{6.142}$$

wobei s die durch die Euklidische Metrik des $\mathbb{R}^3$ induzierte Bogenlänge der Trajektorie bezeichnet. Alle Bahnkurven sind also Geodäten im Euklidischen Sinn auf der Fläche $\mathcal{M}$; auf einer Kugeloberfläche, z.B., sind dies die Grosskreise. Die Euler-Lagrange-Gleichungen für die Bogenlänge (6.137) ergeben die *Geodätengleichung*

$$q''^{\delta} + \Gamma^{\delta}_{\beta\gamma} q'^{\beta} q'^{\gamma} = 0, \tag{6.143}$$

wobei q' und q'' die Ableitungen nach der Bogenlänge s bezeichnen mit $\mathrm{d}s = \sqrt{2T/m}\,\mathrm{d}t$. Es verbleibt dann lediglich, den Zeitverlauf auf einer Geodäte für eine vorgegebene Energie E mittels $\mathrm{d}t = \mathrm{d}s\,/v(s) = \mathrm{d}s\,\sqrt{m/2T(s)}$ zu bestimmen.

7 Symmetrien

Unsere expliziten Lösungen konkreter Systeme basierten alle, direkt oder indirekt, auf Erhaltungsgrössen wie der Energie oder dem Drehimpuls. Wir haben bereits in Abschnitt 1.5 gesehen, dass die 10 Erhaltungsgrössen Energie, Impuls, Drehimpuls und Schwerpunktbewegung, die ein abgeschlossenes System aufweist, mit den 10 Freiheitsgraden der Galilei-Transformationen korrespondieren. Dieser Zusammenhang zwischen kontinuierlichen Symmetrien und Erhaltungsgrössen ist kein Zufall, sondern ein allgemeingültiges Resultat, welches das Noethersche Theorem genannt wird: Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie eines mechanischen Systems im Lagrange-Formalismus gibt es eine zugehörige Erhaltungsgrösse. Kurioserweise gilt diese Aussage auch in der umgekehrten Richtung, es besteht also eine Dualität zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrössen.

7.1 Zyklische Koordinaten

Bevor wir den allgemeinen Fall diskutieren, wollen wir zunächst eine einfache Klasse von Symmetrien und ihre zugehörigen Erhaltungsgrössen diskutieren.

Erhaltene Impulse. Sei $L(q, \dot{q}, t)$ die Lagrange-Funktion eines mechanischen Systems. Falls L von einer der Koordinaten q^α unabhängig ist,

$$\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0, \tag{7.1}$$

so nennt man die Koordinate q^α *zyklisch*. In diesem Fall ist die Lagrange-Funktion offensichtlich invariant unter der Verschiebung der Bahn

$$q^\alpha(t) \mapsto q^\alpha(t) + \lambda. \tag{7.2}$$

Ebenso ist die Wirkung $S[q]$ unter dieser Transformation invariant. Eine Abbildung der Bahnen bildet somit insbesondere eine stationäre Bahn auf eine andere stationäre Bahn ab. Mit anderen Worten, das Bild einer Lösung $q(t)$ der Bewegungsgleichungen ist wieder eine Lösung der Bewegungsgleichung; somit sind auch die Bewegungsgleichungen invariant unter dieser Verschiebung.[1] Wir nennen eine Transformation, welche die Wirkung invariant lässt, eine *Symmetrie* der Wirkung.

[1] Diese Beziehung zwischen Symmetrien der Wirkung und Symmetrien der Bewegungsgleichung trifft in umgekehrter Richtung nicht zu.

Zu einer zyklischen Koordinate q^α definiert man den *konjugierten Impuls* p_α durch

$$p_\alpha := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\,. \tag{7.3}$$

Dann gilt wegen der Euler-Lagrange-Gleichung sofort

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, p_\alpha = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0. \tag{7.4}$$

Der konjugierte Impuls ist also eine *Erhaltungsgrösse*: Entlang der Bahn $q(t)$ ist p_α konstant.

Homogenität des Raums. Ein offensichtliches Beispiel für zyklische Variablen ist das freie Teilchen mit Lagrange-Funktion

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \tfrac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2. \tag{7.5}$$

Hier sind alle Koordinaten $\vec{x}$ zyklisch, und der konjugierte Impuls ist genau der mechanische Impuls

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = m\dot{\vec{x}}, \tag{7.6}$$

welcher offensichtlich erhalten ist, $\dot{\vec{p}} = 0$, da keine Kräfte wirken.

Eine Verallgemeinerung dieses Beispiels ist das abgeschlossene Mehrteilchen-System mit Potential V

$$L(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n; \dot{\vec{x}}_1, \ldots, \dot{\vec{x}}_n; t) = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n; t). \tag{7.7}$$

Hier hängt die Lagrange-Funktion typischerweise von allen Positionen $\vec{x}_i$ ab. Aufgrund des Galileischen Relativitätsprinzips gibt es dennoch einen Vektor zyklischer Variablen: Die simultane Translation aller Positionen

$$\vec{x}_i(t) \mapsto \vec{x}_i(t) + \lambda \vec{b} \tag{7.8}$$

verändert das Potential V nicht, denn letzteres ist nach Abschnitt 1.5 eine Funktion von Differenzen der Positionen $\vec{x}_i - \vec{x}_j$. Weiterhin ist der kinetische Term invariant unter zeitunabhängigen Translationen und damit auch die Lagrange-Funktion. Wählen wir als Freiheitsgrade des Systems nun den Schwerpunkt $\vec{X}$ und $n-1$ Relativpositionen, z.B. $\vec{x}_i - \vec{x}_n$, dann hängt die Lagrange-Funktion in der Tat nicht von $\vec{X}$ ab. Somit ist der *Schwerpunkt* ein Vektor zyklischer Koordinaten, und der konjugierte Impuls ist der *Gesamtimpuls* $\vec{P}$, der bekanntlich erhalten ist.

Dieses Beispiel zeigt uns, dass die Existenz von zyklischen Koordinaten durchaus von der Wahl der Koordinaten abhängt. Mit einer geeigneten Koordinatentransformation gelingt es manchmal, neue zyklische Koordinaten bereitzustellen.

Für die weiteren Erhaltungsgrössen im Zusammenhang mit der Galilei-Gruppe benötigen wir allgemeinere Methoden als die der zyklischen Koordinaten, welche wir im Verlauf dieses Kapitels sukzessive aufbauen werden.

Schwerer Kreisel. Der schwere Kreisel aus Abschnitt 4.4 besitzt zwei zyklische Variablen. Um dies zu sehen übersetzen wir dieses System in den Lagrange-Formalismus. Mit den bekannten Ausdrücken für die kinetische und potentielle Energie lautet die Lagrange-Funktion $L = T - V$ ausgedrückt in den Euler-Winkeln φ, ϑ, ψ

$$L = \tfrac{1}{2} I_1 \big(\dot\varphi^2 \sin^2\vartheta + \dot\vartheta^2\big) + \tfrac{1}{2} I_3 \big(\dot\psi + \dot\varphi\cos\vartheta\big)^2 - mgl\cos\vartheta. \tag{7.9}$$

Hier sehen wir sofort, dass φ und ψ zyklische Koordinaten sind, da sie nicht in L auftreten. Die konjugierten Impulse p_φ und p_ψ lauten

$$\begin{aligned} p_\varphi &= I_1 \dot\varphi \sin^2\vartheta + I_3 \cos\vartheta(\dot\psi + \dot\varphi\cos\vartheta), \\ p_\psi &= I_3(\dot\psi + \dot\varphi\cos\vartheta). \end{aligned} \tag{7.10}$$

Dies sind genau die Komponenten des Drehimpulses $p_\varphi = S_\varphi$ und $p_\psi = S_\psi$, die wir bereits als Erhaltungsgrössen identifiziert hatten. An diesem Beispiel beobachten wir, dass eine zyklische Winkelkoordinate zu einem erhaltenen Drehimpuls führt.

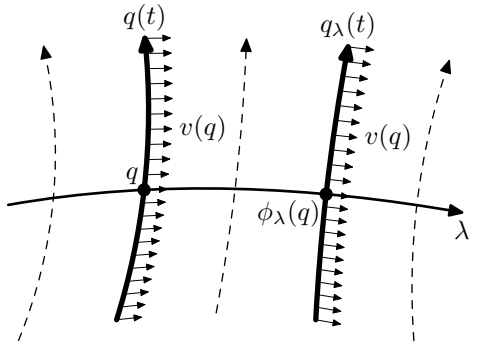
7.2 Das Noethersche Theorem

Das Noethersche Theorem ermöglicht eine konzeptionell einfache und allgemeine Ableitung von Erhaltungssätzen aus Symmetrien. Dabei betrachten wir nur kontinuierliche Symmetrien und keine diskreten Transformationen wie Spiegelungen von Raum oder Zeit. Wir nehmen an, dass der Konfigurationsraum $\mathbb{R}^N$ oder ein Gebiet davon ist.

Flüsse und Symmetrien. Wir beginnen mit einigen Definitionen zu Symmetrien. Ein *Fluss* ist eine Schar ϕ_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$ von Abbildungen des Konfigurationsraums auf sich selbst mit den Eigenschaften einer Abelschen Gruppe

$$\phi_0 = \mathrm{id}, \qquad \phi_\lambda \circ \phi_\mu = \phi_{\lambda+\mu}. \tag{7.11}$$

In der Mechanik wenden wir einen Fluss ϕ_λ oft auf eine Bahn $q(t)$ des Systems an, um eine Schar neuer Bahnen zu erzeugen,



(7.12)

welche kurz mit q_λ bezeichnet werden sollen

$$q_\lambda := \phi_\lambda \circ q. \tag{7.13}$$

Wir nennen den Fluss ϕ_λ eine *kontinuierliche Symmetrie* einer Lagrange-Funktion $L(q, \dot{q}, t)$, falls

$$L\big(q_\lambda(t), \dot{q}_\lambda(t), t\big) = L\big(q(t), \dot{q}(t), t\big) \tag{7.14}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und für jede Bahn $q(t)$ unabhängig davon, ob letztere die Bewegungsgleichung erfüllt oder nicht.

Diese Bedingung lässt sich auch unabhängig von konkreten Bahnen $q(t)$ anhand der transformierten Lagrange-Funktion $L_\lambda(q, \dot{q}, t)$ formulieren, welche implizit definiert ist über [2]

$$L_\lambda\big(\phi_\lambda(q), (\mathrm{d}\phi_\lambda/\mathrm{d}t)(q, \dot{q}), t\big) := L(q, \dot{q}, t) \tag{7.15}$$

mit der totalen Zeitableitung

$$\frac{\mathrm{d}\phi_\lambda}{\mathrm{d}t}\,(q, \dot{q}) = \sum_{\alpha=1}^{N} \dot{q}^\alpha \,\frac{\partial \phi_\lambda}{\partial q^\alpha}\,(q). \tag{7.16}$$

Die Symmetriebedingung der Lagrange-Funktion lautet dann, dass die transformierte Lagrange-Funktion L_λ in (7.15) für identische Parameter gleich der ursprünglichen ist[3]

$$L_\lambda(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t). \tag{7.17}$$

Diese Symmetriebedingung können wir auch anhand von der ursprünglichen Lagrange-Funktion L formulieren als[4]

$$L\big(\phi_\lambda(q), (\mathrm{d}\phi_\lambda/\mathrm{d}t)(q, \dot{q}), t\big) = L(q, \dot{q}, t). \tag{7.18}$$

Vektorfelder. Die Betrachtungen von Symmetrien können vereinfacht werden, indem man infinitesimale Transformationen betrachtet, und damit die Fragestellung zu einem linearen Problem reduziert.

Jeder Fluss hat ein *erzeugendes Vektorfeld* $v(q) \in \mathbb{R}^N$, welches eine infinitesimale Verschiebung entlang des Flusses beschreibt

$$v(q) := \frac{\partial}{\partial \lambda}\,\phi_\lambda(q)\bigg|_{\lambda=0}. \tag{7.19}$$

[2]Für die Definition der transformierten Lagrange-Funktion L_λ gibt es die äquivalente Möglichkeit, die Rolle von L und L_λ in der Gleichung zu vertauschen. Die Alternativen entsprechen der aktiven bzw. passiven Formulierung einer Transformation. Wir wählen hier die *aktive* Form, in der L_λ eine Funktion der transformierten Grössen ϕ_λ ist, während L die ursprünglichen Grössen q als Parameter annimmt. Der Unterschied der beiden Formulierungen besteht im Wesentlichen im Vorzeichen von λ.

[3]Im Vergleich zu der Gleichung (7.15) ist es wichtig, klar zwischen einer allgemeinen *Transformation* und einer *Symmetrie* zu unterscheiden. Eine Transformation ist ein Fluss, der Koordinaten abbildet und damit auch Funktionen wie in (7.15) transformiert. Eine Symmetrie ist eine spezielle Transformation, die gewisse Eigenschaften erhält, wie hier die Lagrange-Funktion. Für eine Symmetrie ist die Unterscheidung zwischen aktiver und passiver Transformation letztlich irrelevant, da L_λ nicht von λ abhängt.

[4]Das Vorzeichen von λ spielt hier keine Rolle, da die Bedingung für alle λ gelten muss.

Wegen der Gruppeneigenschaft des Flusses bestimmt das Vektorfeld diese Variation auch für endliche Parameter λ

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\,\phi_\lambda(q) = \frac{\partial}{\partial\epsilon}\,\phi_{\lambda+\epsilon}(q)\bigg|_{\epsilon=0} = \frac{\partial}{\partial\epsilon}\,\phi_\epsilon\big(\phi_\lambda(q)\big)\bigg|_{\epsilon=0} = v\big(\phi_\lambda(q)\big). \tag{7.20}$$

Diese Differentialgleichung erster Ordnung für $\phi_\lambda(q)$ bei festem q mit der Anfangsbedingung $\phi_0(q) = q$ legt ϕ_λ eindeutig fest. Damit bestimmt also umgekehrt das Vektorfeld $v(q)$ den kompletten Fluss ϕ_λ,[5] und es genügt anstelle des Flusses ϕ_λ sein erzeugendes Vektorfeld v zu betrachten.

Es lohnt sich die Notation der *Variation* auf die Anwendung infinitesimaler Flüsse auszudehnen: Die Notation $\delta_\lambda F$ drückt im Folgenden den linearen Term der Entwicklung einer transformierten Grösse F_λ um den Punkt $\lambda = 0$ aus

$$\delta_\lambda F := \frac{\partial F_{\epsilon\,\delta\lambda}}{\partial\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} = \delta\lambda\,\frac{\partial F_\lambda}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=0}. \tag{7.21}$$

D.h. zur Auswertung von δ_λ auf einen (implizit) transformierten Ausdruck $F \to F_\lambda$ setzen wir $\lambda = 0 + \delta\lambda$ und entwickeln zur linearen Ordnung in $\delta\lambda$,

$$F_{\delta\lambda} = F + \delta_\lambda F + \mathcal{O}(\delta\lambda^2). \tag{7.22}$$

Für den Fluss ϕ_λ mit $\phi_0(q) = q$ ergibt sich so das Vektorfeld v

$$\delta_\lambda q^\alpha := \frac{\partial}{\partial\epsilon}\,\phi^\alpha_{\epsilon\,\delta\lambda}(q)\bigg|_{\epsilon=0} = \delta\lambda\,v^\alpha(q). \tag{7.23}$$

Für die Variation der Lagrange-Funktion finden wir dann aufgrund der endlichen Transformation (7.15)

$$\delta_\lambda L := \frac{\partial}{\partial\epsilon}\,L_{\epsilon\,\delta\lambda}\bigg|_{\epsilon=0} = -\delta\lambda\sum_{\alpha=1}^{N}\bigg[v^\alpha\,\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} + \frac{\mathrm{d}v^\alpha}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^\alpha}\bigg]. \tag{7.24}$$

Die infinitesimale Transformation ausgedrückt durch das Vektorfeld v ist somit ist eine kontinuierliche Symmetrie (7.17) der Lagrange-Funktion falls für alle $q, \dot{q}, t$ gilt

$$\delta_\lambda L(q, \dot{q}, t) = 0. \tag{7.25}$$

Das Noethersche Theorem. Das *Noethersche Theorem* sagt nun aus, dass zu jeder kontinuierlichen Symmetrie eine Erhaltungsgrösse gehört: Sei v das Vektorfeld einer kontinuierlichen Symmetrie einer Lagrange-Funktion L. Dann ist die folgende Funktion F eine Erhaltungsgrösse

$$F(q, \dot{q}, t) := \sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^\alpha}\,v^\alpha. \tag{7.26}$$

[5] Die Differentialgleichung legt die Lösung zumindest in einer Umgebung von $\lambda = 0$ fest. Mit der Gruppeneigenschaft kann das Intervall dann beliebig erweitert werden.

Mit anderen Worten gilt also für alle Bahnen $q(t)$, die die Euler-Lagrange-Gleichungen lösen,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F\big(q(t), \dot{q}(t), t\big) = 0. \tag{7.27}$$

Der Beweis ist sehr einfach: Wir nehmen an, dass die Bahn $q(t)$ die Euler-Lagrange-Gleichungen erfüllt. Dann gilt auf dieser Bahn

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{\alpha=1}^{N} v^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right] \\
&= \sum_{\alpha=1}^{N}\left[v^\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} + \frac{\mathrm{d}v^\alpha}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right] \\
&= \sum_{\alpha=1}^{N}\left[v^\alpha \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} + \frac{\mathrm{d}v^\alpha}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right] \\
&= -\frac{\delta_\lambda L}{\delta\lambda} = 0.
\end{aligned} \tag{7.28}$$

In der zweiten Zeile haben wir die Euler-Lagrange-Gleichungen verwendet, um den ersten Term umzuschreiben. Der resultierende Ausdruck ist die Variation der Lagrange-Funktion (7.24), welche per Annahme verschwindet.

Zyklische Koordinaten. Die Erhaltung des Impulses einer zyklischen Koordinate ist ein einfaches Beispiel für das Noethersche Theorem: Falls q^α für ein konkretes $\alpha = 1, \ldots, N$ zyklisch ist, so definiert der Fluss

$$\phi^\beta_\lambda(q) := q^\beta + \delta^\beta_\alpha \lambda \tag{7.29}$$

eine kontinuierliche Symmetrie der Lagrange-Funktion. Das zugehörige Vektorfeld hat dann nur eine nicht-triviale Komponente,

$$v^\beta(q) = \delta^\beta_\alpha, \tag{7.30}$$

und die Erhaltungsgrösse F ist der konjugierte Impuls p_α

$$F = \sum_{\beta=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta}\,\delta^\beta_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} = p_\alpha. \tag{7.31}$$

Drehimpuls. Wir können das Noethersche Theorem verwenden, um aus der Rotationssymmetrie eines abgeschlossenen Mehrteilchen-Systems die Form und Erhaltung des Drehimpulses $\vec{L}$ abzuleiten.

Die Lagrange-Funktion L ist invariant unter den Drehungen

$$\phi_\varphi\big(\vec{x}_1, \ldots \vec{x}_n\big) = \big(R(\varphi\vec{e})\vec{x}_1, \ldots, R(\varphi\vec{e})\vec{x}_n\big), \tag{7.32}$$

wobei $R(\varphi\vec{e})$ die Drehung vom Winkel φ um die Achse des Einheitsvektors $\vec{e}$ beschreibt. Das zugehörige Vektorfeld ist

$$v = (\vec{e}\times\vec{x}_1, \ldots, \vec{e}\times\vec{x}_n), \tag{7.33}$$

und die Erhaltungsgrösse ist daher

$$F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i} \cdot \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i \cdot (\vec{e}\times\vec{x}_i) = \vec{e}\cdot \sum_{i=1}^{n} \vec{x}_i \times \vec{p}_i = \vec{e}\cdot\vec{L}. \tag{7.34}$$

Da $\vec{e}$ beliebig ist, sind alle Komponenten des *Gesamtdrehimpules* $\vec{L}$ erhalten.

Um die Erhaltungsgrössen zu den zwei übrigen Arten von Transformationen der Galilei-Gruppe formell ableiten zu können, benötigen wir gewisse Verallgemeinerungen des Begriffs der Symmetrie.

7.3 Verallgemeinerungen

Der Begriff einer Symmetrie eines mechanischen Systems lässt sich in dreierlei Weise verallgemeinern, so dass das Noethersche Theorem weiterhin gültig bleibt. Diese Verallgemeinerungen sind nicht nur wichtig, um alle Galilei-Symmetrien erfassen zu können, sondern auch um weitere Erhaltungsgrössen wie den Laplace-Runge-Lenz-Vektor des Kepler-Problems zu verstehen.

Äquivalente Lagrange-Funktionen. Die Bewegungsgleichungen eines Systems folgen aus der Forderung einer stationären Wirkung. Demnach sollte es für eine Symmetrie genügen zu fordern, dass sie die Wirkung $S[q]$ invariant lässt

$$S[q_\lambda] \simeq S[q] \qquad \text{bzw.} \qquad \delta_\lambda S[q] \simeq 0. \tag{7.35}$$

Dafür ist es aber nicht notwendig zu fordern, dass die Lagrange-Funktion wie in (7.17) bzw. (7.25) streng invariant ist. Es genügt die Forderung, dass sie in eine äquivalente Lagrange-Funktion übergeht, welche sich um die totale Zeitableitung einer kompensierenden Funktion $K_\lambda(q,t)$ von der ursprünglichen Lagrange-Funktion unterscheidet

$$L_\lambda(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) - \frac{\mathrm{d}K_\lambda}{\mathrm{d}t}(q,\dot{q},t). \tag{7.36}$$

bzw. in infinitesimaler Form

$$\delta_\lambda L = -\delta\lambda \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}, \qquad K := \frac{\partial}{\partial\epsilon} K_\epsilon\Big|_{\epsilon=0}. \tag{7.37}$$

Für die Wirkung folgt somit

$$\begin{aligned} S[q_\lambda] &= \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, L\big(q_\lambda(t), \dot{q}_\lambda(t), t\big) = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, L_{-\lambda}\big(q(t), \dot{q}(t), t\big) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \left[L\big(q(t), \dot{q}(t), t\big) - \frac{\mathrm{d}K_{-\lambda}}{\mathrm{d}t}\big(q(t), t\big) \right] \\ &= S[q] - \big[K_{-\lambda}\big(q(t), t\big)\big]_{t_0}^{t_1}, \end{aligned} \tag{7.38}$$

wobei der zusätzliche Term nur von den Randbedingungen abhängt. Insbesondere werden unter der Abbildung Lösungen, d.h. stationäre Bahnen der Wirkung, in ebensolche überführt. In diesem Fall lautet die Erhaltungsgrösse

$$F(q,\dot q,t) := \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\, v^\alpha - K(q,t). \tag{7.39}$$

Der Beweis der Verallgemeinerung ist analog zum obigen Beweis (7.28),

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} &= \sum_{\alpha=1}^{N}\left[v^\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha} + \frac{\mathrm{d}v^\alpha}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\right] - \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}\\ &= \sum_{\alpha=1}^{N}\left[v^\alpha \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} + \frac{\mathrm{d}v^\alpha}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\right] - \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}\\ &= -\frac{\delta_\lambda L}{\delta\lambda} - \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = 0.\end{aligned} \tag{7.40}$$

Hier gleicht der zusätzliche Term K in der Erhaltungsgrösse F genau den zusätzlichen Term $\mathrm{d}K/\mathrm{d}t$ in der Variation $\delta_\lambda L$ der Lagrange-Funktion aus.

Spezielle Galilei-Transformation. Wir können nun die Invarianz des Systems unter *speziellen Galilei-Transformationen* betrachten, die zwischen zwei Koordinatensystemen mit konstanter Relativgeschwindigkeit $\vec v$ transformieren. Dies entspricht dem Fluss

$$\phi_\lambda(\vec x_1,\dots,\vec x_n;t) = (\vec x_1 + \lambda\vec v t,\dots,\vec x_n + \lambda\vec v t) \tag{7.41}$$

mit dem zugehörigen Vektorfeld

$$v(\vec x_1,\dots,\vec x_n;t) = (\vec v t,\dots,\vec v t). \tag{7.42}$$

Diese Transformationen hängen zwar explizit von der Zeit t ab, eine solche Erweiterung des Symmetriekonzepts ändert aber nichts an dem obigen Beweis (7.40), ausser dass $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ nun auch die explizite Zeitabhängigkeit $\partial v/\partial t$ erfasst.

Die Lagrange-Funktion transformiert sich dann wie

$$\begin{aligned}L_\lambda(x,\dot x) &= \sum_{i=1}^{n} \tfrac12 m_i(\dot{\vec x}_i - \lambda\vec v)^2 - V(\vec x_1 - \lambda\vec v t,\dots,\vec x_n - \lambda\vec v t)\\ &= L(x,\dot x) - \sum_{i=1}^{n} m_i\big(\lambda\dot{\vec x}_i\cdot\vec v - \tfrac12\lambda^2\vec v^2\big),\end{aligned} \tag{7.43}$$

und daher gilt die Invarianz $L_\lambda = L - \mathrm{d}K_\lambda/\mathrm{d}t$ in (7.36) mit dem Kompensator

$$K_\lambda(x,t) = \sum_{i=1}^{N} m_i\big(\lambda\vec x_i\cdot\vec v + \tfrac12\lambda^2\vec v^2 t\big). \tag{7.44}$$

Für die Variationen als infinitesimale Version der obigen Beziehungen finden wir

$$\frac{\delta_\lambda L}{\delta\lambda} = -\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{v} = -\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} \qquad \text{mit} \qquad K = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{x}_i \cdot \vec{v}. \tag{7.45}$$

Die Erhaltungsgrösse (7.39) ist das *Schwerpunktsintegral*

$$\begin{aligned} F &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i} \cdot \vec{v}t - K = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{v}t - \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{x}_i \cdot \vec{v} \\ &= -(M\vec{X} - \vec{P}t) \cdot \vec{v}. \end{aligned} \tag{7.46}$$

Die verbleibende Zeittranslation der Galilei-Gruppe transformiert die Zeit, und sie lässt sich somit nicht als Fluss $\phi_\lambda(q;t)$ oder Vektorfeld $v(q;t)$ schreiben. Im Folgenden betrachten wir die benötigte Verallgemeinerung.

Transformationen der Zeit. Eine weitere Verallgemeinerung ergibt sich, wenn der Fluss die Konfiguration und die Zeit transformiert. Der erweiterte Fluss ψ_λ wirkt also auf den Raum $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ der Ereignisse (q,t),

$$(q,t) \mapsto \psi_\lambda(q,t) = \big(\phi_\lambda(q,t), \tau_\lambda(q,t)\big), \tag{7.47}$$

wobei das zugehörige Vektorfeld $(v(q,t), w(q,t))$ sei. Eine Bahn $q(t)$ wird dann wie in Abschnitt 1.3 auf $q_\lambda(t)$ abgebildet mit

$$\begin{aligned} t_\lambda &:= \tau_\lambda\big(q(t),t\big), \\ q_\lambda(t_\lambda) &:= \phi_\lambda\big(q(t),t\big). \end{aligned} \tag{7.48}$$

Die relevante Transformation der Lagrange-Funktion lautet in diesem Fall

$$\frac{\mathrm{d}\tau_\lambda}{\mathrm{d}t}\, L_\lambda\big(\phi_\lambda, \mathrm{d}\phi_\lambda/\mathrm{d}\tau_\lambda, \tau_\lambda\big) := L(q,\dot{q},t), \tag{7.49}$$

wobei $\phi_\lambda = \phi_\lambda(q,t)$ und $\tau_\lambda = \tau_\lambda(q,t)$ sowie

$$\frac{\mathrm{d}\phi_\lambda}{\mathrm{d}\tau_\lambda}\,(q,\dot{q},t) = \frac{\mathrm{d}\phi_\lambda}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\tau_\lambda}{\mathrm{d}t}\right)^{-1}. \tag{7.50}$$

Motiviert ist der Vorfaktor $\mathrm{d}\tau_\lambda/\mathrm{d}t$ in der Definition von L_λ dadurch, dass dann mit $\mathrm{d}\tau = (\mathrm{d}\tau_\lambda/\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}t$ für die Wirkung gilt

$$\begin{aligned} S_\lambda[q_\lambda] &= \int_{\tau_\lambda(q(t_0),t_0)}^{\tau_\lambda(q(t_1),t_1)} \mathrm{d}\tau\, L_\lambda\big(q_\lambda(\tau), \dot{q}_\lambda(\tau), \tau\big) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, L\big(q(t), \dot{q}(t), t\big) = S[q]. \end{aligned} \tag{7.51}$$

Die Symmetrieeigenschaft der Lagrange-Funktion ist in diesem Fall wie oben (7.36)

$$L_\lambda(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) - \frac{\mathrm{d}K_\lambda}{\mathrm{d}t}\,(q,\dot{q},t). \tag{7.52}$$

Die zugehörige Erhaltungsgrösse ist dann

$$F(q,\dot q,t) = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\,(v^\alpha - w\dot q^\alpha) + wL - K. \tag{7.53}$$

Der Beweis folgt derselben Argumentation wie zuvor in (7.40), es treten aber viele zusätzliche Terme auf. Wir wollen ihn hier nicht konkrete durchführen, zumal eine weitere Verallgemeinerung des Symmetriekonzepts diesen Fall mit einschliesst und der Beweis dafür die gewohnt einfache Struktur besitzt.

Homogenität der Zeit. Die wichtigste Anwendung der obigen Verallgemeinerung ist das *autonome System* mit einer zeitunabhängigen Lagrange-Funktion $L = L(q,\dot q)$. Dann ist die reine Zeittranslation

$$\phi_\lambda = \mathrm{id}, \qquad \tau_\lambda(t) = t + \lambda \tag{7.54}$$

eine Symmetrie im obigen Sinn mit

$$v = 0, \qquad w = 1, \qquad K = 0. \tag{7.55}$$

Die erhaltene Grösse lautet hier

$$F = L - \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\,\dot q^\alpha. \tag{7.56}$$

Für ein System mit der kinetischen und potentiellen Energie

$$T = \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} \tfrac{1}{2} G_{\alpha\beta}(q)\,\dot q^\alpha \dot q^\beta, \qquad V = V(q) \tag{7.57}$$

entspricht die Erhaltungsgrösse F dem bekannten Ausdruck für die Gesamtenergie E

$$F = L - 2T = -T - V = -E. \tag{7.58}$$

Allgemeiner können wir die *Gesamtenergie* E definieren als

$$E := \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\,\dot q^\alpha - L. \tag{7.59}$$

In der Tat rechnet man leicht explizit nach, dass die Energie erhalten ist

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\ddot q^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha} + \dot q^\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha} - \ddot q^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha} - \dot q^\alpha \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \end{aligned} \tag{7.60}$$

vorausgesetzt, dass $L = L(q,\dot q)$ nicht explizit von der Zeit t abhängt, und die Bahn $q(t)$ die Euler-Lagrange-Gleichung löst.

Als etwas allgemeineres Beispiel betrachten wir ein geladenes Teilchen in einem *statischen* elektromagnetischen Feld, siehe Abschnitt 6.4. Im statischen Fall lauten die Maxwell-Gleichungen

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\,\Phi(\vec{x}), \qquad \vec{B}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \times \vec{A}(\vec{x}). \tag{7.61}$$

Die Lagrange-Funktion ist somit auch zeitunabhängig

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \tfrac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - q\Phi(\vec{x}) + q\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}). \tag{7.62}$$

Wir berechnen dann

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = m\dot{\vec{x}} + q\vec{A}, \tag{7.63}$$

und damit lautet die erhaltene Energie

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} \cdot \dot{\vec{x}} - L = \tfrac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 + q\Phi(\vec{x}). \tag{7.64}$$

Sie setzt sich also aus der gewöhnlichen potentiellen Energie eines Teilchens mit Masse m und der elektrostatischen Energie eines Teilchens mit Ladung q zusammen. Das magnetische Feld trägt nicht zur Energie bei, seine Kraft ist konservativ.

Transformationen der Bahn. In einer dritten Verallgemeinerung wollen wir eine *Transformation der Bahn* an sich betrachten. Wir nehmen dazu an, dass $q_\lambda(t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Schar von Bahnen ist, die durch die folgende Differentialgleichung bestimmt ist

$$\frac{\partial q_\lambda}{\partial \lambda} = v(q_\lambda, \dot{q}_\lambda, t). \tag{7.65}$$

Der Unterschied zu der obigen Differentialgleichung (7.20) besteht darin, dass hier das erzeugende Vektorfeld $v^\alpha(q, \dot{q}, t)$ auch von $\dot{q}$ und t abhängen kann. Diese Verallgemeinerung ändert allerdings das Noethersche Theorem und seine Herleitung nur unwesentlich. Die Variation der Lagrange-Funktion lässt sich weiterhin wie zuvor in (7.24) schreiben, wobei hier natürlich gilt

$$\frac{\mathrm{d}v^\alpha}{\mathrm{d}t} = \sum_{\beta=1}^{N} \left[\dot{q}^\beta \frac{\partial v^\alpha}{\partial q^\beta} + \ddot{q}^\beta \frac{\partial v^\alpha}{\partial \dot{q}^\beta} \right] + \frac{\partial v^\alpha}{\partial t}\,. \tag{7.66}$$

Die Invarianz der Lagrange-Funktion besteht in derselben Aussage (7.37), wobei hier $K(q, \dot{q}, t)$ auch von $\dot{q}$ abhängen kann.[6] Weiterhin enthält die Symmetriebedingung der Lagrange-Funktion Terme der Art $\ddot{q}^\alpha$. Hier muss die Bedingung allerdings ohne Verwendung der Euler-Lagrange-Gleichungen erfüllt sein, da ansonsten aufgrund von $\delta S[q] = 0$ für alle Variationen δq, und damit auch für $\delta_\lambda q$, die Aussage per Konstruktion erfüllt ist. Die Erhaltungsgrösse nimmt die bekannte Form (7.39) an, und der Beweis ist äquivalent zu (7.40).

[6] Man beachte, dass in diesem Fall das Integral von $\mathrm{d}K(q, \dot{q}, t)$ nicht mehr unmittelbar durch die Randbedingungen festgelegt ist.

Interessanterweise beinhaltet diese Verallgemeinerung auch den obigen Fall einer Transformation der Zeit (7.48): Für die entsprechende infinitesimale Transformation der Bahn ergibt sich dort

$$\delta_\lambda q = \delta\lambda\,(v - w\dot{q}). \tag{7.67}$$

Dies entspricht der Form einer allgemeinen Transformation der Bahn (7.65) und wir definieren somit das Vektorfeld v' der Bahn als

$$v'(q, \dot{q}, t) := v(q, t) - \dot{q}\, w(q, t). \tag{7.68}$$

Der Kompensator K' lautet schliesslich

$$K'(q, \dot{q}, t) = -w(q, t)\, L(q, \dot{q}, t) + K(q, t), \tag{7.69}$$

was zu derselben Erhaltungsgrösse $F' = F$ führt. Die Transformation der Bahn (7.65) beinhaltet somit alle bisherigen Fälle, und impliziert als Symmetrie der Wirkung eine Erhaltungsgrösse.

Neben der Zeittranslation gibt es keine gewöhnlichen Symmetrien, die speziell auf die Bahn wirken. Allerdings lassen sich in besonderen Systemen mit zusätzlichen Erhaltungsgrössen solche Symmetrien konstruieren, wie wir im Folgenden sehen werden.

7.4 Rekonstruktion der Symmetrie

Das Noethersche Theorem gilt auch in der umgekehrten Richtung: Jede Erhaltungsgrösse eines mechanischen Systems führt zu einer kontinuierlichen Symmetrie der Wirkung.

Umkehrung. Angenommen wir haben eine Erhaltungsgrösse $F(q, \dot{q}, t)$. Für alle Lösungen $q(t)$ der Euler-Lagrange-Gleichungen gelte also

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{7.70}$$

Wir wollen aus dieser Aussage die zugehörige kontinuierliche Symmetrie rekonstruieren. Wir schreiben dazu die Erhaltung von F als die Relation

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} + \sum_{\alpha=1}^{N} v^\alpha \left[\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right] = 0, \tag{7.71}$$

welche besagt, dass sich $\mathrm{d}F/\mathrm{d}t$ als Linearkombination der Ausdrücke der Euler-Lagrange-Gleichungen schreiben lässt.[7] Für eine geeignete Wahl der

[7] Ohne die Betrachtung der Bewegungsgleichungen ist $\mathrm{d}F/\mathrm{d}t$ ein bestimmter Ausdruck in q, $\dot{q}$ und $\ddot{q}$. Wenn dieser Ausdruck für eine Lösung der Bewegungsgleichungen Null sein soll, so muss er eine bestimmte Linearkombination der Ausdrücke der Bewegungsgleichungen darstellen.

Koeffizienten $v^\alpha(q,\dot{q},t)$ gilt diese Relation für alle $q,\dot{q},t$ ohne die Einschränkung auf Lösungen der Bewegungsgleichungen.

Wir können nun dieses Vektorfeld v genauer bestimmen und zeigen, dass es die gewünschte kontinuierliche Symmetrie erzeugt. Dazu schauen wir uns die Terme der Relation an, die proportional zu $\ddot{q}$ sind, welches die höchstmögliche Ableitung darstellt,

$$\ldots + \sum_{\beta=1}^{N} \ddot{q}^\beta \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^\beta} - \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta}\, v^\alpha \right] = 0. \tag{7.72}$$

Demnach ist das Vektorfeld v implizit bestimmt durch

$$\sum_{\beta=1}^{N} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta}\, v^\beta = \frac{\partial F}{\partial \dot{q}^\alpha}\,. \tag{7.73}$$

Wir nehmen hierbei an, dass die Massenmatrix $\partial^2 L/\partial \dot{q}^2$ invertierbar ist, und damit ist v eindeutig definiert.[8]

Schliesslich betrachten wir die Variation der Lagrange-Funktion mit dem Vektorfeld v

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda} = -\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\, v^\alpha - \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\, \frac{\mathrm{d}v^\alpha}{\mathrm{d}t}\,. \tag{7.74}$$

Wir addieren nun die Terme der obigen Relation (7.71) für $\mathrm{d}F/\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta \lambda} &= \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} - \sum_{\alpha=1}^{N} v^\alpha\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\, \frac{\mathrm{d}v^\alpha}{\mathrm{d}t} \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\sum_{\alpha=1}^{N} v^\alpha\, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - F \right] = -\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}\,, \end{aligned} \tag{7.75}$$

und sehen, dass die Variation der Lagrange-Funktion die totale Ableitung eines Kompensators K ist mit

$$K = \sum_{\alpha=1}^{N} v^\alpha\, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - F. \tag{7.76}$$

Dies zeigt, dass das Noethersche Theorem auch in der Umkehrrichtung gültig ist, und dass somit kontinuierliche Symmetrien dual zu Erhaltungsgrössen sind.

Galilei-Symmetrien. Als Beispiel wollen wir die Galilei-Transformationen aus den 10 bekannten Erhaltungsgrössen ableiten. Für ein Mehrteilchen-System lauten die Gesamtenergie E, der Gesamtimpuls $\vec{P}$, der Gesamtdrehimpuls $\vec{L}$ und das

[8] Anderenfalls hat das System Zwangsbedingungen oder einige seiner Euler-Lagrange-Gleichungen sind nicht Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Dann ist die Lösung durch die ursprüngliche Beziehung (7.71) bestimmt.

Schwerpunktintegral $MX - \vec{P}t$

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2 + V(x), \\ \vec{P} &= \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{x}}_i, \\ \vec{L} &= \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{x}_i \times \dot{\vec{x}}_i, \\ M\vec{X} - \vec{P}t &= \sum_{i=1}^{n} m_i \big(\vec{x}_i - \dot{\vec{x}}_i t\big). \end{aligned} \tag{7.77}$$

Um all diese Grössen gemeinsam zu betrachten, kombinieren wir sie linear mittels beliebiger Koeffizienten ε, $\vec{\beta}$, $\vec{\alpha}$ und $\vec{\gamma}$ in einer Erhaltungsgrösse F

$$F := \vec{\alpha}\cdot\vec{L} + \vec{\beta}\cdot\vec{P} - \vec{\gamma}\cdot(M\vec{X} - \vec{P}t) - \varepsilon E. \tag{7.78}$$

Zur Bestimmung des zugehörigen Vektorfelds benötigen wir die Matrix $\partial^2 L/\partial \dot{\vec{x}}^2$, die für das Mehrteilchen-System die Diagonalmatrix der Massen ist

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\vec{x}}_i \, \partial \dot{\vec{x}}_j^{\mathrm{T}}} = m_i \delta_{ij} \,\mathrm{id}\,. \tag{7.79}$$

Das zugehörige Vektorfeld lautet demnach

$$\vec{v}_i = \frac{1}{m_i} \frac{\partial F}{\partial \dot{\vec{x}}_i} = \vec{\alpha}\times\vec{x}_i + \vec{\beta} + \vec{\gamma}t - \varepsilon \dot{\vec{x}}_i. \tag{7.80}$$

Dies entspricht genau den 10 infinitesimalen Transformationen der Galilei-Algebra $\delta_\lambda \vec{x} = \delta\lambda\, \vec{v}$. Der benötigte Kompensator K für die Symmetrie der Lagrange-Funktion lautet

$$K = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i} - F = M\vec{\gamma}\cdot\vec{X} - \varepsilon L. \tag{7.81}$$

Laplace-Runge-Lenz-Vektor. Im Rahmen des Kepler-Problems in Abschnitt 2.3 haben wir den Laplace-Runge-Lenz-Vektor als ein Beispiel einer zusätzlichen Erhaltungsgrösse kennengelernt. Wir können ihn mit dem Noetherschen Theorem in eine Symmetrie übersetzen. Das Kepler-Problem in der Relativkoordinate $\vec{x}$ ist durch eine Lagrange-Funktion bestimmt

$$L = \tfrac{1}{2}\mu \dot{\vec{x}}^2 + \frac{g\mu}{\|\vec{x}\|}\,. \tag{7.82}$$

Wir kontrahieren den Laplace-Runge-Lenz-Vektor $\vec{A}$ mit einem Referenzvektor $\vec{\kappa}$, um ihn als skalare Erhaltungsgrösse F zu schreiben

$$\begin{aligned} F := \vec{\kappa}\cdot\vec{A} &= \mu^2 \vec{\kappa}\cdot\big[\dot{\vec{x}}\times(\vec{x}\times\dot{\vec{x}})\big] - g\mu^2 \frac{\vec{\kappa}\cdot\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \\ &= \mu^2(\vec{\kappa}\cdot\vec{x})\dot{\vec{x}}^2 - \mu^2(\vec{\kappa}\cdot\dot{\vec{x}})(\vec{x}\cdot\dot{\vec{x}}) - g\mu^2 \frac{\vec{\kappa}\cdot\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\,. \end{aligned} \tag{7.83}$$

Leiten wir diesen Ausdruck nach $\dot{\vec{x}}$ ab und teilen durch die Masse μ im kinetischen Term, so erhalten wir das erzeugende Vektorfeld $\vec{v}$

$$\vec{v} = \frac{1}{\mu}\,\frac{\partial F}{\partial \dot{\vec{x}}} = 2\mu(\vec{\kappa}\cdot\vec{x})\dot{\vec{x}} - \mu(\vec{\kappa}\cdot\dot{\vec{x}})\vec{x} - \mu(\vec{x}\cdot\dot{\vec{x}})\vec{\kappa}. \tag{7.84}$$

Es beschreibt eine gewisse Transformation der Bahn $\vec{x}(t)$, da $\vec{v}$ von den Geschwindigkeiten $\dot{\vec{x}}$ abhängt.

Wir wollen uns zum Schluss vergewissern, dass dies tatsächlich eine Symmetrie darstellt. Dazu berechnen wir die Variation der Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned}\frac{\delta_\lambda L}{\delta\lambda} &= -\mu\dot{\vec{x}}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + g\mu\,\frac{\vec{x}\cdot\vec{v}}{\|\vec{x}\|^3}\\ &= \mu^2(\vec{\kappa}\cdot\ddot{\vec{x}})(\vec{x}\cdot\dot{\vec{x}}) + \mu^2(\vec{\kappa}\cdot\dot{\vec{x}})(\vec{x}\cdot\ddot{\vec{x}}) - 2\mu^2(\vec{\kappa}\cdot\vec{x})(\dot{\vec{x}}\cdot\ddot{\vec{x}})\\ &\quad + g\mu^2\,\frac{(\vec{\kappa}\cdot\vec{x})(\vec{x}\cdot\dot{\vec{x}})}{\|\vec{x}\|^3} - g\mu^2\,\frac{\vec{\kappa}\cdot\dot{\vec{x}}}{\|\vec{x}\|} = -\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}\,.\end{aligned} \tag{7.85}$$

Dies ist genau die negative zeitliche Ableitung des erwarteten Kompensators

$$K = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}}\cdot\vec{v} - F = \mu^2(\vec{\kappa}\cdot\vec{x})\dot{\vec{x}}^2 - \mu^2(\vec{\kappa}\cdot\dot{\vec{x}})(\vec{x}\cdot\dot{\vec{x}}) + g\mu^2\,\frac{\vec{\kappa}\cdot\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\,, \tag{7.86}$$

und somit generiert $\vec{v}$ in der Tat eine Symmetrie der Bahn.

8 Hamilton-Formalismus

Die Newtonsche wie auch die Lagrangesche Formulierung der Mechanik beschreiben ein System anhand einer Bahn $q(t)$ im Konfigurationsraum. Die Bewegungsgleichungen sind Differentialgleichungen zweiter Ordnung, insofern wird die Bahn in der Regel durch Anfangsbedingungen an Lage $q(t_0)$ und Geschwindigkeit $\dot{q}(t_0)$ festgelegt. Der momentane Zustand eines Systems, der seine künftige Entwicklung vollständig festlegt, besteht somit aus Lage und Geschwindigkeit, und bildet einen Punkt im Zustandsraum, der Phasenraum genannt wird. Die Hamiltonsche Formulierung der Mechanik basiert auf der Idee, nicht nur die Entwicklung der Konfiguration q zu betrachten, sondern die Entwicklung des kompletten Zustands des Systems. Eine solche Formulierung hat gewisse Vor- und Nachteile. So muss z.B. formell nicht mehr zwischen Lage und Geschwindigkeit unterschieden werden, was allgemeinere Transformationen im Phasenraum erlaubt, die ein System vereinfachen können. Insbesondere bildet der Hamilton-Formalismus gewöhnlich die erste Schnittstelle zur Quantenmechanik, welche ebenfalls die Entwicklung des Systemzustands beschreibt, allerdings in einer radikal anderen Form.

8.1 Die Legendre-Transformation

Den Zustand eines Systems wird durch die Lage q und Geschwindigkeit $\dot{q}$ beschrieben. Allerdings stellt es sich an vielen Stellen als günstiger heraus, anstelle der Geschwindigkeit $\dot{q}$ den Impuls p zur Beschreibung des Zustands zu verwenden. Für die Lagrange-Funktion wird der Übergang zwischen Geschwindigkeit und Impuls mittels der Legendre-Transformation realisiert, die wir hier diskutieren wollen.

Motivation. Gegeben sei ein Lagrangesches System, für das die Lagrange-Funktion $L(q, \dot{q}, t)$ von den Lagekoordinaten q^α, $\alpha = 1, \dots, N$, ihren Geschwindigkeiten $\dot{q}^\alpha$ sowie gegebenenfalls der Zeit t abhängt.

Falls der Konfigurationsraum der Euklidische Raum ist (oder im Fall mehrerer Teilchen einige Kopien desselben), so ist der Impuls eines Teilchens bekanntlich $\vec{p} = m\dot{\vec{x}}$. Falls die Lagekoordinaten allerdings andere Freiheitsgrade darstellen, wie z.B. Winkelkoordinaten, so ist die Kombination $m\dot{q}^\alpha$ meist nicht unmittelbar hilfreich. Im Zusammenhang mit Symmetrien haben wir in Abschnitt 7.1 den konjugierten Impuls p_α zu einer zyklischen Koordinate q^α eingeführt. Im Fall einer Winkelkoordinate ist der konjugierte Impuls genau der Drehimpuls, der zur Änderung dieses Winkels korrespondiert. Es mag also sinnvoll erscheinen, ein Zustand durch die Kombination von Lage und konjugiertem Impuls zu beschreiben.

Wir definieren also zu jeder Lagekoordinate q^α den *konjugierten Impuls* p_α mit

$$p_\alpha := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\,. \tag{8.1}$$

Wenn wir weiterhin die verallgemeinerte Kraft F_α definieren als

$$F_\alpha := \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\,, \tag{8.2}$$

dann lassen sich die Euler-Lagrange-Gleichungen in der Form eines *verallgemeinerten Kraftgesetzes* schreiben

$$\frac{\mathrm{d}p_\alpha}{\mathrm{d}t} = F_\alpha. \tag{8.3}$$

Wollen wir das mechanische Systems also anhand seines *Zustands* (q, p) beschreiben, der einen Punkt im *Phasenraum* darstellt, müssen wir die Geschwindigkeiten $\dot{q}^\alpha$ durch die Impulse $p_\alpha = \partial L/\partial \dot{q}^\alpha$ ausdrücken. Wir suchen dann ein Potential im Phasenraum, d.h. eine Funktion der Zustandskoordinaten q^α und p_α, aus der sich die Bewegungsgleichungen analog zu den Euler-Lagrange-Gleichungen ableiten lassen.

Legendre-Transformation. Probleme dieser Art treten in der Physik an vielen Stellen auf, insbesondere in der Thermodynamik. Man löst sie mithilfe der sogenannten *Legendre-Transformation*: Sei das Potential $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $F'' > 0$. Dann wächst die Funktion $F'(x)$ stetig und ist somit invertierbar. Wir nennen $Y(x) := F'(x)$ und ihre Umkehrfunktion $X(y)$ und setzen[1]

$$y = Y(x), \qquad x = X(y). \tag{8.4}$$

Wir suchen nun ein Potential $G(y)$, welches Analog zu $y = F'(x)$ die Variable x als $x = G'(y)$ beschreibt. Eine solche Funktion $G(y)$ besitzt per Konstruktion denselben Informationsgehalt wie die Funktion $F(x)$, da wir $G(x)$ mit derselben Transformation zurück in $F(x)$ übersetzen können. Man kann leicht bestätigen, dass das gesuchte Potential gegeben ist durch

$$G(y) := xy - F(x) = X(y)\,F'\big(X(y)\big) - F\big(X(y)\big), \tag{8.5}$$

da dann mit $\mathrm{d}F/\mathrm{d}x = F' = y$ gilt

$$G'(y) = \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\,y + x - \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = x. \tag{8.6}$$

[1] Im Lagrange-Formalismus entsprechen $F \to L$, $x \to \dot{q}$ und $y = F' \to p = \partial L/\partial \dot{q}$, sowie schliesslich $G \to -H$.

Hamilton-Funktion. In dem uns interessierenden Fall der Lagrange-Funktion $L(q, \dot{q}, t)$ wollen wir die Legendre-Transformation bezüglich der Geschwindigkeiten $\dot{q}^\alpha$ betrachten. Diese sind als unabhängig von den Lagekoordinaten q^α zu verstehen, welche wir unverändert beibehalten wollen. Zunächst definieren wir die konjugierten Impulse

$$p_\alpha = P_\alpha(q, \dot{q}, t) := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\,. \tag{8.7}$$

Die Gleichung $p_\alpha = P_\alpha(q, \dot{q}, t)$ ist nach $\dot{q}$ auflösbar, wenn die Massenmatrix $\partial^2 L/\partial\dot{q}^\alpha\partial\dot{q}^\beta$ invertierbar ist. Das Analogon der Bedingung $f'' > 0$ des eindimensionalen Falls verlangt, dass die Massenmatrix positiv-definit ist; dann ist $p_\alpha = \partial L/\partial\dot{q}^\alpha$ sogar global und eindeutig nach $\dot{q}$ auflösbar. Wir betrachten nun also $\dot{q}$ als Funktion von p

$$\dot{q}^\alpha = \dot{Q}^\alpha(q, p, t). \tag{8.8}$$

Die negative Legendre-Transformierte wird die *Hamilton-Funktion* $H(q, p, t)$ genannt

$$\begin{aligned} H(q, p, t) &:= \sum_{\alpha=1}^{N} p_\alpha \dot{q}^\alpha - L(q, \dot{q}, t) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{N} p_\alpha \dot{Q}^\alpha(q, p, t) - L\big(q, \dot{Q}(q, p, t), t\big). \end{aligned} \tag{8.9}$$

Die Hamilton-Funktion stimmt mit dem Ausdruck für die Gesamtenergie E, siehe Abschnitt 7.3 überein;[2] dies gilt auch für Systeme, deren Gesamtenergie nicht erhalten ist. Es ist jedoch darauf zu achten, dass H immer eine Funktion von (q, p, t) ist.

8.2 Die Hamiltonschen Gleichungen

Als nächstes wollen wir die Bewegungsgleichungen für den Zustand (q, p) ableiten.

Hamiltonsche Gleichungen. Da die Euler-Lagrange-Gleichungen auf Ableitungen der Lagrange-Funktionen basieren, betrachten wir das totale Differential von H. Zum einen gilt

$$\mathrm{d}H = \sum_{\alpha=1}^{N} \left[\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}\,\mathrm{d}q^\alpha + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\,\mathrm{d}p_\alpha \right] + \frac{\partial H}{\partial t}\,\mathrm{d}t\,. \tag{8.10}$$

[2] Aufgrund dieser Beziehung ist es sinnvoll, die Hamilton-Funktion als die *negative* Legendre-Transformation zu definieren.

Zum anderen gilt mit $H = \sum_\alpha p_\alpha q^\alpha - L$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}H &= \sum_{\alpha=1}^{N} \left[-\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\,\mathrm{d}q^\alpha + \dot{q}^\alpha\,\mathrm{d}p_\alpha + p_\alpha\,\mathrm{d}\dot{q}^\alpha - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\,\mathrm{d}\dot{q}^\alpha \right] - \frac{\partial L}{\partial t}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{\alpha=1}^{N} \left[-\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\,\mathrm{d}q^\alpha + \dot{q}^\alpha\,\mathrm{d}p_\alpha \right] - \frac{\partial L}{\partial t}\,\mathrm{d}t\,, \end{aligned} \tag{8.11}$$

wobei sich die beiden Koeffizienten von $\mathrm{d}\dot{q}$ per Definition der konjugierten Impulse aufheben. Da $(\mathrm{d}q\,, \mathrm{d}p\,, \mathrm{d}t)$ eine Basis der relevanten Differentialformen bilden, können wir durch Koeffizientenvergleich die partiellen Ableitungen von H ablesen

$$\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \dot{q}^\alpha, \qquad \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} = -\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\,, \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}\,. \tag{8.12}$$

Die erste Gleichung können wir direkt als Bewegungsgleichung für q auffassen, wohingehen die zweite Gleichung die verallgemeinerte Kraft F_α im obigen Kraftgesetz (8.3) durch H ausdrückt. Die resultierenden *kanonischen Bewegungsgleichungen* (*Hamiltonsche Gleichungen*) lauten also

$$\dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\,, \qquad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}\,. \tag{8.13}$$

Dies sind $2N$ Differentialgleichungen erster Ordnung für die $2N$ unbekannten Funktionen $q^1(t), \ldots q^N(t)$ und $p_1(t), \ldots p_N(t)$. Durch Festlegung eines Anfangszustands ist somit die Bahn $(q(t), p(t))$ im Phasenraum eindeutig festgelegt.

Beispiele. Betrachten wir einige einfache Beispiele.

Ein Massepunkt im äusseren Potential $V(\vec{x})$ hat die Lagrange-Funktion

$$L = \tfrac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x}). \tag{8.14}$$

Der konjugierte Impuls $\vec{p} = m\dot{\vec{x}}$ ist der mechanische Impuls, und umgekehrt gilt $\dot{\vec{x}} = \vec{p}/m$. Für die Hamilton-Funktion ergibt sich

$$H = \vec{p}\cdot\dot{\vec{x}} - L = \frac{\vec{p}^2}{m} - \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x}). \tag{8.15}$$

Für ein zweidimensionales System mit Zentralpotential in Polarkoordinaten (r, φ), siehe Abschnitt 2.1

$$L = \tfrac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r), \tag{8.16}$$

finden wir die konjugierten Impulse $p_r = m\dot{r}$ und $p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$ sowie die Hamilton-Funktion

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + V(r). \tag{8.17}$$

Für das recht allgemeine mechanische System,

$$L = \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} \tfrac{1}{2} G_{\alpha\beta}(q)\, \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta - V(q), \tag{8.18}$$

welches wir im Rahmen des Prinzips von Maupertuis in Abschnitt 6.7 diskutiert haben, findet man

$$p_\alpha = \sum_{\beta=1}^{N} G_{\alpha\beta}(q)\, \dot{q}^\beta, \qquad H = \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} \tfrac{1}{2} G^{\alpha\beta}(q)\, p_\alpha p_\beta + V(q), \tag{8.19}$$

wobei $G^{\alpha\beta}(q)$ die inverse Matrix zu $G_{\alpha\beta}(q)$ ist. Hier gilt also wieder $H = T + V$.

Schliesslich betrachten wir noch das geladene Teilchen in einem äusserem elektromagnetischen Feld, siehe Abschnitt 6.4

$$\begin{aligned} L &= \tfrac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - q\Phi(\vec{x},t) + q\dot{\vec{x}}\cdot\vec{A}(\vec{x},t), \\ \vec{p} &= m\dot{\vec{x}} + q\vec{A}, \\ H &= \frac{1}{2m}\left[\vec{p} - q\vec{A}(\vec{x},t)\right]^2 + q\Phi(\vec{x},t). \end{aligned} \tag{8.20}$$

In diesem Beispiel findet man, dass die Hamilton-Funktion in deutlich anderer Weise vom Vektorfeld $\vec{A}$ abhängt, als die Lagrange-Funktion.

Wir können das geladene Teilchen auch relativistisch behandeln. Die Lagrange-Funktion aus Abschnitt 6.6 lautet

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2} - q\Phi(\vec{x},t) + q\vec{v}\cdot\vec{A}(\vec{x},t). \tag{8.21}$$

Der kanonische Impuls lautet hier

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} + q\vec{A}. \tag{8.22}$$

Wie im nichtrelativistischen Fall unterscheidet er sich vom kinetischen Impuls. Die relativistische Hamilton-Funktion eines geladenen Teilchens in einem elektromagnetischen Feld lautet dann[3]

$$\begin{aligned} H(\vec{x},\vec{p},t) &= \vec{p}\cdot\vec{v} - L \\ &= \frac{m\vec{v}^2}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} + mc^2\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} + q\Phi \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} + q\Phi \\ &= c\sqrt{m^2c^2 + \left(\vec{p} - q\vec{A}(\vec{x},t)\right)^2} + q\Phi(\vec{x},t), \end{aligned} \tag{8.23}$$

[3]Im Gegensatz zur Wirkung $S[x]$ verhält sich die Hamilton-Funktion H nichttrivial unter Poincaré-Transformationen, weil sie die Zeitentwicklung in einem konkreten Inertialsystem beschreibt. Der Lagrange-Formalismus ist also von Vorteil in der Behandlung relativistischer Fragestellungen.

wobei wir im letzten Schritt die folgende Beziehung des kanonischen Impulses benutzt haben

$$\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)^2 + m^2c^2 = \frac{m^2\vec{v}^2}{1 - \vec{v}^2/c^2} + m^2c^2 = \frac{m^2c^2}{1 - \vec{v}^2/c^2}\,. \tag{8.24}$$

In allen Beispielen stimmen die kanonischen Bewegungsgleichungen mit den Euler-Lagrange-Gleichungen überein.

Hamiltonsches Prinzip. Eine nützliche Tatsache ist, dass wir die kanonischen Bewegungsgleichungen auch als Variationsprinzip ausdrücken können. Hierzu sei das Wirkungsfunktional für eine Bahn $(q(t), p(t))$ im Phasenraum definiert als

$$S[q,p] := \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \left(\sum_{\alpha=1}^{N} p_\alpha \dot{q}^\alpha - H(q,p,t) \right). \tag{8.25}$$

Man beachte, dass der Integrand zwar der Lagrange-Funktion entspricht, aber dass wir $q(t)$ und $p(t)$ als unabhängige Freiheitsgrade betrachten, auch wenn sich p durch $\dot{q}$ ausdrücken lässt.[4] Wir fordern, dass dieses Funktional für eine Bahn stationär ist

$$\delta S[q,p] = \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \left(\sum_{\alpha=1}^{N} p_\alpha \dot{q}^\alpha - H(q,p,t) \right) \stackrel{!}{=} 0, \tag{8.26}$$

wobei an den Randpunkten $t = t_0, t_1$ lediglich die Lagekoordinaten $q^\alpha(t_i)$ vorgegeben sind, wohingegen die Impulse $p_\alpha(t_i)$ beliebig gewählt werden können und in die Bestimmung der stationären Bahn eingehen.[5] In der Tat ergeben sich die kanonischen Gleichungen als Bedingung für eine stationäre Bahn im Phasenraum

$$\begin{aligned}
0 &= \delta S[q,p] \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \sum_{\alpha=1}^{N} \left[p_\alpha\, \delta\dot{q}^\alpha + \dot{q}^\alpha\, \delta p_\alpha - \frac{\partial H}{\partial q^\alpha}\, \delta q^\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\, \delta p_\alpha \right] \\
&= \sum_{\alpha=1}^{N} \left[p_\alpha\, \delta q^\alpha \right]_{t_0}^{t_1} \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \sum_{\alpha=1}^{N} \left[\left(\dot{q}^\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \right) \delta p_\alpha - \left(\dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \right) \delta q^\alpha \right].
\end{aligned} \tag{8.27}$$

Hier haben wir den Term $p\,\delta\dot{q}$ partiell integriert, wobei der resultierende Randterm aufgrund unserer Randbedingung $\delta q = 0$ verschwindet. Da die Gleichung für alle Variationen δq^α und δp_α zutreffen muss, erhalten wir gerade die Hamiltonschen Gleichungen.

[4] Die Beziehung zwischen p und $\dot{q}$ ergibt sich schliesslich als Bewegungsgleichung, man darf diese Beziehung aber nicht vor der Bestimmung der Bewegungsgleichungen annehmen.

[5] Für ein System von $2N$ Differentialgleichungen erster Ordnung können entweder $2N$ Anfangsbedingungen oder jeweils N Randbedingungen festgelegt werden. Wir werden sehen, dass es konsistent ist, jeweils die Lagekoordinaten festzuhalten.

8.3 Poisson-Klammern

Wie eingangs erwähnt, beschreibt das Paar (q, p) als Punkt des Phasenraums einen Zustand des Systems. Eine Funktion $F(q, p, t)$ des Zustands und ggf. der Zeit stellt somit eine *Observable* des Systems dar. Zum Beispiel ist die Funktion $H(q, p, t)$ nicht nur die Hamilton-Funktion, aus der die Bewegungsgleichungen folgen, sondern sie misst auch die (momentane) Gesamtenergie des Systemzustands. Wir wollen uns nun etwas mit Observablen und ihrer Zeitentwicklung beschäftigen.

Poisson-Klammern. Sei zunächst $F(q, p)$ eine beliebige Funktion auf dem Phasenraum, d.h. eine Observable, die nicht explizit von der Zeit t abhängt. Entlang einer physikalischen Bahn $(q(t), p(t))$ ändert sich dann $F(q(t), p(t))$ gemäss

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F\big(q(t), p(t)\big) &= \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\frac{\partial F}{\partial q^\alpha}\, \dot{q}^\alpha + \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\, \dot{p}_\alpha \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\frac{\partial F}{\partial q^\alpha}\, \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\, \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \right). \end{aligned} \tag{8.28}$$

Für zwei beliebige Funktionen F und G des Zustands (q, p) definiert man nun die *Poisson-Klammer* von F und G als den Ausdruck

$$\{F, G\} := \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\frac{\partial F}{\partial q^\alpha}\, \frac{\partial G}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\, \frac{\partial G}{\partial q^\alpha} \right). \tag{8.29}$$

Die *totale Zeitableitung* von F entlang einer physikalischen Bahn schreibt sich dann als Poisson-Klammer mit der Hamilton-Funktion

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F\big(q(t), p(t)\big) = \{F, H\}\big(q(t), p(t)\big). \tag{8.30}$$

Für eine Observable $F(q, p, t)$ mit expliziter Zeitabhängigkeit trägt zusätzlich noch die partielle Ableitung nach der Zeit bei

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}\,. \tag{8.31}$$

Die Poisson-Klammern für die Impuls- und Lagekoordinaten untereinander haben eine besonders einfache Form. In der Tat rechnet man leicht nach, dass die *kanonischen Poisson-Klammern* gelten[6]

$$\{q^\alpha, q^\beta\} = 0, \qquad \{q^\alpha, p_\beta\} = \delta^\alpha_\beta, \qquad \{p_\alpha, p_\beta\} = 0. \tag{8.32}$$

Weiterhin lassen sich die kanonischen Bewegungsgleichungen (8.13) einheitlich mittels Poisson-Klammer schreiben als

$$\dot{q}^\alpha = \{q^\alpha, H\}, \qquad \dot{p}_\alpha = \{p_\alpha, H\}. \tag{8.33}$$

[6] Poisson-Klammern werden häufig durch ihre Werte für die elementaren Zustandskoordinaten (q, p) spezifiziert. Zusammen mit der allgemeinen Struktur (8.29) legen diese sie eindeutig fest.

Poisson-Algebra. Die Poisson-Klammer gibt der Algebra der (unendlich oft differenzierbaren) Funktionen auf dem Phasenraum die Struktur einer *Poisson-Algebra*. Die übliche Algebrastruktur ist durch punktweise Addition und Multiplikation definiert

$$\begin{aligned}(\lambda F + \mu G)(q,p) &= \lambda F(q,p) + \mu G(q,p),\\ (F \cdot G)(q,p) &= F(q,p) \cdot G(q,p).\end{aligned} \tag{8.34}$$

Dies beschreibt daher eine kommutative Algebra, d.h. ein Vektorraum zusammen mit einem assoziativen kommutativen Produkt, das das Distributivgesetz erfüllt.

Durch die Poisson-Klammer wird ein zweites, nichtkommutatives Produkt eingeführt. Es ist offensichtlich antisymmetrisch

$$\{F,G\} = -\{G,F\}, \tag{8.35}$$

und ist wie folgt verträglich mit der Algebra der Funktionen

$$\begin{aligned}\{F, \lambda G + \mu H\} &= \lambda\{F,G\} + \mu\{F,H\},\\ \{F, G\cdot H\} &= \{F,G\}\cdot H + G\cdot\{F,H\}.\end{aligned} \tag{8.36}$$

Das durch die Poisson-Klammer definierte Produkt ist nicht assoziativ; stattdessen gilt die sogenannte *Jacobi-Identität* für alle Tripel F, G, H von Funktionen

$$\big\{\{F,G\},H\big\} + \big\{\{G,H\},F\big\} + \big\{\{H,F\},G\big\} = 0. \tag{8.37}$$

Man kann durch Einsetzen zeigen, dass die oben definierte Poisson-Klammer die Jacobi-Identität erfüllt; dies erfordert lediglich etwas Geduld und Konzentration.

Die Jacobi-Identität ist typisch für antisymmetrische, nichtassoziative Produkte. Zum Beispiel erfüllt der Kommutator $[\cdot,\cdot]$ zweier quadratischer Matrizen die Jacobi-Identität

$$[A,B] := AB - BA, \tag{8.38}$$

wobei das Produkt durch die assoziative Matrixmultiplikation definiert ist.[7] Eine kommutative Algebra mit einem zusätzlichen antisymmetrischen bilinearen Produkt, welches sowohl die Derivationseigenschaft bezüglich des ersten Produktes besitzt als auch die Jacobi-Identität bezüglich des zweiten Produktes erfüllt, nennt man eine Poisson-Algebra. Die Poisson-Struktur ist für die Quantisierung klassischer Systeme von grosser Bedeutung und geht dort in eine Quantenalgebra über.[8]

[7] Die Jacobi-Identität impliziert zwar in der Regel ein nichtassoziatives Produkt, dennoch steht sie wie hier meist mit einer assoziativen Struktur in Beziehung.

[8] In der Quantenmechanik werden Observable durch lineare Operatoren auf einem Hilbert-Raum dargestellt. Der Kommutator zweier Observablen geht im klassischen Grenzfall bis auf einen Faktor $1/i\hbar$ über in die Poisson-Klammer der entsprechenden klassischen Observablen.

Derivation. Wir werden oft die Poisson-Klammer einer vorgegebenen Funktion F mit anderen Observablen G benötigen. Dafür ist es sinnvoll, einen Differentialoperator $\mathcal{D}[F]$ erster Ordnung einzuführen, der diese Poisson-Klammer ausführt

$$\mathcal{D}[F]G = \{F, G\}. \tag{8.39}$$

Explizit lautet $\mathcal{D}[F]$ dann für unsere Poisson-Klammer (8.29)

$$\mathcal{D}[F] := \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\frac{\partial F}{\partial q^\alpha} \frac{\partial}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \right). \tag{8.40}$$

Hiermit nehmen z.B. die kanonischen Bewegungsgleichungen (8.33) eine sehr kompakte Form an

$$(\dot{q}, \dot{p}) = -\mathcal{D}[H](q, p). \tag{8.41}$$

Der Operator $\mathcal{D}[F]$ besitzt einige nützliche Eigenschaften: Die Verträglichkeit (8.34) der Poisson-Klammer mit der Algebra der Funktionen besagt, dass $\mathcal{D}[F]$ eine *Derivation* der Algebra ist. Die Derivationseigenschaft schreibt sich dann als

$$\mathcal{D}[F](G \cdot H) = (\mathcal{D}[F]G) \cdot H + G \cdot (\mathcal{D}[F]H), \tag{8.42}$$

was gerade die Produktregel der Differentiation ist. Unter Ausnutzung der Antisymmetrie (8.35) der Poisson-Klammer kann man auch die Jacobi-Identität (8.37) in die Sprache der Differentialoperatoren übersetzen als

$$\mathcal{D}[F]\,\mathcal{D}[G]\,H - \mathcal{D}[G]\,\mathcal{D}[F]\,H = \mathcal{D}[\{F, G\}]\,H, \tag{8.43}$$

oder kurz als Kommutator $[\mathcal{D}[F], \mathcal{D}[G]] = \mathcal{D}[\{F, G\}]$.

8.4 Geometrie des Phasenraums

Anstelle der obigen algebraischen Beschreibung der Struktur der Mechanik kann man auch die geometrische Struktur des Phasenraums zum Ausgangspunkt nehmen. Dies führt dann auf eine Beschreibung der Mechanik im Rahmen der *symplektischen Geometrie*. Um diesen Gesichtspunkt zu erklären, müssen wir zunächst einen weiteren Ausflug zu den Grundlagen der Differentialgeometrie machen und Vektorfelder und Differentialformen einführen.[9] Damit können wir dann der Poisson-Klammer eine geometrische Interpretation geben.

Vektorfelder. Ein *Vektorfeld* v über einem Raum $\mathcal{M}$ der Dimension n ist eine Funktion, die einem Punkt $x \in \mathcal{M}$ ein Element des *Tangentialraums* $\mathbb{T}_x\mathcal{M}$ zuordnet

$$v(x) \in \mathbb{T}_x\mathcal{M}. \tag{8.44}$$

[9] Wir werden einige Konzepte etwas vereinfachen, um nicht mit Mannigfaltigkeiten, Karten, Atlanten, Bündeln und Schnitten derselben arbeiten zu müssen.

Ein Vektor des Tangentialraum $\mathbb{T}_x\mathcal{M}$ beschreibt eine infinitesimale Verschiebung auf $\mathcal{M}$ ausgehend vom Punkt x.[10] Ein Vektorfeld beschreibt damit eine infinitesimale Verschiebung für jeden Punkt des Raums.

Jeder Tangentialraum $\mathbb{T}_x\mathcal{M}$ ist isomorph zu $\mathbb{R}^n$, allerdings werden die Tangentialräume zu verschiedenen Punkten x klar voneinander getrennt.[11]

Formal wird der Tangentialraum $\mathbb{T}_x\mathcal{M}$ von $\mathcal{M}$ im Punkt $x \in \mathcal{M}$ aufgespannt von den *Differentialoperatoren* $\partial/\partial x^i$, die eine Verschiebung erzeugen,

$$\mathbb{T}_x\mathcal{M} := \text{span}\{\partial/\partial x^i; i = 1, \ldots, n\}. \tag{8.45}$$

Somit kann ein Vektorfeld v in Komponenten v^i geschrieben werden als

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n} v^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}\,. \tag{8.46}$$

Unter allgemeinen Koordinatentransformationen verhalten sich die Differentialoperatoren $\partial/\partial x^i$ per Definition in Abschnitt 5.3 wie kovariante Vektoren. Entsprechend verhalten sich die Komponenten v^i wie kontravariante Vektoren, so dass die Kombination $v(x)$ sich wie ein Skalarfeld verhält.

Wir haben bereits zwei Vektorfelder kennengelernt: Zum einen haben wir im Rahmen der Symmetrien in Abschnitt 7.2 gesehen, dass ein Fluss ϕ_λ durch ein Vektorfeld v beschrieben wird

$$v(q) := \sum_{\alpha=1}^{N} v^\alpha(q) \frac{\partial}{\partial q^\alpha}\,, \qquad v^\alpha(q) := \frac{\partial \phi^\alpha_\lambda}{\partial \lambda}(q)\bigg|_{\lambda=0}. \tag{8.47}$$

Der Differentialoperator $v(q)$ erzeugt den Fluss auf eine Funktion $f(q)$ über die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} f_\lambda(q) = -v(q) f_\lambda(q), \tag{8.48}$$

welche von der transformierten Funktion $f_\lambda(\phi_\lambda(q)) = f(q)$ gelöst wird. Zum anderen ist die über die Poisson-Klammer definierte Derivation $\mathcal{D}[F] = \{F, \cdot\}$ in (8.40) in diesem Sinne ein Vektorfeld auf dem Phasenraum.

Duale Vektorfelder. Neben Vektorfeldern gibt es auch in natürlicher Weise *duale Vektorfelder*. Ein duales Vektorfeld ψ ordnet jedem Punkt $x \in \mathcal{M}$ einen Vektor des *Kotangentialraums* $\mathbb{T}^*_x\mathcal{M}$ an diesem Punkt zu

$$\psi(x) \in \mathbb{T}^*_x\mathcal{M}. \tag{8.49}$$

[10] Wenn der Raum $\mathcal{M}$ in einen linearen Raum als (gekrümmter) Unterraum eingebettet ist, dann kann man sich den Tangentialraum $\mathbb{T}_x\mathcal{M}$ als linearen Unterraum vorstellen, der $\mathcal{M}$ im Punkt x tangiert. Das Konzept des Tangentialraums ist allerdings auch gültig, wenn $\mathcal{M}$ nicht in einen grösseren Raum eingebettet ist.

[11] Das bedeutet, dass es a priori keinen natürlichen Isomorphismus zwischen den Tangentialräumen $\mathbb{T}_x\mathcal{M}$ und $\mathbb{T}_y\mathcal{M}$ zweier Punkte $x \neq y$ gibt.

Ein solcher Vektor ist dual zu einem Vektor des Tangentialraums $\mathbb{T}_x\mathcal{M}$ an diesem Punkt, d.h. die Anwendung von $\psi(x)$ auf die Auswertung $v(x)$ eines Vektorfelds ist linear und ergibt eine Zahl

$$\psi(x) : \mathbb{T}_x\mathcal{M} \to \mathbb{R}, \qquad \psi(x)\big(v(x)\big) \in \mathbb{R}. \tag{8.50}$$

Ein duales Vektorfeld ψ bildet also ein Vektorfeld v linear und lokal auf eine Funktion ab, $\psi(v) : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$.

Etwas konkreter definieren die *Differentiale* $\mathrm{d}x^i$, $i = 1, \ldots, n$ der Koordinaten eine Basis des Kotangentialraums $\mathbb{T}_x^*\mathcal{M}$

$$\mathbb{T}_x^*\mathcal{M} := \mathrm{span}\{\mathrm{d}x^i; i = 1, \ldots, n\}. \tag{8.51}$$

Diese Basis ist dual zu den Differentialoperatoren $\partial/\partial x^i$

$$\mathrm{d}x^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) := \delta^i_j, \tag{8.52}$$

Da die Differentiale $\mathrm{d}x^i$ unter allgemeinen Koordinatentransformationen einen kontravarianten Vektor bilden, ist diese Dualitätsrelation unter solchen Transformationen erhalten. Ein allgemeines duales Vektorfeld ψ kann also in (kovarianten) Komponenten ψ_i geschrieben werden als

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x)\, \mathrm{d}x^i\,. \tag{8.53}$$

Die Auswertung auf ein Vektorfeld v mit (kontravarianten) Komponenten v^i ergibt dann das natürliche Skalarprodukt

$$\phi(v)(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)\, v^i(x). \tag{8.54}$$

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass Vektorfelder und duale Vektorfelder punktweise, d.h. für jeden Punkt x, den Relationen der linearen Algebra gehorchen.

Differentialformen. *Differentialformen* sind die mathematische Formulierung der in der Physik oft auftretenden infinitesimalen (orientierten) Weg-, Flächen und Volumenelemente über einem Raum $\mathcal{M}$. Der Grad k einer solchen *k-Form* ist dabei die Dimension des Unterraums dessen Volumenelement sie beschreibt. Sie lassen sich am einfachsten als Multilinearformen über Vektorfeldern auf $\mathcal{M}$ formulieren.

Wir verallgemeinern nun das Konzept des dualen Vektorfelds zu k-Formen ψ_k als Multilinearformen von k Vektorfeldern wie folgt: Hierbei ist eine 0-Form ψ_0 einfach eine gewöhnliche Funktion auf $\mathcal{M}$ (d.h. ein Skalarfeld)

$$\psi_0 : \mathcal{M} \to \mathbb{R}, \qquad \psi_0(x) \in \mathbb{R}. \tag{8.55}$$

Eine 1-Form ordnet jedem Punkt x ein Element des Kotangentialraums zu

$$\psi_1(x) \in \mathbb{T}_x^*\mathcal{M}, \qquad \psi_1(x) : \mathbb{T}_x\mathcal{M} \to \mathbb{R}. \tag{8.56}$$

Eine 2-Form ordnet jedem Punkt x ein Element des (antisymmetrischen) Tensorprodukts zweier Kotangentialräume bei x zu

$$\psi_2(x) \in (\mathbb{T}^*_x\mathcal{M})^{\wedge 2}. \tag{8.57}$$

Mit anderen Worten, bildet es ein Paar von Vektorfeldern linear und lokal auf eine Funktion ab

$$\psi_2(x) : \mathbb{T}_x\mathcal{M} \times \mathbb{T}_x\mathcal{M} \to \mathbb{R}, \qquad \psi_2(x)\big(v_1(x), v_2(x)\big) \in \mathbb{R}. \tag{8.58}$$

Insbesondere ist die Abbildung antisymmetrisch in den Vektoren

$$\psi_2(x)\big(v_2(x), v_1(x)\big) = -\psi_2(x)\big(v_1(x), v_2(x)\big). \tag{8.59}$$

Eine k-Form ψ_k an einem Punkt ist schliesslich eine multilineare, total antisymmetrische Abbildung von k Tangentialräumen an diesem Punkt auf $\mathbb{R}$

$$\psi_k(x) \in (\mathbb{T}^*_x\mathcal{M})^{\wedge k}, \qquad \psi_k(x) : (\mathbb{T}_x\mathcal{M})^{\wedge k} \to \mathbb{R}. \tag{8.60}$$

Auf dem Raum der Differentialformen ist das *äussere Produkt* $\wedge$ (*Dachprodukt*) definiert; es ordnet einer k-Form ψ und einer l-Form ϕ eine $(k+l)$-Form $\psi \wedge \phi$ zu. Diese Zuordnung ist assoziativ und distributiv, und es gilt

$$\psi \wedge \phi = (-1)^{kl} \phi \wedge \psi. \tag{8.61}$$

Für die Multiplikation einer k-Form ψ mit einer 0-Form (Funktion) f gilt

$$(f \wedge \psi)(v_1, \ldots, v_k) = f\, \psi(v_1, \ldots, v_k). \tag{8.62}$$

Das Symbol $\wedge$ wird in diesem Fall üblicherweise weggelassen. Für k 1-Formen $\psi_1, \ldots, \psi_k$ gilt andererseits

$$(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_k)(v_1, \ldots, v_k) = \det \begin{pmatrix} \psi_1(v_1) & \ldots & \psi_1(v_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_1(v_k) & \ldots & \psi_k(v_k) \end{pmatrix}. \tag{8.63}$$

Es gelten eine Reihe weiterer Rechenregeln für Differentialformen, die wir hier nicht betrachten wollen. In der Mechanik genügen meist 0-Formen (Funktionen, Skalarfelder), 1-Formen (duale Vektorfelder) und 2-Formen. Für letztere können wir die Rechenregeln noch einmal explizit ausführen: Das äussere Produkt zweier 1-Formen ψ_1, ψ_2 ist antisymmetrisch

$$\psi_1 \wedge \psi_2 = -\psi_2 \wedge \psi_1. \tag{8.64}$$

Für die Auswertung auf zwei Vektorfeldern v_1, v_2 gilt

$$(\psi_1 \wedge \psi_2)(v_1, v_2) := \psi_1(v_1)\, \psi_2(v_2) - \psi_1(v_2)\, \psi_2(v_1). \tag{8.65}$$

Man kann eine allgemeine 2-Form ψ in der Basis der Differentialformen $\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$ mit Koeffizienten $\psi_{ij} = -\psi_{ji}$ schreiben als

$$\psi(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \tfrac{1}{2} \psi_{ij}(x)\, \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j\,. \tag{8.66}$$

Für die Auswertung auf zwei Vektorfeldern v_1, v_2 mit Komponenten v_1^i, v_2^i gilt dann

$$\psi(v_1, v_2) = \sum_{i,j=1}^{n} \psi_{ij} v_1^i v_2^j. \tag{8.67}$$

Äussere Differentiation. Die *äussere Differentiation* d setzt das totale Differential von Funktionen auf höhere Differentialformen fort. Auf Funktionen f ist das totale Differential d über die Eigenschaft $\mathrm{d}f(v) = v\,f$ für jedes Vektorfeld v definiert. In der Basis der Differentialformen $\mathrm{d}x^i$ können wir $\mathrm{d}f$ entwickeln als

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i\,, \tag{8.68}$$

und mit der Eigenschaft der dualen Basen von $\mathbb{T}_x\mathcal{M}$ und $\mathbb{T}_x^*\mathcal{M}$ folgt wie gewünscht

$$\mathrm{d}f(v) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x^i(v)\,\frac{\partial f}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{n} v^i\,\frac{\partial f}{\partial x^i} = v\,f. \tag{8.69}$$

Die äussere Differentiation d wird auf Differentialformen nun so fortgesetzt, dass für das äussere Produkt einer k-Form ψ und einer l-Form ϕ die Produktregel der Differentiation gilt

$$\mathrm{d}(\psi\wedge\phi) = \mathrm{d}\psi\wedge\phi + (-1)^k\psi\wedge\mathrm{d}\phi. \tag{8.70}$$

Weiterhin wird verlangt, dass das zweimalige Anwenden von d auf eine beliebige Differentialform ψ immer Null ergibt

$$\mathrm{d}^2\psi = 0. \tag{8.71}$$

Ein Beispiel physikalischer Felder, die sich natürlich als Differentialformen schreiben lassen, ist das Magnetfeld $\vec{B}$ und das zugehörige Vektorpotential $\vec{A}$, die eine 2-Form bzw. eine 1-Form sind

$$\begin{aligned} A(\vec{x}) &= A_1(\vec{x})\,\mathrm{d}x_1 + A_2(\vec{x})\,\mathrm{d}x_2 + A_3(\vec{x})\,\mathrm{d}x_3 = \vec{A}(\vec{x})\cdot\mathrm{d}\vec{x}\,,\\ B(\vec{x}) &= B_1(\vec{x})\,\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3 + B_2(\vec{x})\,\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1 + B_3(\vec{x})\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\\ &= \sum_{i,j,k=1}^{3} \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}B_i(\vec{x})\,\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_k\,. \end{aligned} \tag{8.72}$$

Zum einen lautet die Divergenzfreiheit des Magnetfelds schlicht $\mathrm{d}B = 0$. Zum anderen lässt sich das Magnetfeld durch das Potential als $B = \mathrm{d}A$ ausdrücken; dies erfüllt die Divergenzfreiheit per Konstruktion mit $\mathrm{d}B = \mathrm{d}^2A = 0$. Weiterhin ist eine Eichtransformation mit der Funktion Λ gegeben durch

$$A \to A + \mathrm{d}\Lambda, \qquad B \to B + \mathrm{d}^2\Lambda = B. \tag{8.73}$$

Eine wichtige Struktur von Differentialformen in Bezug auf Integration ist die *De-Rham-Kohomologie*. In einer Kohomologie werden Elemente über die Eigenschaften *geschlossen* und *exakt* klassifiziert. Eine Differentialform ψ nennt man *geschlossen*, falls

$$\mathrm{d}\psi = 0. \tag{8.74}$$

Eine Differentialform ψ nennt man *exakt*, falls es eine Differentialform ϕ gibt, so dass

$$\psi = \mathrm{d}\phi. \tag{8.75}$$

Eine exakte Differentialform ist sicherlich geschlossen, denn es gilt $\mathrm{d}\psi = \mathrm{d}^2\phi = 0$. Umgekehrt gilt die Beziehung zwischen exakten und geschlossenen Formen nur unter bestimmten Voraussetzungen, die durch das *Lemma von Poincaré* konkretisiert werden: In einem kontrahierbaren Gebiet ist jede geschlossene Form exakt.

Dieses Lemma ist insbesondere für die Integration von Differentialformen von fundamentaler Bedeutung: Eine exakte Form kann auf einem kontrahierbaren Gebiet (d.h. einem Gebiet ohne Löcher) immer integriert werden. Für die geschlossene 2-Form B des Magnetfelds gilt somit, dass sie auf einem kontrahierbaren Gebiet exakt ist, und sich somit immer durch die 1-Form eines Vektorpotentials A ausdrücken lässt.

Ein weiteres Beispiel ist die 1-Form $W(\vec{x})$, die die Arbeit entlang eines Wegelements $\mathrm{d}\vec{x}$ in einem ortsabhängigen Kraftfeld $\vec{F}(\vec{x})$ beschreibt

$$W(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x} = F_1\,\mathrm{d}x_1 + F_2\,\mathrm{d}x_2 + F_3\,\mathrm{d}x_3\,. \tag{8.76}$$

Die 1-Form W ist genau dann geschlossen, wenn die Rotation des Kraftfeldes verschwindet, $\mathrm{d}W = 0$. In diesem Fall ist das Kraftfeld konservativ und die infinitesimale Arbeit ist minus das totale Differential der potentiellen Energie V

$$\mathrm{d}W = 0 \quad \Longrightarrow \quad W = -\mathrm{d}V. \tag{8.77}$$

Symplektische Form. Kommen wir nun zurück zum Phasenraum.[12] Jeder Phasenraumfunktion F ist mittels der Poisson-Klammer der Differentialoperator erster Ordnung $\mathcal{D}[F] = \{F, \cdot\}$ in (8.40) auf dem Phasenraum zugeordnet. Wie oben beschrieben ist ein solcher Differentialoperator ein Vektorfeld, und man nennt $\mathcal{D}[F]$ das *Hamiltonsche Vektorfeld* zu F. Die Poisson-Klammer ist eine antisymmetrische Bilinearform ω von Vektorfeldern,

$$\{F, G\} =: \omega\big(\mathcal{D}[F], \mathcal{D}[G]\big), \tag{8.78}$$

und sie stellt nach den obigen Ausführungen eine 2-Form dar.

Mit diesen Vorbereitungen können wir nun ω durch die Differentiale der Koordinaten (q, p) des Phasenraumes ausdrücken. Nach der Definition (8.40) des assoziierten Vektorfelds gilt

$$\frac{\partial}{\partial q^\alpha} = -\mathcal{D}[p_\alpha], \qquad \frac{\partial}{\partial p_\alpha} = \mathcal{D}[q^\alpha]. \tag{8.79}$$

Setzen wir dies in die obige Relation ein, so finden wir

$$\begin{aligned}
\omega\left(\frac{\partial}{\partial q^\alpha}\,, \frac{\partial}{\partial q^\beta}\right) &= \{p_\alpha, p_\beta\} = 0, \\
\omega\left(\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\,, \frac{\partial}{\partial q^\beta}\right) &= -\{q^\alpha, p_\beta\} = -\delta^\alpha_\beta, \\
\omega\left(\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\,, \frac{\partial}{\partial p_\beta}\right) &= \{q^\alpha, q^\beta\} = 0.
\end{aligned} \tag{8.80}$$

[12] In der Sprache der Differentialgeometrie ist der Phasenraum das Kotangentialbündel $\mathbb{T}^*\mathcal{M}$ des Konfigurationsraums $\mathcal{M}$. Einfach so!

Diese Information genügt, um die 2-Form ω eindeutig zu rekonstruieren[13]

$$\omega = \sum_{\alpha=1}^{N} \mathrm{d}q^\alpha \wedge \mathrm{d}p_\alpha \,. \tag{8.81}$$

Insbesondere ist daher die 2-Form ω geschlossen. Ausserdem ist sie nichtentartet in dem folgenden Sinn: Falls $\omega(v_1, v_2) = 0$ für alle v_2, so folgt daraus, dass $v_1 = 0$. Eine geschlossene nichtentartete 2-Form nennt man *symplektisch*.

Nach einem *Satz von Darboux* kann man jede symplektische 2-form durch eine Wahl geeigneter Koordinaten *lokal* in die obige Normalform bringen.

8.5 Kanonische Transformationen

Mit den Poisson-Klammern $\{\cdot,\cdot\}$ bzw. der symplektischen Form ω hat der Phasenraum eine ausgezeichnete Struktur. In diesem Abschnitt wollen wir die Klasse der Transformationen des Phasenraums besprechen, die diese Struktur erhalten, den sogenannten kanonischen Transformationen. Kanonische Transformationen spielen eine wichtige Rolle für Lösungen des Systems. So ist zum Beispiel die Zeitentwicklung selbst eine Gruppe kanonischer Transformationen, wie wir im kommenden Abschnitt 8.6 sehen werden.

Phasenkoordinaten. Zunächst wollen wir die N Lagekoordinaten q^α und ihre N konjugierten Impulse p_α als die $2N$ *Phasenkoordinaten* z^μ, $\mu, \nu = 1, \ldots, 2N$ des Systems zusammenfassen

$$z := (z^1, \ldots, z^{2N}) = (q^1, \ldots, q^N, p_1, \ldots, p_N). \tag{8.82}$$

Dies vereinfacht die Behandlung von Transformationen des Phasenraums, da wir Lage- und Impulskoordinaten nicht gesondert betrachten müssen. Weiterhin vereinfachen sich die bislang betrachteten Strukturen mit der Einführung einer antisymmetrischen Matrix $\varepsilon = \varepsilon_{\mu\nu}$ auf dem Phasenraum

$$\varepsilon := \begin{pmatrix} 0 & +\mathrm{id}_N \\ -\mathrm{id}_N & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.83}$$

Wir wollen sie die *symplektische Struktur* nennen. Die duale Matrix $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}^{\mu\nu}$ mit denselben Komponenten ist bis auf das Vorzeichen das Inverse von ε

$$\varepsilon\tilde{\varepsilon} = -\,\mathrm{id}_{2N}\,, \qquad \tilde{\varepsilon} = -\varepsilon^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & +\mathrm{id}_N \\ -\mathrm{id}_N & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.84}$$

Die kanonischen Bewegungsgleichungen (8.13)

$$\dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\,, \qquad \dot{p}_\alpha = -\,\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}\,. \tag{8.85}$$

[13] Hierzu stellt man ω anhand allgemeiner Komponenten in der Basis bestehend aus $\mathrm{d}q^\alpha \wedge \mathrm{d}q^\beta$, $\mathrm{d}q^\alpha \wedge \mathrm{d}p_\beta$ und $\mathrm{d}p_\alpha \wedge \mathrm{d}p_\beta$ dar und gleicht die Koeffizienten ab.

lauten in dieser Notation

$$-\sum_{\nu=1}^{2N} \varepsilon_{\mu\nu}\dot{z}^\nu = \frac{\partial H}{\partial z^\mu} \qquad \text{bzw.} \qquad -\varepsilon\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial z}\,. \tag{8.86}$$

Die zweite Form in Vektornotation beruht auf dem Vektor $\partial/\partial z$ aller partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial z} := \left(\frac{\partial}{\partial z^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z^{2N}}\right). \tag{8.87}$$

Die Poisson-Klammer lässt sich ebenfalls sehr kompakt schreiben als das durch die Bilinearform $\tilde{\varepsilon}$ induzierte Skalarprodukt der Gradienten der Funktionen

$$\{F, G\} = \sum_{\mu,\nu=1}^{2N} \tilde{\varepsilon}^{\mu\nu}\, \frac{\partial F}{\partial z^\mu}\, \frac{\partial G}{\partial z^\nu} = \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^{\mathsf{T}} \tilde{\varepsilon}\, \frac{\partial G}{\partial z}\,. \tag{8.88}$$

Dementsprechend lautet die zur Funktion F assoziierte Derivation $\mathcal{D}[F]$ kurz

$$\mathcal{D}[F] = \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^{\mathsf{T}} \tilde{\varepsilon}\, \frac{\partial}{\partial z}\,. \tag{8.89}$$

Die symplektische Form ω ist schliesslich

$$\omega = \sum_{\mu,\nu=1}^{2N} \tfrac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\, \mathrm{d}z^\mu \wedge \mathrm{d}z^\nu\,. \tag{8.90}$$

Wir sehen also, dass sich die relevanten Strukturen des Hamilton-Formalismus mittels der Matrix ε formulieren lassen. In einem symplektischen Raum besitzt die Matrix ε eine ähnliche Funktion wie die Metrik in einem metrischen Raum.

Kanonische Transformationen. Wir wollen nun die Struktur solcher bijektiver Koordinatentransformationen studieren

$$z = z(\bar{z}), \qquad \bar{z} = \bar{z}(z), \tag{8.91}$$

welche die kanonischen Gleichungen (8.86) forminvariant lassen

$$-\varepsilon\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial z} \quad \Longleftrightarrow \quad -\varepsilon\dot{\bar{z}} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{z}}\,. \tag{8.92}$$

Eine Transformation ist wird *kanonisch* genannt, wenn diese Beziehung für jede Funktion H und ihre transformierte $\bar{H}(\bar{z}) = H(z)$ zutrifft. Wir wollen nun die Bedingung und Eigenschaften kanonischer Transformationen diskutieren.

Wir definieren zunächst die Jacobi-Matrix $A^\mu{}_\nu$ unserer Transformation und ihre Inverse A^{-1}

$$A^\mu{}_\nu(\bar{z}) := \frac{\partial z^\mu}{\partial \bar{z}^\nu}\,, \qquad (A^{-1})^\mu{}_\nu = \frac{\partial \bar{z}^\mu}{\partial z^\nu}\,. \tag{8.93}$$

Damit gilt aufgrund der Kettenregel der Differentiation

$$\dot{z} = A\dot{\bar{z}} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial H}{\partial z} = (A^{-1})^{\mathsf{T}} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{z}}\,. \tag{8.94}$$

Eingesetzt in die ursprünglichen kanonischen Gleichungen ergibt dies

$$-\varepsilon A\dot{\bar{z}} = (A^{-1})^{\mathsf{T}} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{z}} \qquad \text{bzw.} \qquad -A^{\mathsf{T}}\varepsilon A\dot{\bar{z}} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{z}}\,. \tag{8.95}$$

Dies hat dieselbe Form wie die ursprünglichen kanonischen Gleichungen falls $A^{\mathsf{T}}\varepsilon A = \varepsilon$. Damit folgt der Satz: Eine Transformation ist kanonisch, genau wenn

$$A^{\mathsf{T}}\,\varepsilon\,A = \varepsilon \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_{\rho,\sigma=1}^{2N} \varepsilon_{\rho\sigma} A^{\rho}{}_{\mu} A^{\sigma}{}_{\nu} = \varepsilon_{\mu\nu}. \tag{8.96}$$

Eine kanonische Transformation ist also dadurch ausgezeichnet, dass sie die Matrix ε erhält.

Diese Bedingung an kanonische Transformationen impliziert, dass sie auch die Poisson-Klammer erhalten. Für beliebige transformierte Funktionen $\bar{F}(\bar{z}) = F(z)$ und $\bar{G}(\bar{z}) = G(z)$ gilt

$$\{F, G\}(z) = \{\bar{F}, \bar{G}\}(\bar{z}). \tag{8.97}$$

Dies folgt durch Nachrechnen

$$\begin{aligned} \{F, G\} &= \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^{\mathsf{T}} \tilde{\varepsilon}\, \frac{\partial G}{\partial z} = \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{z}}\right)^{\mathsf{T}} A^{-1}\tilde{\varepsilon}(A^{-1})^{\mathsf{T}} \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{z}} \\ &= \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{z}}\right)^{\mathsf{T}} \tilde{\varepsilon}\, \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{z}} = \{\bar{F}, \bar{G}\}. \end{aligned} \tag{8.98}$$

Umgekehrt ist jede Transformation kanonisch, welche die Poisson-Klammer erhält. Analog zu der Rechnung weiter oben folgt hier die Bedingung $A^{\mathsf{T}}\varepsilon A = \varepsilon$.

Schliesslich können wir noch die Transformation der symplektischen Form ω betrachten, die dank ihrer Beziehung zu den Poisson-Klammern offensichtlich auch invariant unter kanonischen Transformationen ist

$$\omega = \bar{\omega}. \tag{8.99}$$

Auch diese Beziehung ist äquivalent zu $A^{\mathsf{T}}\varepsilon A = \varepsilon$.

Beispiele. Die *linearen* Abbildungen $A : \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}^{2N}$ mit der Eigenschaft $A^{\mathsf{T}}\varepsilon A = \varepsilon$ heissen *symplektisch* und bilden die *symplektische Gruppe* $\mathrm{Sp}(2N, \mathbb{R})$. Im Gegensatz zu einer orthogonalen Transformation muss eine kanonische Transformation aber keineswegs linear sein.

Ein Beispiel für eine nicht-lineare kanonische Transformation ist wie folgt: Wenn die Lagekoordinaten q^{α} beliebig transformiert werden,

$$\bar{q} = \bar{q}(q), \tag{8.100}$$

dann gibt es immer eine Transformation der Impulse,

$$\bar{p}_\alpha = \sum_{\beta=1}^{N} \frac{\partial q^\beta}{\partial \bar{q}^\alpha}\, p_\beta, \tag{8.101}$$

so dass die Gesamttransformation kanonisch ist. Dies lässt sich leicht durch Vergleich zweier 1-Formen sehen

$$\sum_{\alpha=1}^{N} p_\alpha \,\mathrm{d}q^\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} \bar{p}_\alpha \,\mathrm{d}\bar{q}^\alpha\,, \tag{8.102}$$

woraus mittels äusserer Differentiation sofort $\omega = \bar{\omega}$ folgt. Dies entspricht einer allgemeinen Transformation des Konfigurationsraums, die wir bereits im Lagrange-Formalismus ausgiebig verwendet haben. In der Fortsetzung auf den Phasenraum transformieren die konjugierten Impulse wie oben mit der inversen Jacobi-Matrix.

Eine allgemeine Transformation des Konfigurationsraums $q \mapsto \bar{q}(q)$ erklärt auch die hier verwendete Indexstruktur der Lage- und Impulskoordinaten q^α und p_α. Die Differentiale der Lagekoordinaten $\mathrm{d}q^\alpha$ verhalten sich wie kontravariante Vektoren,

$$\mathrm{d}\bar{q}^\alpha = \sum_{\beta=1}^{N} \frac{\partial \bar{q}^\alpha}{\partial q^\beta}\,\mathrm{d}q^\beta\,, \tag{8.103}$$

während die Impulse $p_\alpha := \partial L/\partial q^\alpha$ wie oben gesehen kovariante Vektoren darstellen.

Die Gruppe der kanonischen Transformationen ist jedoch noch wesentlich grösser; sie erlauben es auch, Lage- und Impulskoordinaten zu mischen. Zum Beispiel ist die folgende Transformation kanonisch

$$\bar{q}^\alpha = p_\alpha, \qquad \bar{p}_\alpha = -q^\alpha. \tag{8.104}$$

Eine solche Transformation kann für ein einzelnes Paar konjugierter Koordinaten oder für alle Koordinaten durchgeführt werden. An diesem Beispiel sieht man auch, dass sich die oben besprochene Indexstruktur nur auf Transformationen des Konfigurationsraums bezieht. Für allgemeine kanonische Transformationen, welche Lage- und Impulskoordinaten mischen, hat die Position der Indizes keine Relevanz.

8.6 Zeitentwicklung

Die Zeitentwicklung eines *zeitunabhängigen* (autonomen) Hamiltonschen Systems kann man sich als Transformation ϕ_t des Phasenraums vorstellen, welche die Anfangsbedingungen bei $t = 0$ auf den Zustand zu einer anderen Zeit t abbildet.[14] Für jede Bahn $z(t)$, welche die kanonischen Gleichungen erfüllt, gilt also

$$\phi_t\big(z(0)\big) = z(t). \tag{8.105}$$

[14] In einem zeitunabhängigen System hängt die Zeitentwicklung von der Differenz der Start- und Endzeit ab. In einem System, in dem die Hamilton-Funktion explizit von der Zeit abhängt, benötigt die Zeitentwicklung beide Zeiten

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass die Abbildung ϕ_t kanonisch ist, und somit einen kanonischen Fluss darstellt. Basierend darauf werden wir zwei relevante Sätze zur Dynamik im Phasenraum kennenlernen.

Hamiltonscher Fluss. Die Abbildung ϕ_t bildet einen Fluss im Sinne von Abschnitt 7.2, denn offensichtlich gelten die Gruppeneigenschaften $\phi_0 = \mathrm{id}$ und $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$. Dieser Fluss wird der *Hamiltonsche Fluss* ϕ_t genannt.

Wir wollen nun zeigen, dass der Hamiltonsche Fluss kanonisch ist, d.h. für jedes t eine kanonische Abbildung darstellt. Als Vorbereitung bestimmen wir zunächst das erzeugende Vektorfeld, indem wir die vorige Bedingung nach t ableiten

$$\frac{\partial \phi_t}{\partial t}\big(z(0)\big) = \dot{z}(t) = \tilde{\varepsilon}\,\frac{\partial H}{\partial z}\big(z(t)\big) = \tilde{\varepsilon}\,\frac{\partial H}{\partial z}\big(\phi_t(z(0))\big). \tag{8.106}$$

Dies gilt für eine beliebige Anfangsbedingung $z(0)$ und somit

$$\frac{\partial \phi_t}{\partial t}\big(z\big) = \tilde{\varepsilon}\,\frac{\partial H}{\partial z}\big(\phi_t(z)\big). \tag{8.107}$$

Setzen wir hier $t = 0$ so ergibt sich das Vektorfeld

$$\sum_{\mu=1}^{2N} \frac{\partial \phi_t^\mu}{\partial t}\bigg|_{t=0} \frac{\partial}{\partial z^\mu} = \sum_{\mu,\nu=1}^{2N} \tilde{\varepsilon}^{\mu\nu}\,\frac{\partial H}{\partial z^\nu}\,\frac{\partial}{\partial z^\mu} = -\mathcal{D}[H]. \tag{8.108}$$

Wir sehen also, dass die Zeitentwicklung durch das Vektorfeld $-\mathcal{D}[H]$ und damit durch die negative Hamilton-Funktion erzeugt wird.

Als nächstes betrachten wir eine Funktion F, die nicht explizit von der Zeit abhängt. Die aktiv transformierte Funktion F_t ist dann wie üblich definiert als

$$F_t\big(\phi_t(z)\big) = F(z). \tag{8.109}$$

Da die rechte Seite dieser Definition nicht von t abhängt, erfüllen die transformierten Funktionen die Differentialgleichung

$$\frac{\partial F_t}{\partial t} + \left(\frac{\partial \phi_t}{\partial t}\right)^{\mathsf{T}} \frac{\partial F_t}{\partial z} = 0. \tag{8.110}$$

Setzen wir das obige Resultat für $\partial\phi_t/\partial t$ ein, so ergibt sich[15]

$$\frac{\partial F_t}{\partial t} = \left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)^{\mathsf{T}} \tilde{\varepsilon}\,\frac{\partial F_t}{\partial z} = \{H, F_t\} = \mathcal{D}[H]F_t. \tag{8.111}$$

Um zu zeigen, dass der Fluss ϕ_t kanonisch ist, betrachten wir die Poisson-Klammer zweier zeitunabhängiger Funktionen F, G.[16] Eine wichtige Konsequenz der

[15] Im Vergleich mit (8.30) und (8.31) ist zu beachten, dass die Funktion F_t hier so definiert wurde, dass effektiv $\mathrm{d}F_t/\mathrm{d}t = 0$.

[16] Die Hamiltonschen Gleichungen eignen sich hierfür nicht gut, da sie selbst die Zeitentwicklung von Bahnen $z(t)$ definieren, was mit dem Fluss ϕ_t leicht zu Verwechlungen führen kann.

Jacobi-Identität ist, dass die Poisson-Klammer mit der Zeitentwicklung verträglich ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\{F_t, G_t\} &= \left\{\frac{\partial F_t}{\partial t}, G_t\right\} + \left\{F_t, \frac{\partial G_t}{\partial t}\right\} \\ &= \big\{\{H, F_t\}, G_t\big\} + \big\{F_t, \{H, G_t\}\big\} \\ &= \big\{H, \{F_t, G_t\}\big\}. \end{aligned} \tag{8.112}$$

Wir sehen also, dass die Poisson-Klammer $\{F_t, G_t\}$ als Funktion auf dem Phasenraum dieselbe Differentialgleichung wie F_t erfüllt. Zusammen mit der Anfangsbedingung bei $t = 0$ folgt aus der Differentialgleichung für die transformierte Poisson-Klammer

$$\{F_t, G_t\}\big(\phi_t(z)\big) = \{F, G\}(z). \tag{8.113}$$

Somit ist der Hamiltonsche Fluss kanonisch.

Der Satz von Liouville. Die Tatsache, dass die Zeitentwicklung ein kanonischer Fluss ist, hat einige relevante Konsequenzen für die Dynamik eines mechanischen Systems. Zur Vorbereitung zum Wiederkehrsatz von Poincaré zeigen wir nun den *Satz von Liouville* zum *Volumen des Phasenraums*: Das *Phasenvolumen* einer jeden Untermenge Ω des Phasenraums

$$\mu(\Omega) = \int_\Omega (\mathrm{d}z)^{2N} \tag{8.114}$$

ist invariant unter der Zeitentwicklung

$$\mu\big(\phi_t(\Omega)\big) = \mu(\Omega). \tag{8.115}$$

Zum Beweis betrachten wir eine allgemeine kanonische Abbildung $\phi : z \mapsto \bar{z}$. Wie wir in Abschnitt 8.5 gesehen haben, erfüllt die Jacobi-Matrix $A^\mu{}_\nu = \partial z^\mu / \partial \bar{z}^\nu$ die symplektische Relation $\varepsilon = A^\intercal \varepsilon A$. Die Determinante dieser Relation lautet

$$\det \varepsilon = \det(A^\intercal \varepsilon A) = (\det A)^2 \det \varepsilon, \tag{8.116}$$

woraus für die Jacobi-Determinante $\det A = \pm 1$ folgt. Für das Phasenvolumen ergibt sich sofort

$$\mu\big(\phi(\Omega)\big) = \int_{\phi(\Omega)} (\mathrm{d}\bar{z})^{2N} = \int_\Omega (\mathrm{d}z)^{2N} \left|\det A^{-1}\right| = \mu(\Omega). \tag{8.117}$$

Das Phasenvolumen ist also invariant unter jeder kanonischen Transformation ϕ, insbesondere also unter der Zeitentwicklung ϕ_t.

Die Bedeutung des Satzes ist nicht trivial, wenn man die Dynamik eines allgemeinen mechanischen Systems berücksichtigt. Zum Beispiel verhält sich das Dreikörper-Probleme typischerweise chaotisch, insbesondere wenn die Körper alle ungefähr gleich schwer sind: Bei leichter Änderung der Anfangsbedingungen wird die Endsituation völlig anders aussehen. Betrachtet man einen kleinen Ball um eine bestimmte Anfangsbedingung, so ist das Gebiet, in dem die entsprechenden Endpunkte liegen, stark zerfasert. Der Satz von Liouville besagt aber, dass das Volumen trotzdem gleich bleibt.

Der Wiederkehrsatz von Poincaré. Nun können wir uns dem Wiederkehrsatz von Poincaré zuwenden. Sei ϕ_t ein *volumenerhaltender* Fluss auf dem Phasenraum und G ein Gebiet mit endlichem Volumen, welches invariant unter dem Fluss ϕ_t ist

$$\mu(G) < \infty, \qquad \phi_t(G) \subset G. \tag{8.118}$$

Wir können also im Folgenden den Phasenraum auf dieses Gebiet beschränken.

Weiterhin sei $X \subset G$ eine Untermenge von G. Wir nennen einen Punkt $z \in G$ einen *Wiederkehrpunkt* bezüglich der Zielmenge X, falls seine Bahn $\phi_t(z)$ die Zielmenge X für $t \to \infty$ immer wieder besucht, d.h. für jede Schranke t gibt es ein $t' \geq t$, so dass $\phi_{t'}(z) \in X$.

Der *Wiederkehrsatz von Poincaré* besagt nun, dass fast alle $z \in X$ Wiederkehrpunkte sind. Mit anderen Worten hat die Menge der Punkte in X, die nicht Wiederkehrpunkte sind, das Volumen Null, $\mu(X \setminus W) = 0$, wobei W die Menge der Wiederkehrpunkte ist.

Zum Beweis definieren wir $\Omega(t)$ als die Menge der Punkte, die nach Ablauf einer minimalen Zeit t die Zielmenge X zumindest einmal besuchen

$$\Omega(t) := \bigcup_{t' \geq t} \phi_{-t'}(X). \tag{8.119}$$

Ein Wiederkehrpunkt z bezüglich X ist per Definition in allen diesen $\Omega(t)$ enthalten. Zur Konstruktion von Grenzwerten definieren wir jetzt eine Folge stetig wachsender Zeiten t_k mit $t_0 = 0$ und Grenzwert $t_k \to \infty$. Damit ist die Menge der Wiederkehrpunkte also der Schnitt der $\Omega(t_k)$

$$W = \bigcap_{k=0}^{\infty} \Omega(t_k). \tag{8.120}$$

Weiterhin kann die Menge $\Omega(t)$ für wachsendes t nur schrumpfen, d.h. $\Omega(t) \supset \Omega(t')$ für $t' > t$. Für unsere Folge t_k gilt also

$$\Omega(t_0) \supset \Omega(t_1) \supset \Omega(t_2) \supset \dots. \tag{8.121}$$

Da aber jedes $\Omega(t)$ in dem Gebiet G mit endlichem Volumen liegt, hat es auch ein endliches Volumen. Nach dem Satz der Masstheorie zur dominierten Konvergenz ist dann

$$\mu(W) = \mu\left(\bigcap_{k=0}^{\infty} \Omega(t_k)\right) = \lim_{k\to\infty} \mu\big(\Omega(t_k)\big) = \lim_{t\to\infty} \mu\big(\Omega(t)\big). \tag{8.122}$$

Wegen der Gruppeneigenschaft des Flusses werden die Mengen $\Omega(t)$ aber durch den Fluss ϕ_t aufeinander abgebildet

$$\phi_{t-t'}\big(\Omega(t)\big) = \bigcup_{t'' \geq t} \phi_{t-t'-t''}(X) = \bigcup_{t'' \geq t'} \phi_{-t''}(X) = \Omega(t'). \tag{8.123}$$

Da der Fluss ϕ_t volumenerhaltend ist, hängt das Volumen von $\Omega(t)$ nicht von t ab, $\mu(\Omega(t)) = \mu(\Omega(t'))$. Daher folgt für den Grenzwert einfach

$$\mu(W) = \mu\big(\Omega(0)\big). \tag{8.124}$$

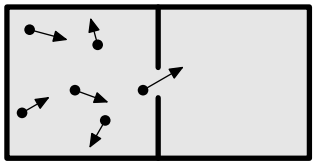
Da offensichtlich jeder Wiederkehrpunkt $z \in W$ die Zielmenge X besucht, $z \in \Omega(0)$, gilt $W \subset \Omega(0)$ und wir können folgern, dass

$$\mu\big(\Omega(0) \setminus W\big) = 0. \tag{8.125}$$

Somit sind fast alle Punkte $z \in \Omega(0)$, die die Zielmenge X jemals erreichen, auch Wiederkehrpunkte $z \in W$. Dazu gehören insbesondere auch die Punkte von $X \subset \Omega(0)$ selbst und damit folgt der Wiederkehrsatz

$$\mu(X \setminus W) = 0. \tag{8.126}$$

Ausströmen eines Gases. Als Beispiel schauen wir uns das Ausströmen eines Gases ins Vakuum an. Das Gas bestehe aus n identischen Teilchen, die untereinander und mit der Wand eines Gefässes wechselwirken. Das Gefäss sei so geformt, dass es zwei Kammern gibt, die durch ein kleines Loch verbunden sind. Wir gehen davon aus, dass sich anfangs alle Teilchen in der einen Kammer befinden und eine endliche thermische Energie aufweisen.



(8.127)

Die Hamilton-Funktion für unser Modell lautet

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} + W(\vec{x}_i) \right) + \sum_{i<k=1}^{n} V\big(\|\vec{x}_i - \vec{x}_k\|\big), \\ z &= (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n, \vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_n). \end{aligned} \tag{8.128}$$

Dabei beschreibt das Potential $V(r)$ die paarweise Wechselwirkung zwischen den Teilchen und $W(\vec{x})$ das Potential der Wand des Gefässes. Letzteres wird unendlich gross, wenn sich ein $\vec{x}_i$ der Wand nähert; dies schränkt die Bewegung auf ein endliches Volumen ein. Weiterhin seinen die Potentiale wie üblich nach unten beschränkt.

Wir wollen nun den Wiederkehrsatz auf dieses System anwenden. Für eine vorgegebene Maximalenergie E ist das Gebiet

$$G = \{z; H(z) \leq E\} \tag{8.129}$$

aufgrund der Energieerhaltung invariant unter dem Hamiltonschen Fluss ϕ_t. Ferner ist $\mu(G) < \infty$, denn für $z \in G$ ist $\|\vec{p}_i\|$ nach oben beschränkt und $\vec{x}_i$ ist auf ein endliches Volumen beschränkt. Die Teilmenge $X \subset G$ sei die Menge der Zustände

z, bei denen sich alle Teilchen in der linken Kammer befinden. Nach dem Wiederkehrsatz sind fast alle diese $z \in X$ Wiederkehrpunkte: Die Bewegung $z(t)$ führt alle Teilchen gemeinsam immer wieder in die linke Kammer zurück.

Experimentell beobachtet man diese Vorhersage nicht, wenn die Anzahl der Teilchen des Gases gross ist. In dem Fall sind die Wiederkehrzeiten extrem gross, denn sie verhalten sich exponentiell in der Anzahl n der Teilchen. Die Zeit eines physikalischen Experiments genügt bei weitem nicht, um eine einzige Wiederkehr zu beobachten. Diese Problematik und das zugrundeliegende Thema *Entropie* wird in der Vorlesung *Theorie der Wärme* wieder aufgegriffen werden. Zudem ist das System in Realität nicht abgeschlossen.

8.7 Erhaltungsgrössen

Schliesslich wollen wir noch kontinuierliche Symmetrien und ihre Erhaltungsgrössen im Hamilton-Formalismus betrachten. Wir werden sehen, dass Symmetrien durch kanonische Flüsse beschrieben werden, dass kanonische Flüsse durch Erhaltungsgrössen erzeugt werden und dass die Erhaltungsgrössen eine Algebra bilden.

Kanonische Flüsse. Im Rahmen des Lagrange-Formalismus haben wir in Abschnitt 7.2 Symmetrien durch Flüsse ϕ_λ auf dem Konfigurationsraum beschrieben. Hier wollen wir das Konzept der Flüsse auf den Phasenraum erweitern, uns dabei aber auf kanonische Transformationen beschränken, damit die Strukturen des Phasenraums erhalten bleiben. Ein *kanonischer Fluss* $\phi_\lambda(z)$ beschreibt für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ eine kanonische Transformation, und hat in λ die Eigenschaften einer Abelschen Gruppe. Zur Transformation von Funktionen $F(z, \ldots)$ mit diesem Fluss legen wir wie zuvor die *aktive* Perspektive zugrunde, indem wir fordern

$$F_\lambda\big(\phi_\lambda(z), \ldots\big) = F(z, \ldots). \tag{8.130}$$

Wir wollen nun zeigen, dass ein kanonischer Fluss $\phi_\lambda(z)$ immer durch eine Funktion $F(z)$ erzeugt wird.

Dazu betrachten wir das erzeugende Vektorfeld

$$\frac{\partial \phi_\lambda}{\partial \lambda}(z) = v\big(\phi_\lambda(z)\big), \qquad v(z) = \left.\frac{\partial \phi_\lambda}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0}. \tag{8.131}$$

Da der Fluss per Annahme kanonisch ist, erhält er die symplektische Form

$$\omega(z) = \sum_{\mu,\nu=1}^{2N} \tfrac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\, \mathrm{d}z^\mu \wedge \mathrm{d}z^\nu. \tag{8.132}$$

Die transformierte symplektische Form ω_λ ist über die Relation $\omega_\lambda(\phi_\lambda(z)) = \omega(z)$ definiert und lautet somit

$$\omega_\lambda(z) = \omega\big(\phi_{-\lambda}(z)\big) = \sum_{\mu,\nu=1}^{2N} \tfrac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\, \mathrm{d}\phi^\mu_{-\lambda}(z) \wedge \mathrm{d}\phi^\nu_{-\lambda}(z). \tag{8.133}$$

Für eine kanonische Transformation gilt $\omega_\lambda = \omega$ und daher muss die Variation verschwinden

$$0 \stackrel{!}{=} \left.\frac{\partial \omega_\lambda}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0} = -\sum_{\mu,\nu=1}^{2N} \varepsilon_{\mu\nu}\, \mathrm{d}v^\mu(z) \wedge \mathrm{d}z^\nu. \tag{8.134}$$

Die 2-Form auf der rechten Seite ist offensichtlich exakt, und wir können sie schreiben als die äussere Differentiation einer 1-Form ψ

$$\left.\frac{\partial \omega_\lambda}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0} = \mathrm{d}\psi, \qquad \psi := -\sum_{\mu,\nu=1}^{2N} \varepsilon_{\mu\nu}\, v^\mu\, \mathrm{d}z^\nu. \tag{8.135}$$

Nun besagt die Invarianz von ω_λ, dass ψ geschlossen ist. Nach dem Lemma von Poincaré lässt sich ψ (falls der Phasenraum keine Löcher aufweist, bzw. auf einem kontrahierbaren Gebiet des Phasenraums) als Gradient einer Funktion F schreiben, $\psi = \mathrm{d}F$, bzw. in Komponenten

$$-\sum_{\mu,\nu=1}^{2N} \varepsilon_{\mu\nu}\, v^\mu\, \mathrm{d}z^\nu = \sum_{\nu=1}^{2N} \frac{\partial F}{\partial z^\nu}\, \mathrm{d}z^\nu. \tag{8.136}$$

Durch Koeffizientenvergleich können wir die Komponenten von v^μ ablesen und es gilt

$$\sum_{\mu=1}^{2N} v^\mu\, \frac{\partial}{\partial z^\mu} = \sum_{\mu,\nu=1}^{2N} \tilde{\varepsilon}^{\nu\mu}\, \frac{\partial F}{\partial z^\nu}\, \frac{\partial}{\partial z^\mu} = \mathcal{D}[F]. \tag{8.137}$$

Wir sehen also, dass ein kanonischer Fluss von dem Vektorfeld $\mathcal{D}[F]$ einer Funktion $F(z)$ erzeugt wird, welche demnach *erzeugende Funktion* des Flusses ϕ_λ genannt wird.

Umgekehrt müssen wir zeigen, dass ein Fluss ϕ_λ, welcher von dem Vektorfeld $\mathcal{D}[F]$ einer Funktion F erzeugt wird, für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ kanonisch ist. Dafür leiten wir die transformierte symplektische Form ω_λ nach λ ab und finden durch einsetzen der obigen Relationen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \lambda}\, \omega_\lambda(z) &= \sum_{\mu,\nu=1}^{2N} \varepsilon_{\mu\nu}\, \mathrm{d}\phi^\mu_{-\lambda} \wedge \mathrm{d}\left[\frac{\partial}{\partial \lambda}\, \phi^\nu_{-\lambda}\right] \\
&= -\sum_{\mu,\nu=1}^{2N} \varepsilon_{\mu\nu}\, \mathrm{d}\phi^\mu_{-\lambda} \wedge \mathrm{d}\big[v^\nu\big(\phi_{-\lambda}(z)\big)\big] \\
&= -\sum_{\mu,\nu,\rho=1}^{2N} \varepsilon_{\mu\nu}\, \frac{\partial v^\nu}{\partial z^\rho}\, \mathrm{d}\phi^\mu_{-\lambda} \wedge \mathrm{d}\phi^\rho_{-\lambda} \\
&= -\sum_{\mu,\rho=1}^{2N} \frac{\partial^2 F}{\partial z^\mu\, \partial z^\rho}\, \mathrm{d}\phi^\mu_{-\lambda} \wedge \mathrm{d}\phi^\rho_{-\lambda} = 0.
\end{aligned} \tag{8.138}$$

Die 2-Form verschwindet, da die zweiten partiellen Ableitungen einer Funktion symmetrisch sind, während das äussere Produkt antisymmetrisch ist. Somit ist ω_λ unabhängig von λ und damit ist der Fluss kanonisch.

Diese Resultate haben auch die folgende interessante Interpretation: Die Differentialgleichung

$$\frac{\partial \phi_\lambda}{\partial \lambda}(z) = -\tilde{\varepsilon}\,\frac{\partial F}{\partial z}\big(\phi_\lambda(z)\big), \tag{8.139}$$

die den Fluss ϕ_λ anhand der Funktion F definiert, hat die gleiche Form wie die Bewegungsgleichung (8.107), wobei λ den Platz der Zeit t einnimmt und F die negative Hamilton-Funktion $-H$ ersetzt.

Algebra. Wie wir in Abschnitt 8.3 gesehen hatten, ist die zeitliche Änderung einer Grösse $F(z,t)$ längs einer Bahn $z(t)$, die die Bewegungsgleichungen erfüllt, gegeben durch

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,F\big(z(t),t\big) = \{F,H\} + \frac{\partial F}{\partial t}\,. \tag{8.140}$$

Falls die rechte Seite verschwindet, ist F eine *Erhaltungsgrösse*. Eine Funktion $F(z)$ ohne explizite Zeitabhängigkeit ist also genau dann erhalten, wenn die Poisson-Klammer von F mit H verschwindet

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,F\big(z(t)\big) = \{F,H\}. \tag{8.141}$$

Insbesondere ist daher die Hamilton-Funktion H erhalten, falls sie nicht explizit von der Zeit t abhängt.[17]

Seien nun F und G zwei Erhaltungsgrössen. Dann folgt aus der Jacobi-Identität der Poisson-Klammer und der Produktregel der Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\{F,G\} = \left\{\{F,H\} + \frac{\partial F}{\partial t}, G\right\} + \left\{F, \{G,H\} + \frac{\partial G}{\partial t}\right\}. \tag{8.142}$$

Somit ist auch $\{F,G\}$ erhalten. Dies ist der *Poissonsche Satz*. Die Erhaltungsgrössen bilden also eine Unteralgebra der Poisson-Algebra.

Beispiel. Wir betrachten den Phasenraum eines Teilchens, in dem $\vec{p}$ der konjugierte Impuls zum Ort $\vec{x}$ ist. Der Drehimpuls $\vec{L}$ ist durch $\vec{L} = \vec{x}\times\vec{p}$ definiert. Sind zwei Komponenten des Drehimpulses $\vec{e}_1\cdot\vec{L}$ und $\vec{e}_2\cdot\vec{L}$ erhalten, so gilt das auch für die dritte Komponente, da

$$\{\vec{e}_1\cdot\vec{L}, \vec{e}_2\cdot\vec{L}\} = -(\vec{e}_1\times\vec{e}_2)\cdot\vec{L} = -\vec{e}_3\cdot\vec{L}. \tag{8.143}$$

Entsprechend gilt

$$\{\vec{e}_1\cdot\vec{L}, \vec{e}_2\cdot\vec{p}\} = -(\vec{e}_1\times\vec{e}_2)\cdot\vec{p} = -\vec{e}_3\cdot\vec{p}. \tag{8.144}$$

Ist eine Impulskomponente sowie der Drehimpuls erhalten, so sind in der Tat alle Impulskomponenten erhalten.

[17] Zu dieser Einsicht sind wir effektiv bereits in Abschnitt 7.3 gelangt, in dem Gesamtenergie E die Form einer Legendre-Transformierten H der Lagrange-Funktion L angenommen hatte.

Symmetrie. Wir wollen nun den kanonischen Fluss $\phi_\lambda(z)$ betrachten, der von einer Erhaltungsgrösse $F(z)$ erzeugt wird. Weiterhin sei die Hamilton-Funktion $H(z)$ unabhängig von der Zeit t.

Die Differentialgleichung (8.139) des Flusses ϕ_λ

$$\frac{\partial \phi_\lambda}{\partial \lambda}(z) = -\tilde{\varepsilon}\,\frac{\partial F}{\partial z}\big(\phi_\lambda(z)\big) \tag{8.145}$$

impliziert dann folgende Eigenschaft der Hamilton-Funktion

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \lambda} H\big(\phi_\lambda(z)\big) &= -\frac{\partial H}{\partial z}\big(\phi_\lambda(z)\big)\tilde{\varepsilon}\,\frac{\partial F}{\partial z}\big(\phi_\lambda(z)\big) \\ &= -\{H,F\}\big(\phi_\lambda(z)\big),\end{aligned} \tag{8.146}$$

Die rechte Seite ist genau dann Null, wenn F eine Erhaltungsgrösse ist. Eine Funktion $F(z)$ ist also genau dann eine Erhaltungsgrösse, wenn $H(z)$ unter dem von F erzeugten kanonischen Fluss ϕ_λ invariant ist:

$$H\big(\phi_\lambda(z)\big) = H(z). \tag{8.147}$$

Zu jeder Erhaltungsgrösse gehört daher eine kontinuierliche Symmetrie ϕ_λ von H, und umgekehrt. Dies ist die Aussage des Noetherschen Theorems, welches wir in Kapitel 7 besprochen haben. Die Symmetrie im Phasenraum entspricht dabei der Symmetrie einer Bahn, welche wir im Rahmen der Verallgemeinerungen des Noetherschen Theorems besprochen haben.

Beispiel. Wir betrachten wieder den Phasenraum eines Teilchens mit Ort $\vec{x}$ und konjugierten Impuls $\vec{p}$. Sei F die Funktion

$$F(\vec{x},\vec{p}) = \vec{e}\cdot\vec{L} = \vec{e}\cdot(\vec{x}\times\vec{p}), \tag{8.148}$$

wobei $\vec{e}$ ein fester Einheitsvektor ist. Die Differentialgleichungen (8.145) des durch F erzeugten kanonischen Flusses sind

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{x}_\varphi}{\partial \varphi} &= \frac{\partial F}{\partial \vec{p}}(\vec{x}_\varphi,\vec{p}_\varphi) = \vec{e}\times\vec{x}_\varphi, \\ \frac{\partial \vec{p}_\varphi}{\partial \varphi} &= -\frac{\partial F}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_\varphi,\vec{p}_\varphi) = \vec{e}\times\vec{p}_\varphi.\end{aligned} \tag{8.149}$$

D.h. der Fluss ist eine Rotation des Ortsvektors und des Impulsvektors

$$\phi_\varphi : (\vec{x},\vec{p}) \mapsto (\vec{x}_\varphi,\vec{p}_\varphi) = \big(R(\varphi\vec{e})\vec{x}, R(\varphi\vec{e})\vec{p}\big), \tag{8.150}$$

wobei $R(\varphi\vec{e})$ die Drehung im $\mathbb{R}^3$ um die Achse $\vec{e}$ mit Winkel φ beschreibt. Die Komponenten (8.148) des Drehimpulses sind also die erzeugenden Funktionen der Drehungen! Analog ist die Impulskomponente $F = \vec{e}\cdot\vec{p}$ die Erzeugende der Translationen $\phi_\lambda : (\vec{x},\vec{p}) \mapsto (\vec{x}+\lambda\vec{e},\vec{p})$.

Kraftgesetz. Für den Fall einer Funktion F, die nicht erhalten ist, können wir dennoch eine Aussage zu ihrer Änderungsrate aufstellen. Die Kombination der Identitäten (8.141) zur Zeitableitung von F und (8.146) zur Transformation von H lautet

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F = \{F, H\} = \frac{\partial}{\partial \lambda} H\big(\phi_\lambda(z)\big)\Big|_{\lambda=0} . \tag{8.151}$$

Diese Relation hat die Form eines verallgemeinerten Kraftgesetzes, wobei die Kombination auf der rechten Seite die Rolle einer Kraft einnimmt, die auf die Grösse F wirkt.

Im obigen Beispiel zum Drehimpuls ergibt sich für das Kraftgesetz die allgemeine Form des Drehimpulssatzes

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \vec{e}\cdot(\vec{x}\times\vec{p}) = \frac{\partial}{\partial \varphi} H\big(R(\varphi\vec{e})\vec{x}, R(\varphi\vec{e})\vec{p}\big)\Big|_{\varphi=0} . \tag{8.152}$$

Hier beschreibt die rechte Seite das Drehmoment $\vec{e}\cdot\vec{M}$ bei Rotation um die Achse $\vec{e}$. Insbesondere ist also $F = \vec{e}\cdot(\vec{x}\times\vec{p})$ genau dann erhalten, wenn H unter den Rotationen um die Achse $\vec{e}$ invariant ist.

9 Hamilton-Jacobi-Gleichung

In diesem Kapitel besprechen wir eine abstrakte Methode, ein mechanisches System durch eine geeignete kanonische Transformation so zu vereinfachen, dass alle Lösungen in den neuen Koordinaten eine triviale Form haben. Die Transformation wird dabei durch eine Funktion erzeugt, die eine bestimmte Differentialgleichung erfüllt, die Hamilton-Jacobi-Gleichung. Da die Transformation die Dynamik per Konstruktion trivialisiert, ist sie für reguläre mechanische Systeme mit chaotischem Verhalten eine beliebig komplizierte Funktion der Koordinaten. Insofern ist die Hamilton-Jacobi-Gleichung letztlich auf *integrable Systeme* zugeschnitten, in denen die resultierende Transformation eine einigermassen zugängliche Form haben kann.

9.1 Erzeugung kanonischer Transformationen

In Abschnitt 8.5 haben wir kanonische Transformationen als Transformationen des Phasenraums kennengelernt, die dessen symplektische Struktur erhalten. In Abschnitt 8.7 haben wir gesehen, wie kanonische Flüsse durch eine skalare Funktion erzeugt werden können. Im Folgenden werden wir zeigen, dass auch diskrete kanonische Transformationen durch Funktionen generiert werden können. Dies eröffnet die Möglichkeit, systematisch nach kanonischen Transformationen zu suchen, die geeignet sind, ein mechanisches System zu trivialisieren.

Erzeugung kanonischer Transformationen. Wir betrachten eine kanonische Transformation zwischen den Phasenkoordinaten $(q^1,\dots,q^N,p_1,\dots,p_N)$ und $(\bar q^1,\dots,\bar q^N,\bar p_1,\dots,\bar p_N)$

$$\begin{aligned} q &= q(\bar q,\bar p), \qquad & \bar q &= \bar q(q,p),\\ p &= p(\bar q,\bar p), \qquad & \bar p &= \bar p(q,p). \end{aligned} \tag{9.1}$$

Wir wollen diese Transformation durch eine erzeugende Funktion beschreiben. Dies ist erstaunlich einfach, wenn man die symplektische Form betrachtet. Wie wir weiter oben in Abschnitt 8.5 gesehen haben, erhält eine kanonische Transformation ihre Struktur

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \mathrm{d}q^\alpha \wedge \mathrm{d}p_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} \mathrm{d}\bar q^\alpha \wedge \mathrm{d}\bar p_\alpha \,. \tag{9.2}$$

Hierbei bilden sowohl $(\mathrm{d}q\,,\mathrm{d}p)$ als auch $(\mathrm{d}\bar q\,,\mathrm{d}\bar p)$ eine Basis der Differentialformen und die kanonische Transformation stellt eine Basistransformation dar, die die Form des Ausdrucks nicht ändert.[1]

[1] Die Differentialformen sind sehr nützlich, denn wir brauchen die benötigte Basistransformation nicht explizit auszuschreiben.

Die beiden symplektischen Formen sind jeweils exakt, und wir können die Gleichung integrieren zu

$$\sum_{\alpha=1}^{N} p_\alpha \,\mathrm{d}q^\alpha - \sum_{\alpha=1}^{N} \bar{p}_\alpha \,\mathrm{d}\bar{q}^\alpha = \mathrm{d}F_1, \tag{9.3}$$

wobei F_1 eine Funktion von (q,p) oder äquivalent von $(\bar{q},\bar{p})$ ist. Wir wollen $F_1 = F_1(q,\bar{q})$ aber als eine Funktion von q und von $\bar{q}$ auffassen, denn $\bar{q}$ ist eine Funktion von q und p (oder umgekehrt q eine Funktion von $\bar{q}$ und $\bar{p}$). Dann gilt nach Definition des totalen Differentials

$$\mathrm{d}F_1 = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial F_1}{\partial q^\alpha} \,\mathrm{d}q^\alpha + \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}^\alpha} \,\mathrm{d}\bar{q}^\alpha \,. \tag{9.4}$$

Da auch $(\mathrm{d}q\,, \mathrm{d}\bar{q})$ eine Basis der Differentialformen bildet, können wir durch Koeffizientenvergleich die partiellen Ableitungen von F_1 bestimmen

$$\frac{\partial F_1}{\partial q^\alpha} = p_\alpha, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}^\alpha} = -\bar{p}_\alpha. \tag{9.5}$$

Für eine vorgegebene Funktion $F_1(q,\bar{q})$ legen diese Gleichungen p und $\bar{p}$ als Funktionen von q und $\bar{q}$ fest. Es folgt dann durch Umkehrung der Argumentation, dass die symplektische Form erhalten bleibt und somit die Transformation kanonisch ist. Die Funktion $F_1(q,\bar{q})$ kann also als *erzeugende Funktion* einer kanonischen Transformation angesehen werden. Das Ungewöhnliche der erzeugenden Funktion ist, dass sie die Transformation nicht explizit als Abbildung $(q,p) \mapsto (\bar{q},\bar{p})$ beschreibt, sondern implizit als $(q,\bar{q}) \mapsto (p,\bar{p})$ anhand der jeweils der Hälfte der Ursprungs- und der Zielkoordinaten.

Alternative Formen. Erzeugende Funktionen gibt es in verschiedenen Ausführungen. Die gebräuchlichste Form ist wohl $F_2(q,\bar{p})$, welche von den Ursprungskoordinaten q und Zielkoordinaten $\bar{p}$ abhängt. Um diese Form abzuleiten, integrieren wir die Invarianzbedingung (9.2) der symplektischen Form auf andere Art als

$$\sum_{\alpha=1}^{N} p_\alpha \,\mathrm{d}q^\alpha + \sum_{\alpha=1}^{N} \bar{q}^\alpha \,\mathrm{d}\bar{p}_\alpha = \mathrm{d}F_2. \tag{9.6}$$

Der Vergleich mit der allgemeinen Form von $\mathrm{d}F_2$ liefert wieder die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F_2}{\partial q^\alpha} = p_\alpha, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial \bar{p}_\alpha} = \bar{q}_\alpha. \tag{9.7}$$

Mit anderen Worten erzeugt F_2 eine Transformation $(q,\bar{p}) \mapsto (p,\bar{q})$, welche implizit auch als kanonische Transformation $(q,p) \mapsto (\bar{q},\bar{p})$ betrachtet werden kann.

Im Allgemeinen sind die beiden erzeugenden Transformationen äquivalent. Durch Vergleich der definierenden Relationen von F_1 und F_2 finden wird

$$\mathrm{d}F_2 = \mathrm{d}F_1 + \sum_{\alpha=1}^{N} \bar{q}^\alpha \,\mathrm{d}\bar{p}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{N} \bar{p}_\alpha \,\mathrm{d}\bar{q}^\alpha = \mathrm{d}F_1 + \sum_{\alpha=1}^{N} \mathrm{d}\big(\bar{q}^\alpha \bar{p}_\alpha\big), \tag{9.8}$$

was nach Integration (bis auf eine Integrationskonstante) bedeutet

$$F_2 = F_1 + \sum_{\alpha=1}^{N} \bar{q}^\alpha \bar{p}_\alpha. \tag{9.9}$$

Mit anderen Worten stehen F_2 und $-F_1$ durch eine Legendre-Transformation miteinander in Beziehung. Weitere äquivalente Formen F_3 und F_4 hängen von den verbleibenden Paaren der Phasenkoordinaten ab. In der Regel lässt sich jede kanonische Transformation mit allen Funktionen F_i erzeugen, allerdings gibt es bestimmte Transformationen, für die einige der erzeugenden Funktionen F_i singulär sind. So lautet z.B. die Bedingung für die Auflösbarkeit von F_2

$$\det\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial q^\alpha \, \partial \bar{p}_\beta}\right) \neq 0. \tag{9.10}$$

Beispiele. Gegeben sei eine beliebige invertierbare Transformation $\bar{q}^\alpha(q)$ der Lagekoordinaten. Wir wollen diese nun so ergänzen, dass die Gesamttransformation kanonisch ist. Dazu definieren wir die erzeugende Transformation

$$F_2(q, \bar{p}) := \sum_{\beta=1}^{N} \bar{p}_\beta \, \bar{q}^\beta(q). \tag{9.11}$$

Dann lauten die partiellen Ableitungen der Funktion F_2

$$\bar{q}^\alpha = \bar{q}^\alpha(q), \qquad p_\alpha = \sum_{\beta=1}^{N} \bar{p}_\beta \, \frac{\partial \bar{q}^\beta}{\partial q^\alpha} \, . \tag{9.12}$$

Nach Auflösen der ersten Gleichung, $q^\alpha = q^\alpha(\bar{q})$, sind dies die in Abschnitt 8.5 besprochenen Transformationen der Lagekoordinaten. Die Auflösbarkeitsbedingung (9.10) lautet

$$\det\left(\frac{\partial \bar{q}^\alpha}{\partial q^\beta}\right) \neq 0. \tag{9.13}$$

In einem zweiten Beispiel ohne physikalische Motivation betrachten wir eine Transformation, welche Orts- und Impulskoordinaten mischt. Im Fall $N = 1$ betrachten wir die erzeugende Funktion $F_2(q, \bar{p}) = \frac{1}{2} q^2 \bar{p}^2$. Aus

$$\bar{q} = q^2 \bar{p}, \qquad p = q \bar{p}^2, \tag{9.14}$$

ergibt sich dann die kanonische Transformation

$$q = \sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{p}}}\,, \qquad p = \sqrt{\bar{q}\bar{p}^3}\,. \tag{9.15}$$

Kanonische Flüsse. Die erzeugende Funktion $F(q,p)$ eines kanonischen Flusses ϕ_λ hängt mit der erzeugenden Funktion $F_{2,\lambda}(q,\bar{p})$ der kanonischen Transformationen ϕ_λ für festes λ zusammen. Es gilt nämlich

$$\mathrm{d}F_{2,\lambda} = \sum_{\alpha=1}^{N} p_\alpha \,\mathrm{d}q^\alpha + \sum_{\alpha=1}^{N} \bar{q}^\alpha \,\mathrm{d}\bar{p}_\alpha - F\,\mathrm{d}\lambda\,. \tag{9.16}$$

Die Ableitung $F = -\partial F_{2,\lambda}/\partial\lambda|_{\lambda=0}$ erzeugt also den kanonischen Fluss ϕ_λ. Um diese Aussage zu beweisen, betrachten wir die äussere Differentiation der vorigen Beziehung

$$0 = \mathrm{d}^2 F_{2,\lambda} = -\sum_{\alpha=1}^{N} \mathrm{d}q^\alpha \wedge \mathrm{d}p_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{N} \mathrm{d}\bar{q}^\alpha \wedge \mathrm{d}\bar{p}_\alpha - \mathrm{d}F \wedge \mathrm{d}\lambda\,. \tag{9.17}$$

Diese Beziehung erinnert an die Invarianz der symplektischen Formen, $\omega = \bar{\omega}$. Da wir hier im um $\mathrm{d}\lambda$ erweiterten Raum der Differentiale arbeiten, und da die transformierten Koordinaten $(\bar{q},\bar{p})$ nun nicht nur von (q,p) abhängen, sondern auch von λ, müssen wir die kanonische Beziehung zwischen den symplektischen Formen etwas anpassen. Sie lautet

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \mathrm{d}q^\alpha \wedge \mathrm{d}p_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} \left[\mathrm{d}\bar{q}^\alpha - \frac{\partial \bar{q}^\alpha}{\partial\lambda}\,\mathrm{d}\lambda\right] \wedge \left[\mathrm{d}\bar{p}_\alpha - \frac{\partial \bar{p}_\alpha}{\partial\lambda}\,\mathrm{d}\lambda\right], \tag{9.18}$$

wobei die zusätzlichen Terme auf der rechten Seite die λ-Abhängigkeit explizit aus der Relation entfernen. Setzen wir dies in die obige Relation ein, so erhalten wir

$$\mathrm{d}F \wedge \mathrm{d}\lambda = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \bar{p}_\alpha}{\partial\lambda}\,\mathrm{d}\bar{q}^\alpha \wedge \mathrm{d}\lambda + \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \bar{q}^\alpha}{\partial\lambda}\,\mathrm{d}\lambda \wedge \mathrm{d}\bar{p}_\alpha\,. \tag{9.19}$$

Durch Koeffizientenvergleich mit der Definition des totalen Differentials von $\mathrm{d}F$

$$\mathrm{d}F \wedge \mathrm{d}\lambda = \sum_{\alpha=1}^{N} \left[\frac{\partial F}{\partial \bar{q}^\alpha}\,\mathrm{d}\bar{q}^\alpha + \frac{\partial F}{\partial \bar{p}_\alpha}\,\mathrm{d}\bar{p}_\alpha\right] \wedge \mathrm{d}\lambda \tag{9.20}$$

ergeben sich die in Abschnitt 8.7 hergeleiteten Differentialgleichungen, die den kanonischen Fluss ϕ_λ erzeugen,

$$\frac{\partial \bar{q}^\alpha}{\partial\lambda} = -\frac{\partial F}{\partial \bar{p}_\alpha}\,, \qquad \frac{\partial \bar{p}_\alpha}{\partial\lambda} = \frac{\partial F}{\partial \bar{q}^\alpha}\,. \tag{9.21}$$

Diese Argumentation können wir ebenso umkehren, und dann folgt aus der eindeutigen Lösung der ersten Differentialgleichung, dass die erzeugende Funktion F eines kanonischen Flusses ϕ_λ auch die erzeugende Funktion $F_{2,\lambda}$ der kanonischen Transformation ϕ_λ mit festem Parameter λ festlegt.

9.2 Zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung

Wir betrachten nun ein autonomes System, d.h. ein System bei dem die Hamilton-Funktion nicht explizit von t abhängt, $H = H(q, p)$. Wir wollen eine zeitunabhängige kanonische Transformation finden, so dass H gerade eine der neuen Impulskoordinaten ist, z.B.

$$H \stackrel{!}{=} \bar{p}_N. \tag{9.22}$$

Wenn dies gelingt, so lauten die Bewegungsgleichungen in den neuen Koordinaten

$$\dot{\bar{p}}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial \bar{q}^\alpha} = 0, \qquad \dot{\bar{q}}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial \bar{p}_\alpha} = \delta^\alpha_N. \tag{9.23}$$

Diese Gleichungen haben die triviale Lösung

$$\begin{aligned} \bar{p}_\alpha(t) &= \bar{p}_\alpha(0), \\ \bar{q}^\alpha(t) &= \bar{q}^\alpha(0) + \delta^\alpha_N t. \end{aligned} \tag{9.24}$$

Die einzige dynamische Koordinate ist somit $\bar{q}^N(t)$, welche bis auf eine konstante Verschiebung der Zeit t entspricht. Dementsprechend stellt der konjugierte Impuls $\bar{p}_N = E$ die Gesamtenergie E des autonomen Systems dar.

Wir betrachten nun die erzeugende Funktion $S(q) := F_2(q, \bar{p})$ der gewünschten kanonischen Transformation. Die ursprünglichen Impulse sind dann gegeben durch $p_\alpha = \partial S/\partial q^\alpha$. Setzen wir diese in die gewünschte Relation $H = \bar{p}_N$ ein, so erhalten wir die Gleichung

$$H\left(q^1, \ldots, q^N, \frac{\partial S}{\partial q^1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q^N}\right) = \bar{p}_N. \tag{9.25}$$

Diese Gleichung wird die *zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung* genannt. Sie ist eine (durch $\bar{p}_N$ parametrisierte) partielle Differentialgleichung erster Ordnung für die Funktion S.

Die Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung ist also nicht eine Bahn, sondern die erzeugende Funktion $F_2 = S$ einer Koordinatentransformation, so dass die Lösung in den neuen Koordinaten trivial ist. Allerdings bestimmt die Hamilton-Jacobi-Gleichung die Funktion $S(q)$ noch nicht eindeutig. Man kann argumentieren, dass die allgemeine Lösung eine Schar $F_2(q, \bar{p})$ von Funktionen $S(q)$ ist, die neben $\bar{p}_N$ auch von $N - 1$ weiteren Parametern abhängt. Letztere sind die neuen Impulse $\bar{p}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, N - 1$,[2] und die *vollständige Lösung* ist die Funktion $F_2(q, \bar{p})$ mit der Auflösbarkeitsbedingung

$$\det\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial q^\alpha \, \partial \bar{p}_\beta}\right) \neq 0. \tag{9.26}$$

Damit können wir aus F_2 schliesslich die Koordinaten $\bar{q}^\alpha = \partial F_2/\partial \bar{p}_\alpha$ bestimmen und die kanonische Transformation $(q, p) \mapsto (\bar{q}, \bar{p})$ vervollständigen.

[2] Die genaue Definition der Impulse $\bar{p}_\alpha$ ist nicht durch die Hamilton-Jacobi-Gleichung festgelegt, es muss lediglich jeder der Impulse $\bar{p}_\alpha$ die Lösung $S(q)$ unabhängig voneinander beeinflussen.

Aus der vollständigen Lösung $F_2(q, \bar{p})$ der Hamilton-Jacobi-Gleichung ergibt sich die Bewegung in den ursprünglichen Koordinaten wie folgt: Zu gegebenen Werten der Erhaltungsgrössen $\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_N$ und gegebenen Anfangswerten $\bar{q}^1, \ldots, \bar{q}^N$ bestimmt jede der Gleichungen

$$\frac{\partial F_2}{\partial \bar{p}_\beta}(q, \bar{p}) = \bar{q}^\beta \tag{9.27}$$

mit $\beta = 1, \ldots, N-1$ eine Fläche im Konfigurationsraum. Ihr Schnitt ist die eindimensionale Trajektorie. Das zeitliche Durchlaufen dieser Trajektorie ist bestimmt durch

$$\frac{\partial F_2}{\partial \bar{p}_N}(q, \bar{p}) = \bar{q}^N(0) + t. \tag{9.28}$$

Die $2N$ Konstanten $\bar{q}^\alpha(0)$ und $\bar{p}_\alpha(0)$ ergeben sich aus den Anfangsbedingungen.

9.3 Separable Probleme

Offensichtlich ist die Hamilton-Jacobi-Gleichung für die meisten mechanischen Systeme in der Praxis nicht lösbar. Es gibt aber einige Methoden, diese Differentialgleichung zu vereinfachen, wenn sie eine bestimmte Form aufweist. Eine der bekanntesten Methoden ist die Separation der Variablen, die wir im Folgenden erklären und erläutern wollen.

Separation der Variablen. Falls man die Hamilton-Jacobi-Gleichung (9.25) durch eine geeignete Umformung aufspalten kann als

$$\tilde{G}\left(q^1, \ldots, q^{N-1}, \frac{\partial S}{\partial q^1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q^{N-1}}\right) = G_N\left(q^N, \frac{\partial S}{\partial q^N}\right), \tag{9.29}$$

so heisst die Variable q^N *separierbar*.[3] Der *Separationsansatz*

$$S(q^1, \ldots, q^N) = \tilde{S}(q^1, \ldots, q^{N-1}) + S_N(q^N) \tag{9.30}$$

führt dann auf die beiden Gleichungen

$$\tilde{G}\left(q^1, \ldots, q^{N-1}, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q^1}, \ldots, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q^{N-1}}\right) = \bar{p}_{N-1} = G_N\left(q^N, \frac{\partial S_N}{\partial q^N}\right), \tag{9.31}$$

wobei $\bar{p}_{N-1}$ konstant ist, da die rechte bzw. linke Seite der Gleichung nicht von $q^1, \ldots, q^{N-1}$ bzw. von q^N abhängt. Durch Lösen der zweiten Gleichung findet man die Funktion $S_N(q^N)$, welche von $\bar{p}_{N-1}$ und $\bar{p}_N$ abhängt.[4] Das System ist *vollständig separabel*, falls man iterativ mit den resultierenden Gleichungen für $\tilde{S}$

[3] Etwas allgemeiner kann man ebenso die Hamilton-Jacobi-Gleichung in zwei Untermengen der konjugierten Koordinatenpaare aufspalten.

[4] Man beachte, dass die ursprüngliche Hamilton-Jacobi-Gleichung (9.25) von $\bar{p}_N$ abhängt, und somit auch $\tilde{G}$ und G_N.

in gleicher Weise verfahren kann. In diesem Fall ist das Resultat eine vollständige Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung (9.25)

$$F_2(q,\bar{p}) = \sum_{\alpha=1}^{N} S_\alpha(q^\alpha), \tag{9.32}$$

wobei die Funktionen $S_\alpha(q^\alpha)$ zusätzlich von den *Separationskonstanten* $\bar{p}_{\alpha-1},\dots,\bar{p}_N$ abhängen.

Die Separierbarkeit eines Problems bezieht sich immer auf besondere Koordinaten $q=(q^1,\dots,q^N)$, deren Existenz eher die Ausnahme als die Regel ist. Dies soll nun an zwei Beispielen demonstriert werden.

Das ebene Zentralkraftproblem. Wir betrachten das ebene Zentralkraftproblem in Polarkoordinaten, siehe Abschnitt 2.1 und Abschnitt 8.2, für das die Hamilton-Funktion gegeben ist durch

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) + V(r). \tag{9.33}$$

Die Hamilton-Jacobi-Gleichung ist nun

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right] + V(r) = E, \tag{9.34}$$

wobei $E=\bar{p}_2$, bzw.

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 = 2mr^2\big(E-V(r)\big) - r^2\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2. \tag{9.35}$$

Diese Gleichung ist separabel: Mit dem Separationsansatz $S(r,\varphi)=S_r(r)+S_\varphi(\varphi)$ müssen beide Seiten gleich einer Separationskonstanten $L^2=\bar{p}_1$ sein. Es folgt daher, dass bis auf beliebige (irrelevante) additive Konstanten

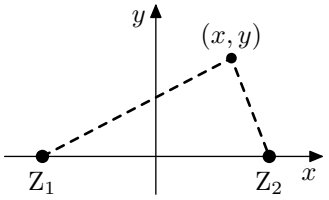
$$S_\varphi(\varphi) = L\varphi, \qquad S_r(r) = \int^r \mathrm{d}r'\,\sqrt{2m\big(E-V(r')\big) - L^2/r'^2}\,. \tag{9.36}$$

Die Bahn $\varphi(r)$ sowie die zeitliche Abhängigkeit $t(r)$ ergeben sich aus den Gleichungen (9.27,9.28) für die transformierten Koordinaten $\bar{q}^\alpha$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial L} &= \varphi - \int^r \frac{L\,\mathrm{d}r'}{r'^2\sqrt{2m\big(E-V(r')\big) - L^2/r'^2}} = \text{const},\\
\frac{\partial S}{\partial E} &= \int^r \frac{m\,\mathrm{d}r'}{\sqrt{2m\big(E-V(r')\big) - L^2/r'^2}} = \text{const}\,+t,
\end{aligned} \tag{9.37}$$

wobei die Konstanten durch die Anfangsbedingungen bestimmt sind. Dies stimmt mit den Ergebnissen aus Abschnitt 2.1 überein.

Das ebene Zweizentren-Problem. Ein Massenpunkt der Masse 2 bewegt sich in der x,y-Ebene unter dem Einfluss von zwei festen Gravitationszentren bei $\mathrm{Z}_1 = (+\,{}^1\!/_2\,, 0)$ und $\mathrm{Z}_2 = (-\,{}^1\!/_2\,, 0)$.



(9.38)

Die Hamilton-Funktion für dieses System lautet

$$H = T + V = \tfrac{1}{4}\big(p_x^2 + p_y^2\big) - \frac{\mu_1}{r_1} - \frac{\mu_2}{r_2}\,. \tag{9.39}$$

Dieses Problem wurde erstmals mit Hilfe der Hamilton-Jacobi-Gleichung gelöst. Die Separation gelingt in elliptischen Koordinaten

$$\xi = r_1 + r_2, \qquad \eta = r_1 - r_2. \tag{9.40}$$

Nach der Dreiecks-Ungleichung ist der erlaubte Koordinatenbereich $\xi \geq 1$ und $-1 \leq \eta \leq +1$. Die Koordinatenlinien sind konfokale Ellipsen ($\xi = \text{const}$) und Hyperbeln ($\eta = \text{const}$) mit den Brennpunkten Z_1 und Z_2. Für das Potential erhält man sofort

$$V = -\,\frac{\mu_1}{r_1} - \frac{\mu_2}{r_2} = -\,\frac{a\xi - b\eta}{\xi^2 - \eta^2}\,, \tag{9.41}$$

mit

$$a = 2(\mu_1 + \mu_2), \qquad b = 2(\mu_1 - \mu_2). \tag{9.42}$$

Zur Berechnung der kinetischen Energie sind die folgenden Beziehungen nützlich

$$\xi\eta = -2x, \qquad \xi^2 + \eta^2 = 4(x^2 + y^2) + 1, \qquad \xi^2 - \eta^2 = 4r_1 r_2, \tag{9.43}$$

wobei (x, y) die ursprünglichen kartesischen Koordinaten sind. Unter Benutzung von

$$\left(\frac{\partial r_1}{\partial \vec{x}}\right)^2 = \left(\frac{\partial r_2}{\partial \vec{x}}\right)^2 = 1, \qquad \frac{\partial r_1}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial \vec{x}} = \frac{4(x^2 + y^2) - 1}{4r_1 r_2} \tag{9.44}$$

folgt

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial \vec{x}}\right)^2 = 2\left(1 + \frac{\partial r_1}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial \vec{x}}\right) = 4\,\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 - \eta^2}\,, \tag{9.45}$$

sowie

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial \vec{x}}\right)^2 = 4\,\frac{1 - \eta^2}{\xi^2 - \eta^2}\,, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \vec{x}} = 0. \tag{9.46}$$

Die letzte Gleichung besagt, dass sich die Koordinatenlinien rechtwinklig schneiden. Damit die durch $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$ definierte Koordinatentransformation kanonisch ist, erhält man für die Impulse (siehe Abschnitt 8.5)

$$\vec{p} = \frac{\partial \xi}{\partial \vec{x}}\, p_\xi + \frac{\partial \eta}{\partial \vec{x}}\, p_\eta. \tag{9.47}$$

Damit wird also die Hamilton-Funktion

$$H(\xi,\eta,p_\xi,p_\eta)=\frac{1}{\xi^2-\eta^2}\left[(\xi^2-1)p_\xi^2+(1-\eta^2)p_\eta^2-a\xi+b\eta\right]. \tag{9.48}$$

Die Hamilton-Jacobi-Gleichung mit $\bar{p}_2=E$

$$H\left(\xi,\eta,\frac{\partial S}{\partial\xi},\frac{\partial S}{\partial\eta}\right)=E \tag{9.49}$$

lässt sich wie im ersten Beispiel mit dem Ansatz $S(\xi,\eta)=S_\xi(\xi)+S_\eta(\eta)$ separieren

$$(\xi^2-1)(S_\xi')^2-a\xi-E\xi^2=-(1-\eta^2)(S_\eta')^2-b\eta-E\eta^2. \tag{9.50}$$

Beide Seiten müssen gleich einer Separationskonstante $\bar{p}_1$ sein, und man erhält wieder eine (durch explizite Integrale gegebene) zweiparametrige Schar von Lösungen $F_2(\xi,\eta,\bar{p}_1,E)$ der Hamilton-Jacobi-Gleichung. Durch Ableitung nach $\bar{p}_1$ und E gewinnt man die Bahnkurven und deren Zeitabhängigkeit. Durch Umschreiben der Erhaltungsgrösse $\bar{p}_1$ auf kartesische Koordinaten findet man explizit

$$-\bar{p}_1=(xp_y-yp_x)^2+\tfrac{1}{4}p_x^2-2x\left(\frac{\mu_1}{r_1}-\frac{\mu_2}{r_2}\right). \tag{9.51}$$

Dass $\bar{p}_1$ erhalten ist, lässt sich zwar auch anhand der Hamilton-Funktion (9.39) verifizieren, wohl aber kaum erraten. Die Existenz einer zweiten Erhaltungsgrösse zeigt auch, dass dieses System integrabel ist.

9.4 Zeitabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung

Zum Abschluss wollen wir noch die Hamilton-Jacobi-Gleichung für zeitabhängige Systeme betrachten. Hier muss die kanonische Transformation auch von der Zeit t abhängen.

Erzeugung zeitabhängiger kanonischer Transformationen. Wir benötigen also nun die erzeugende Funktion einer zeitabhängigen kanonischen Transformation

$$\begin{aligned} q&=q(\bar{q},\bar{p},t), \qquad & \bar{q}&=\bar{q}(q,p,t),\\ p&=p(\bar{q},\bar{p},t), \qquad & \bar{p}&=\bar{p}(q,p,t). \end{aligned} \tag{9.52}$$

Eine solche transformiert auch die Hamilton-Funktion $H(q,p,t)$ in nichttrivialer Weise zu einer neuen Funktion $\bar{H}(\bar{q},\bar{p},t)$. Um diese Transformation herzuleiten, bietet sich das Hamiltonsche Prinzip im Phasenraum an. Die Bewegungsgleichungen der beiden Systeme stimmen überein, falls die folgenden beiden Variationsprobleme äquivalent sind

$$\begin{aligned} \delta\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t\left(\sum_{\alpha=1}^{N}p_\alpha\dot{q}^\alpha-H\right)&=0,\\ \delta\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\bar{p}_\alpha\dot{\bar{q}}^\alpha-\bar{H}\right)&=0. \end{aligned} \tag{9.53}$$

Hinreichend dafür ist, dass sich die beiden Integranden um die totale Ableitung einer Funktion $F_1(q, \bar{q}, t)$ unterscheiden, weil dann die Wirkungsfunktionale gleich sind. Da wir in der Variationsrechnung die Endpunkte δq^α bzw. $\delta \bar{q}^\alpha$ festhalten, modifiziert F_1 nicht die Euler-Lagrange-Gleichungen. Dies bedeutet, dass gelten muss

$$\sum_{\alpha=1}^{N} p_\alpha \, \mathrm{d}q^\alpha - H \, \mathrm{d}t = \sum_{\alpha=1}^{N} \bar{p}_\alpha \, \mathrm{d}\bar{q}^\alpha - \bar{H} \, \mathrm{d}t + \mathrm{d}F_1. \tag{9.54}$$

Dann gilt durch Vergleich der Koeffizienten der Differentiale

$$p_\alpha = \frac{\partial F_1}{\partial q^\alpha}(q, \bar{q}, t), \qquad \bar{p}_\alpha = -\frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}^\alpha}(q, \bar{q}, t), \tag{9.55}$$

und für die transformierte Hamilton-Funktion ergibt sich

$$\bar{H}(\bar{q}, \bar{p}, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}(q, \bar{q}, t). \tag{9.56}$$

Eine durch eine Funktion F_1 auf diese Weise erzeugte Transformation ist kanonisch, denn $\mathrm{d}F_1$ erfüllt per Konstruktion die Relation (9.54). Durch äussere Differentiation und äussere Multiplikation mit $\mathrm{d}t$ erhält man die Relation

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \mathrm{d}q^\alpha \wedge \mathrm{d}p_\alpha \wedge \mathrm{d}t = \sum_{\alpha=1}^{N} \mathrm{d}\bar{q}^\alpha \wedge \mathrm{d}\bar{p}_\alpha \wedge \mathrm{d}t \,. \tag{9.57}$$

Dies besagt, dass die Transformation zu jeder Zeit t kanonisch ist. Der explizite Faktor $\mathrm{d}t$ sorgt hier dafür, dass weitere Faktoren $\mathrm{d}t$ unterdrückt werden, und somit die symplektischen Formen zu einer festen Zeit t identisch sind.

Wie zuvor können wir mittels Legendre-Transformation die erzeugende Funktion in eine andere Form bringen

$$F_2(q, \bar{p}, t) = F_1(q, \bar{q}, t) + \sum_{\alpha=1}^{N} \bar{p}_\alpha \bar{q}^\alpha. \tag{9.58}$$

In dieser Form sind die fehlenden Koordinaten als partielle Ableitungen von F_2 gegeben

$$p_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial q^\alpha}(q, \bar{p}, t), \qquad \bar{q}^\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial \bar{p}_\alpha}(q, \bar{p}, t), \tag{9.59}$$

und die transformierte Hamilton-Funktion ist um die Zeitableitung von F_2 verschoben

$$\bar{H}(\bar{q}, \bar{p}, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}(q, \bar{p}, t). \tag{9.60}$$

Zeitabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung. Schliesslich betrachten wir ein (nichtautonomes) System dessen Hamilton-Funktion nun auch von der Zeit abhängt, $H = H(q^1, \ldots, q^N, p_1, \ldots, p_N, t)$. Wir suchen nun eine *zeitabhängige*

kanonische Transformation, so dass in den neuen Koordinaten die Hamilton-Funktion Null ist[5]

$$\bar{H}(\bar{q}^1, \ldots, \bar{q}^N, \bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_N, t) = 0. \tag{9.61}$$

Dann ist die Bahn in den neuen Koordinaten $\bar{q}^1, \ldots, \bar{q}^N, \bar{p}_1 \ldots, \bar{p}_N$ konstant: Die Bewegung soll auf die Ruhe transformiert werden! Nach der Transformation der Hamilton-Funktion (9.60) ist die entsprechende erzeugende Funktion $S(q, \bar{p}, t)$ eine Lösung der *zeitabhängigen Hamilton-Jacobi-Gleichung*

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0. \tag{9.62}$$

Die Bewegung in den ursprünglichen Koordinaten ergibt sich aus den N Gleichungen

$$\frac{\partial F_2}{\partial \bar{p}_\alpha}(q, \bar{p}, t) = \bar{q}^\alpha, \tag{9.63}$$

wobei die $2N$ Konstanten $(\bar{q}, \bar{p}) = (\bar{q}^1, \ldots, \bar{q}^N, \bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_N)$ durch die Anfangsbedingungen bestimmt sind. Die Impulskoordinaten ergeben sich auch

$$\frac{\partial F_2}{\partial q^\alpha}(q, \bar{p}, t) = p_\alpha. \tag{9.64}$$

Autonome Systeme. Falls das System autonom ist, so ist die zeitabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung (9.62) äquivalent zur zeitunabhängigen (9.25). In diesem Fall können wir den Separationsansatz für die Zeit t machen

$$S(q, t) = \tilde{S}(q) + S_t(t), \tag{9.65}$$

und erhalten

$$H\left(q, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q}\right) = -S_t' = \bar{p}_N, \tag{9.66}$$

wobei $\bar{p}_N$ die Separationskonstante ist, also $S_t(t) = -\bar{p}_N t$. Mit der vollständigen Lösung $F_2(q, \bar{p}, t)$ gilt dann

$$\frac{\partial F_2}{\partial \bar{p}_\beta} = \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial \bar{p}_\beta} - \delta_N^\beta t, \tag{9.67}$$

was gerade den Gleichungen (9.27,9.28) im zeitunabhängigen Fall entspricht.

[5]Die benötigte Transformation ist durch den Hamiltonschen Fluss ϕ_t gegeben, den wir in Abschnitt 8.6 eingeführt haben.

Teil IV

Anhang

Index

Ableitung
  partiell, 5.9, 8.10
  total, 6.8
Abstand
  Euklidisch, 1.11
  Raum, 1.12
  Zeit, 1.11
Additionsgesetz
  Geschwindigkeit, 5.14
Algebra
  Poisson, 8.8
Anderswo, 5.9
Anregung
  harmonisch, 3.11
  Stoss, 3.10
Azimut, 2.2

Bahn, 1.1
  Ebene, 2.2
  gebunden, 2.4, 2.5
  Kurve, 1.9
  Streuung, 2.4, 2.6
  Umkehrpunkt, 2.4
Beschleunigung, 1.4
Bewegungsgleichung, 1.5, 6.15
  kanonisch, 8.4, 8.7, 8.15
  linear, 3.1
Bezugssystem
  beschleunigt, 1.12, 1.19
  inertial, 1.7
  körperfest, 4.1
Blauverschiebung, 5.23
Boost
  Galilei, 1.10, 5.14, 7.8
  Lorentz, 5.5, 5.12

Chaos, 6.23, 8.20

Derivation, 8.9
Diagramm
  Minkowski, 5.16
Differential
  Koordinaten, 5.10, 6.6, 8.11
  total, 6.6, 8.13
Differentialform, 8.11
  exakt, 8.13
  geschlossen, 8.13
Differentialgleichung, 1.5
  autonom, 3.5
  homogen, 3.2
  linear, 3.1, 3.4
Differentialoperator, 5.9, 8.10
Differentiation
  äussere, 8.13
Drehimpuls
  gesamt, 1.16, 1.18, 7.3, 7.7
  Integral, 1.18
  Satz, 1.16, 4.2
Drehmoment
  resultierend, 1.16
  scheinbar, 4.2

Effekt
  Doppler, 5.23
Ellipse, 2.9
Energie
  gesamt, 1.19, 7.10
  Integral, 1.19
  kinetisch, 1.17, 4.3
  Satz, 1.16
Ereignis, 1.9
  Raum, 1.9
Erhaltungsgrösse, 1.15, 1.18, 2.13, 7.2, 8.25

Fall
  frei, 1.21
Feld
  elektromagnetisch, 1.6, 6.15, 8.13
Finsternis
  Sonne, 2.20
Fluss, 7.3
  Hamilton, 8.19

kanonisch, 8.23, 9.4
erzeugende Funktion, 8.24, 9.4
Vektorfeld, 7.4
Form
symplektisch, 8.15, 8.16
Formel
Duhamel, 3.4
Freiheitsgrad, 1.1, 6.20
Funktion
elliptisch, 4.5, 4.12
Hamilton, 8.3
Lagrange, 6.14
äquivalent, 6.16
Funktional, 6.6

Gegenwart, 5.9
Geodäte, 6.9, 6.27
Gleichung, 6.27
Raumzeit, 6.23
Geometrie
symplektisch, 8.9
Geschwindigkeit, 1.4
Vierer-, 5.16
Gesetz
Bewegung, 1.5
Brechung, 6.2
Kepler 1, 2.10
Kepler 2, 2.2
Kepler 3, 2.10
Lichtausbreitung, 5.1
Newton 1, 1.7
Newton 2, 1.5
Newton 3, 1.6
Snellius, 6.2
Trägheit, 1.7
Gleichgewichtslage, 2.16
Gleichung
Euler, 4.4
Euler-Lagrange, 6.8, 6.14
Hamilton, 8.4, 8.15
Hamilton-Jacobi
zeitabhängig, 9.11
zeitunabhängig, 9.5
Kepler, 2.12
Gleichzeitigkeit, 5.9, 5.21
Gruppe
Galilei, 1.10
Lorentz, 5.4
eigentlich, 5.12
orthochron, 5.12
orthogonal, 1.10, 4.9
Poincaré, 5.5
symplektisch, 8.17

Hyperbel, 2.9

Identität
Jacobi, 8.8
Impuls, 1.4
gesamt, 1.16, 1.18, 7.2
Integral, 1.18
konjugiert, 7.2, 8.2
Satz, 1.16
Vierer-, 5.16
Inertialsystem, 1.7, 5.3
Transformation, 1.10
Integral
Bewegungs-, 1.18
elliptisch, 4.5, 4.12

Kausalität, 5.8
Kegelschnitt, 2.9
Exzentrizität, 2.9
Klammer
Poisson, 8.7, 8.16
kanonisch, 8.7
Kohomologie
De Rham, 8.13
Konfigurationsraum, 1.1
Konstruktion
Poinsot, 4.5
Koordinate
zyklisch, 7.1
Koordinatensystem
kartesisch, 1.2
polar, 2.2
sphärisch, 1.2
Kotangentialraum, 8.10
Kraft, 1.5
Coriolis, 1.20
elektrostatisch, 1.6
Euler, 1.20
Führung, 1.20
Gravitation, 1.6

konservativ, 1.15
Lorentz, 1.6, 6.15
physikalisch, 1.8
resultierend, 1.16
scheinbar, 1.8, 1.19
Vierer-, 5.18
zentrifugal, 1.20
zentripetal, 1.20
Zweiteilchen, 1.6
Kraftgesetz, 1.5
verallgemeinert, 8.2, 8.27
Kreisel, 4.1
frei, 4.3
schlafend, 4.18
schnell, 4.14
schwer, 4.10
symmetrisch, 4.7, 4.10

Leistung
resultierend, 1.17
Lemma
Poincaré, 8.14
Lichtgeschwindigkeit, 5.1
Konstanz, 5.3
Lichtkegel, 5.3, 5.8
Transformation, 5.27
Längenkontraktion, 5.24

Masse
Defekt, 5.20
gesamt, 1.15
reduziert, 2.1
schwere, 1.6, 1.21
träge, 1.4
Matrix
orthogonal, 1.10
symplektisch, 8.17
Medium
Welle, 5.2
Metrik
Minkowski, 5.6
Riemann, 6.25
Monat
anomalisch, 2.23
drakonitisch, 2.20
synodisch, 2.20
Mond, 2.20
Multiplikator
Lagrange, 6.11

Nutation, 4.11

Observable, 8.7
Oszillator
Dämpfungsfall, 3.7
gedämpft, 3.6
kritische Dämpfung, 3.7
Schwingfall, 3.7

Parabel, 2.9
Paradoxon
Zwilling, 5.21
Perihel, 2.9
Phasenportrait, 2.4
Phasenraum, 2.4, 8.2
Funktion, 8.7
Geometrie, 8.9
Koordinaten, 8.15
Volumen, 8.20
Postulate
Einstein, 5.2
Potential, 1.15
effektiv, 2.3
elektromagnetisch, 6.16, 8.13
Vierer-, 6.24
Zweiteilchen, 1.15
Prinzip
Actio und Reactio, 1.6
Determiniertheit, 1.5
Fermat, 6.1
Hamilton, 6.15, 8.6
Maupertuis, 6.25
Relativität, 1.13
Galilei, 1.13, 5.1
speziell, 5.2
stationäre Wirkung, 6.15
Problem
Extremal-, 6.6
Kepler, 2.8
Produkt
äusseres, 8.12
Propagator, 3.2
Präzession, 4.8, 4.13
Punkt

Lagrange, 2.17
Punktteilchen, 1.1

Rapidität, 5.13
Raum
Euklidisch, 1.11
Minkowski, 5.6
Raumzeit, 5.5
Diagramm, 5.16
Signatur, 5.7
Resonanz, 3.12
Dämpfung, 3.12
Eigenfrequenz, 3.12
parametrisch, 3.12
Phase, 3.12
Suszeptibilität, 3.12
Rotation, 1.10, 4.9, 7.6
Rotverschiebung, 5.23
Ruheenergie, 5.17, 5.20
Ruhesystem, 5.16

Satz
Darboux, 8.15
Drehimpuls, 1.16, 4.2
Energie, 1.16
Fläche, 2.2
Impuls, 1.16
Liouville, 8.20
Poisson, 8.25
Schwerpunkt, 1.19
Wiederkehr, 8.21
Scheinkraft, 1.8, 1.19
Schwerpunkt, 1.15, 7.2
Integral, 1.18, 7.9
Satz, 1.19
System, 1.17
Schwingung
Eigen, 3.8
frei, 3.2
gedämpft, 3.6
Separation
Ansatz, 9.6
Konstanten, 9.7
Skalarprodukt
Minkowski, 5.6
Spektralzerlegung, 3.8
Spiegelung, 1.10
Raum, 1.10, 5.12
Zeit, 1.10, 5.12
Stabilität, 2.17, 3.9
Stoss, 3.10
Antwort, 3.10
Stossparameter, 2.6
Streuung, 2.7
Bahn, 2.6
Querschnitt
differentiell, 2.7
total, 2.7
Rutherford, 2.13
Winkel, 2.7
Struktur
kausal, 5.8
symplektisch, 8.15
Störungsrechnung, 3.4
Summenkonvention, 5.7
Symbol
Kronecker, 5.10
Symmetrie, 7.1
kontinuierlich, 7.4
System
autonom, 3.5, 7.10, 8.18
dissipativ, 3.9
integrabel, 2.3, 4.10, 4.11, 9.1
Kepler, 2.8
mechanisch, 1.1, 1.7
Mehrteilchen, 1.2
stabil, 3.9
vollständig separabel, 9.6
Zentralpotential, 2.1
Zweiteilchen, 1.14, 2.1

Tangentialraum, 8.9
Teilchen
elektrisch geladen, 6.15
freies, 1.7
masselos, 5.18
Zerfall, 5.19
Theorem
Noether, 7.5, 7.12, 8.26
Trajektorie, 2.3, 6.25
Transformation
aktiv, 7.4
Bahn, 7.11
Bezugssystem, 1.9

Eichung, 6.17, 8.13
Galilei, 1.10, 7.13
speziell, 1.10, 5.14, 7.8
kanonisch, 8.16
erzeugende Funktion, 9.2
Konfigurationsraum, 1.7, 8.17, 9.3
Legendre, 8.2
Lorentz, 5.4
speziell, 5.5, 5.12
passiv, 7.4
Translation
Raum, 1.10, 7.2
Zeit, 1.10, 7.10
Trägheit
Gesetz, 1.7
Trägheitsmoment, 4.3
Ellipsoid, 4.4, 4.6
Hauptachsen, 4.3
Tensor, 4.2

Variable, 1.1
separierbar, 9.6
zyklisch, 7.1
Variation, 6.7
Symmetrie, 7.5
Vektor
kontravariant, 5.10, 8.10, 8.18
kovariant, 5.9, 8.11, 8.18
Laplace-Runge-Lenz, 2.13, 7.14
lichtartig, 5.8
raumartig, 5.8
vergangenheitsbezogen, 5.8
Vierer-, 5.5
zeitartig, 5.8
zukünftig, 5.8
Vektorfeld, 8.9
dual, 8.10
erzeugend, 7.4
Hamilton, 8.14
Vergangenheit, 5.9

Welle
Medium, 5.2
Wellenmechanik, 6.17
Wellenoptik, 6.2
Weltlinie, 5.15
Wiederkehrpunkt, 8.21
Winkel
Euler, 4.9
Wirkung, 6.14
stationär, 6.15

Zeit, 1.1
Achse, 1.1
Eigen-, 5.15
Entwicklung, 1.1
Umkehr, 1.10, 5.12
Zeitableitung
total, 1.18, 6.15, 8.7
Zeitdilatation, 5.20
Zentralpotential, 2.1
Zukunft, 5.9
Zustand, 8.2
Zwangsbedingung, 6.18
holonom, 6.20
Zykloide, 6.5
Zyklus
Saros, 2.21

Plan der Vorlesungen

Die folgende Tabelle listet die Stellen im Skript zu Beginn aller Vorlesungsstunden:

Do. 21.09. 1 [50]:	0. Einführung
Do. 21.09. 2 [45]:	1. Newtonsche Mechanik
Mo. 25.09. 1 [55]:	1.2. ... § Allgemeine mechanische Systeme.
Mo. 25.09. 2 [40]:	1.4. Das Galileische Relativitätsprinzip
Do. 28.09. 1 [45]:	1.4. ... § Potentiale.
Do. 28.09. 2 [50]:	1.5. ... § Erhaltungssätze.
Mo. 02.10. 1 [50]:	2. Zweikörper-Probleme
Mo. 02.10. 2 [45]:	2.2. ... § Gebundene Bahnen.
Do. 05.10. 1 [50]:	2.3. Das Kepler-Problem
Do. 05.10. 2 [35]:	2.3. ... § Hyperbelbahnen.
Mo. 09.10. 1 [50]:	2.4. Gleichgewichtslagen des Zweikörper-Systems
Mo. 09.10. 2 [40]:	2.4. ... § Stabilität.
Do. 12.10. 1 [50]:	2.5. ... § Sonnenfinsternisse.
Do. 12.10. 2 [35]:	2.5. ... § Periodische Bahnen.
Mo. 16.10. 1 [45]:	3. Schwingungsprobleme
Mo. 16.10. 2 [45]:	3.2. Eigenschwingungen
Do. 19.10. 1 [35]:	3.2. ... § Eigenschwingungen.
Do. 19.10. 2 [50]:	3.3. ... § Harmonische Anregung.
Mo. 23.10. 1 [45]:	3.4. ... § Resonanz.
Mo. 23.10. 2 [40]:	4.1. ... § Trägheitstensor.
Do. 26.10. 1 [45]:	4.2. ... § Konstruktion von Poinsot.
Do. 26.10. 2 [40]:	4.3. Euler-Winkel
Mo. 30.10. 1 [45]:	4.4. ... § Integration der Bewegungsgleichungen.
Mo. 30.10. 2 [40]:	4.4. ... § Der schnelle Kreisel.
Mo. 11.12. 1 [45]:	5. Spezielle Relativitätstheorie
Mo. 11.12. 2 [35]:	5.2. Lorentz- und Poincaré-Gruppe
Do. 14.12. 1 [50]:	5.3. ... § Kausale Struktur.
Do. 14.12. 2 [40]:	5.4. Eigenschaften der Lorentz-Transformationen
Mo. 18.12. 1 [45]:	5.5. Relativistische Mechanik
Do. 21.12. 1 [40]:	5.6. Relativistische Effekte
Do. 21.12. 2 [40]:	5.6. ... § Doppler-Effekt.
Do. 02.11. 1 [60]:	6. Lagrange-Formalismus
Do. 02.11. 2 [35]:	6.1. ... § Brachistochronenproblem.
Mo. 06.11. 1 [40]:	6.2. ... § Euler-Lagrange-Gleichungen.
Mo. 06.11. 2 [45]:	6.3. ... § Die Kettenlinie.
Do. 09.11. 1 [40]:	6.4. ... § Äquivalente Lagrange-Funktionen.
Do. 09.11. 2 [45]:	6.5. ... § Mehrteilchen-Systeme.
Mo. 18.12. 2 [25]:	6.6. Relativistisches Teilchen

Mo. 13.11. 1 [40]:	6.7. Das Prinzip von Maupertuis
Mo. 13.11. 2 [45]:	7. Symmetrien
Do. 16.11. 1 [50]:	7.2. ... § Vektorfelder.
Do. 16.11. 2 [40]:	7.3. ... § Spezielle Galilei-Transformation.
Mo. 20.11. 1 [45]:	7.3. ... § Transformationen der Bahn.
Mo. 20.11. 2 [40]:	8. Hamilton-Formalismus
Do. 23.11. 1 [40]:	8.2. ... § Beispiele.
Do. 23.11. 2 [40]:	8.3. ... § Poisson-Algebra.
Mo. 27.11. 1 [45]:	8.4. ... § Duale Vektorfelder.
Mo. 27.11. 2 [25]:	8.4. ... § Äussere Differentiation.
Do. 30.11. 1 [45]:	8.5. Kanonische Transformationen
Do. 30.11. 2 [55]:	8.6. Zeitentwicklung
Mo. 04.12. 1 [45]:	8.6. ... § Ausströmen eines Gases.
Mo. 04.12. 2 [40]:	8.7. ... § Symmetrie.
Do. 07.12. 1 [40]:	9.1. ... § Beispiele.
Do. 07.12. 2 [45]:	9.3. Separable Probleme
ausgelassen [35]:	9.4. Zeitabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung