

QUANTENFELDTHEORIE

Wintersemester 2004/2005

Matthias R. Gaberdiel

Institut für Theoretische Physik
ETH-Hönggerberg
CH-8093 Zürich

Email: gaberdiel@itp.phys.ethz.ch

Contents

1	Einleitung	4
2	Quantenmechanik und Relativitätstheorie	6
2.1	Klein-Gordon Gleichung	6
3	Klassische Feldtheorie	11
3.1	Klassische Mechanik	11
3.2	Klassische Feldtheorie	13
3.3	Symmetrien und Erhaltungsgrößen	16
3.3.1	Noether's Theorem	17
3.3.2	Noether's Theorem für geometrische Transformationen	19

4	Dirac Gleichung und Elektrodynamik	22
4.1	Die Dirac Gleichung	22
4.1.1	Lösungen positiver and negativer Energie und Dirac's Löchertheorie	24
4.1.2	Die Majorana Bedingung	26
4.2	Elektrodynamik	27
5	Lorentzsymmetrie	33
5.1	Die quantenmechanische Lorentzgruppe	33
5.2	Kovarianz der Klein-Gordon Gleichung	36
5.3	Kovarianz der Dirac Gleichung	37
5.3.1	Die Konstruktion in der Weyl Darstellung	38
5.3.2	Der allgemeine Fall	40
5.3.3	Die Weyl Gleichung und der Chiralitätsoperator	42
6	Quantisierung freier Felder	44
6.1	Allgemeine Formulierung	45
6.2	Das Skalarfeld	51
6.2.1	Poincare Invarianz	55
6.2.2	Der Propagator	56
6.3	Das geladene Skalarfeld	57
6.3.1	Zeitgeordnete Produkte	59
6.3.2	Wick's Theorem	61
7	Quantisierung des elektromagnetischen Feldes	64
7.1	Indefinite Metrik	64
7.2	Der Propagator	70
7.3	Massive Vektorfelder	71
7.4	Casimir Energie	74
8	Quantisierung des Dirac Feldes	77
8.1	Antikommutatoren	77
8.2	Der Fockraum	83
8.3	Der Propagator und Spin-Statistik	84
9	Streuprozesse	86
9.1	Kinematische Betrachtungen	86
9.2	Asymptotische Zustände	89
9.3	Die LSZ Reduktionsformel	91
10	Störungstheorie und Feynman Diagramme	95
10.1	Die Dyson Reihe	95
10.2	Die Feynman Diagramme für die ϕ^4 Theorie	99
10.3	Verkettete Diagramme	102
10.4	Feynman Regeln im Impulsraum	104

10.5 Feynman Regeln für die QED	107
10.6 Compton Streuung	112
11 Renormierung	117
11.1 Die 2-Punkt Funktion der ϕ^3 Theorie	117
11.1.1 Unrenormierte Störungstheorie	120
11.1.2 Renormierte Störungsrechnung	122
11.2 Renormierung in höherer Ordnung	124
A Konventionen	129

1 Einleitung

Die Quantenmechanik ist eine konsistente Theorie, die einen grossen Bereich der Physik, insbesondere die Atom- und Molekülphysik, gut beschreibt. Sie vernachlässigt jedoch die Effekte der speziellen Relativitätstheorie und ignoriert die Quantennatur der Kraftfelder, zum Beispiel des elektromagnetischen Feldes. Die Erweiterung der Quantenmechanik, die diesen Gesichtspunkten Rechnung trägt, wird als Quantenfeldtheorie bezeichnet.

Das Konzept der Quantenfeldtheorie wurde in den Jahren 1925-1929 von Heisenberg, Jordan, Pauli und Dirac entwickelt. Mit Hilfe der Störungstheorie 1. Ordnung konnte man damit auf Anhieb zum Beispiel die spontane Emission von elektromagnetischer Strahlung erklären. Lange Zeit aber scheiterte eine Verbesserung dieser Rechnungen mit Hilfe höherer Ordnung der Störungstheorie daran, dass alle entsprechenden Ausdrücke divergierten.

Die Definition einer Störungstheorie ist dann 1949 Feynman und Dyson mit Hilfe des Renormierungsverfahrens gelungen. Die Grundidee, die auf Heisenberg zurückgeht, besteht darin, dass die physikalischen Massen und Ladungen nicht mit den in der Formulierung der Theorie verwendeten Parametern (den sogenannten ‘nackten’ Massen, Ladungen, etc.) übereinstimmen. Vielmehr differieren diese um typischerweise unendlich grosse Beiträge; damit können die Divergenzen der Störungstheorie in eine Redefinition der physikalischen Parameter absorbiert werden. Im Fall der Elektrodynamik (bzw. der Quantenelektrodynamik QED) stimmten die auf diese Weise berechneten Korrekturen zur untersten Ordnung der Störungstheorie ganz ausgezeichnet mit den gemessenen Werten überein. Das Paradebeispiel ist das magnetische Moment des Elektrons; bezeichnet man mit μ_0 das Bohr’sche Magneton, so ergibt sich für das magnetische Moment des Elektrons

$$\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)_{\text{theor}} = 1.001159652460(200), \quad (1.0.1)$$

und

$$\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)_{\text{exp}} = 1.001159652193(10), \quad (1.0.2)$$

wobei die Fehler des theoretischen Wertes aus der Unsicherheit in der Feinstrukturkonstanten und der numerischen Ungenauigkeit bei der Berechnung der Koeffizienten der Störungsreihe bestehen.

Nach dem Erfolg der Quantenelektrodynamik lag es nahe, auch die anderen Wechselwirkungen der Elementarteilchen durch Quantenfeldtheorien zu beschreiben. Hierbei sollten die Quanten dieser Felder wie die Photonen als Teilchen beobachtbar sein. Diese Überlegung führte Yukawa zur Vorhersage von Mesonen als Übermittler der Kernkräfte und wurde vor ein paar Jahren eindrucksvoll bei dem Nachweis der W- und Z-Bosonen als Überträger der schwachen Wechselwirkung bestätigt.

Die heute weitgehend akzeptierte Theorie der Elementarteilchen ist das sogenannte Standardmodell. Es handelt sich dabei um die Quantenchromodynamik als Theorie

der starken Wechselwirkung, kombiniert mit der Weinberg-Salam-Theorie als Theorie der schwachen Wechselwirkung. (Die Renormalisierbarkeit dieser Theorie wurde von t'Hooft und Veltman gezeigt, wofür jene vor ein paar Jahren den Nobelpreis erhielten. Der Nachweis, dass die Quantenchromodynamik 'asymptotisch frei' ist wurde 2004 durch den Nobelpreis für Gross, Politzer und Wilczek geehrt.) Die Voraussagen des Standardmodells stimmen mit den experimentell gemessenen Grössen hervorragend überein. Trotzdem gibt es eine Reihe schwerwiegender Einwände gegen das Standardmodell, und man glaubt heute, dass es lediglich eine 'effektive' Feldtheorie definiert. Insbesondere kann im Rahmen von Quantenfeldtheorien die Gravitationskraft bisher nicht befriedigend beschrieben werden. Der gegenwärtig erfolgversprechendste Kandidat für eine Theorie, die sowohl das Standardmodell der Elementarteilchenphysik als auch die Allgemeine Relativitätstheorie beschreibt, ist String Theorie.

2 Quantenmechanik und Relativitätstheorie

Quantenfeldtheorie ist die Anwendung der Quantenmechanik auf dynamische Systeme von Feldern (so wie sie etwa in der Elektrodynamik auftreten). Sie ist für die (gegenwärtige) theoretische Beschreibung der Elementarteilchenphysik von zentraler Bedeutung. Mit kleinen Modifikationen spielen die Methoden, die wir diskutieren werden, jedoch auch für andere Bereiche der modernen theoretischen Physik eine wichtige Rolle, zum Beispiel in der Theorie der Festkörper. In dieser Vorlesung betrachten wir hauptsächlich die Anwendung der Quantenfeldtheorie in der Elementarteilchenphysik; wir werden deshalb nur *relativistische* Felder betrachten.

In der Elementarteilchenphysik wollen wir Prozesse verstehen, die bei sehr kleinen (quantenmechanischen) Abständen und sehr hohen (relativistischen) Energien stattfinden. Es ist aber zunächst nicht klar, warum wir dazu eine Theorie von *Feldern* benötigen — warum können wir nicht einfach relativistische Teilchen quantisieren, genauso wie wir das in der Quantenmechanik für nicht-relativistische Teilchen gemacht haben. Wir wollen zunächst verstehen, warum das nicht möglich ist.

2.1 Klein-Gordon Gleichung

Wir wollen nun versuchen, die Konzepte der Quantenmechanik und der speziellen Relativitätstheorie zu kombinieren und eine relativistische Wellengleichung zu konstruieren. Wie wir sehen werden führt dies zu Schwierigkeiten und Inkonsistenzen, die uns schlussendlich dazu zwingen werden, diesen Weg aufzugeben.

In der Quantenmechanik werden Zustände durch normalisierte Vektoren ψ eines Hilbertraumes \mathcal{H} dargestellt. Dabei ist $|\langle\phi|\psi\rangle|^2$ die Wahrscheinlichkeit, das System in dem Zustand ϕ zu finden. Physikalische Observable werden mit selbst-adjungierten Operatoren $A = A^\dagger$ auf \mathcal{H} identifiziert. Falls das System im Zustand ψ ist, dann ist der Erwartungswert der Observablen A gerade $\langle\psi|A|\psi\rangle$. Die Dynamik des Systems wird durch die Schrödinger Gleichung beschrieben

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t) = H\psi, \quad (2.1.1)$$

wobei H der selbst-adjungierte Hamilton Operator ist. Dies kann auch als

$$\psi(t_2) = U(t_2, t_1)\psi(t_1) \quad (2.1.2)$$

geschrieben werden, wobei $U(t_2, t_1)$ ein unitärer Operator ist, der durch

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t_2}U(t_2, t_1) = H(t_2)U(t_2, t_1) \quad (2.1.3)$$

charakterisiert ist.

Die Grundaussage der speziellen Relativitätstheorie ist, dass die Naturgesetze unabhängig vom Koordinatensystem des Beobachters sind, solange die Koordinatensysteme zu derselben Klasse von Bezugssystemen gehören; diese sind dadurch ausgezeichnet, dass sie sich mit Hilfe der Poincaretransformationen ineinander überführen lassen.

Die Poincaregruppe wird durch Raum- und Zeittranslationen, die üblichen Raumrotationen sowie die sogenannten speziellen Lorentztransformationen (oder Boosts) erzeugt. Die Lichtgeschwindigkeit c ist die schnellste Geschwindigkeit, mit der Signale übertragen werden können; sie ist in allen Bezugssystemen gleich gross, nämlich

$$c = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (2.1.4)$$

Information, die aus dem Raumzeitpunkt (\mathbf{x}_0, t_0) herkommt, kann nur Raumzeitpunkte (\mathbf{x}_1, t_1) erreichen, die im Vorwärtslichtkegel liegen, d.h. die

$$c^2(t_1 - t_0)^2 - (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^2 \geq 0, \quad t_1 - t_0 \geq 0 \quad (2.1.5)$$

erfüllen. Dies ist die relativistische Version der Kausalitätsbedingung. Für Geschwindigkeiten v , die klein relativ zur Lichtgeschwindigkeit c sind, ist die Newton'sche Mechanik eine sehr gute Approximation.

Bevor wir überhaupt versuchen, diese beiden Konzepte für Punktteilchen miteinander zu verbinden, können wir bereits erahnen, dass eine relativistische 1-Teilchen Quantenmechanik nicht funktionieren kann. Wegen der Einstein'schen Relation $E = mc^2$ können Teilchen-Antiteilchenpaar erzeugt werden, falls hinreichend viel Energie zur Verfügung steht. Selbst wenn diese Energie nicht vorhanden ist, kann dies virtuell geschehen — der Grund dafür ist, dass wegen der quantenmechanischen Unschärferelation $\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar$, solche Energien kurzfristig auftreten können. In der relativistischen Theorie wird daher die Teilchenzahl nicht erhalten sein, und die übliche Formulierung der Quantenmechanik ist für relativistische Theorien nicht möglich.

Konkret kann man dieses Problem am Beispiel der sogenannten Klein-Gordon Gleichung erkennen. Um diese abzuleiten erinnern wir uns an das sogenannte Korrespondenzprinzip der Quantenmechanik. In der üblichen Ortsraumformulierung der Quantenmechanik assoziieren wir die Operatoren

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \longleftrightarrow E, \quad \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x^i} \longleftrightarrow p^i \quad (2.1.6)$$

zu der Energie E und dem Impuls p^i . Für ein freies massives Teilchen haben wir die Energieimpulsrelation

$$\begin{aligned} E &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \text{constant} && \text{nicht-relativistisch} \\ E^2 &= \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4 && \text{relativistisch.} \end{aligned}$$

[Von nun an werden wir immer $c = \hbar = 1$ setzen!]

In der üblichen Quantenmechanik erhält man nun die Schrödingergleichung aus der obigen Energieimpulsrelation mit Hilfe des Korrespondenzprinzips

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}, t) = -\frac{\nabla^2}{2m} \psi(\mathbf{x}, t). \quad (2.1.7)$$

Im Falle der relativistischen Energieimpulsrelation erhält man stattdessen

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\psi(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (2.1.8)$$

Diese Gleichung ist die sogenannte *Klein-Gordon Gleichung*. Falls wir (wie in der üblichen Quantenmechanik) ψ als Wellenfunktion interpretieren wollen, müssen wir eine nicht-negative Norm finden, die unter der Zeitentwicklung invariant ist. [Die nicht-negative Norm kann dann als Wahrscheinlichkeit interpretiert werden, das Teilchen irgendwo zu finden; diese Grösse muss zu 1 normiert werden und diese Normierung muss natürlich zeitunabhängig sein.] Tatsächlich kann man eine Kontinuitätsgleichung finden

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \operatorname{div}\mathbf{j} = \partial_\mu j^\mu = 0, \quad (2.1.9)$$

wobei der 4-er Vektor $j^\mu = (j^0 = \rho, j^i)$ durch

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{i}{2m} \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi - \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right) \\ \mathbf{j} &= \frac{1}{2im} \left(\psi^* \nabla \psi - (\nabla \psi)^* \psi \right) \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

definiert ist. Die Kontinuitätsgleichung bedeutet, dass

$$-\frac{d}{dt} \int_V d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}, t) = \int_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{j}, \quad (2.1.11)$$

d.h. die Änderung der totalen ‘Ladung’ im Volumen V entspricht dem Fluss der ‘Ladungsdichte’ durch den Rand von V . Wir würden diese Ladung gerne als ‘Wahrscheinlichkeit’ definieren; das Problem ist jedoch, dass ρ im allgemeinen *nicht positiv* ist. [Zum Vergleich: in der üblichen Quantenmechanik gibt es ein Analogon zu (2.1.9) wobei \mathbf{j} genau wie oben, aber ρ als $\rho = |\psi|^2$ definiert wird. ρ kann dann als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden, und die Kontinuitätsgleichung impliziert dann einfach, dass die Wahrscheinlichkeit erhalten bleibt.] Die Klein-Gordon Gleichung erlaubt daher keine Interpretation als 1-Teilchen Quantenmechanik!

Der Grund dafür, dass die relativistische Quantenmechanik nicht als 1-Teilchentheorie konsistent ist, kann man auch fundamentaler verstehen. Dazu betrachten wir die Amplitude, die die Propagation eines freien Teilchens der Masse m von \mathbf{x}_0 nach \mathbf{x} beschreibt:

$$A(t) = \langle \mathbf{x} | e^{-iHt} | \mathbf{x}_0 \rangle. \quad (2.1.12)$$

In der üblichen (nicht-relativistischen) Quantenmechanik gilt $E = \mathbf{p}^2/2m$, und daher ist

$$\begin{aligned} A(t) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \langle \mathbf{x} | e^{-i\frac{\mathbf{p}^2}{2m}t} | \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} | \mathbf{x}_0 \rangle \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{-i\frac{\mathbf{p}^2}{2m}t} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)} \\ &= \left(\frac{m}{2\pi it}\right)^{3/2} e^{im(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^2/2t}. \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

Dieser Ausdruck ist für alle \mathbf{x} und t nicht von Null verschieden; dies bedeutet, dass das Teilchen zwischen zwei beliebigen Raumpunkten in beliebig kurzer Zeit propagieren kann. Dies ist natürlich mit der Kausalitätsbedingung einer relativistischen Theorie nicht verträglich.

Man könnte vermuten, dass der Grund für dieses Problem daher rührt, dass man die nicht-relativistische Energieimpulsformel benutzt hat, aber das ist nicht der Fall. Falls wir $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ benutzen, erhält man

$$\begin{aligned} A(t) &= \langle \mathbf{x} | e^{-it\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} | \mathbf{x}_0 \rangle \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{-it\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)} \\ &= \frac{1}{2\pi^2 |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \int_0^\infty dp p \sin(p|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|) e^{-it\sqrt{p^2 + m^2}}. \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

Das verbleibende Integral kann durch Besselfunktionen explizit gelöst werden; für unsere Belange ist es aber ausreichend, das Integral für $\mathbf{x}^2 \gg t^2$ mit Hilfe der Methode der stationären Phase abzuschätzen. Die Phasenfunktion $px - t\sqrt{p^2 + m^2}$ hat einen stationären Punkt bei $p = imx/\sqrt{x^2 - t^2}$; wir können den Integralweg so deformieren (in der komplexen Ebene), dass er durch diesen Punkt verläuft. Dann findet man, dass $A(t)$ bis auf eine rationale Funktion von \mathbf{x} und t wie

$$A(t) \sim e^{-m\sqrt{x^2 - t^2}} \quad (2.1.15)$$

geht. Dies impliziert, dass selbst unter Verwendung der relativistischen Energieimpulsrelation, der Propagator ausserhalb des Vorwärtslichtkegels nicht verschwindet! In der Quantenfeldtheorie wird dieses Problem (wie wir später sehen werden) dadurch gelöst, dass Quantenfeldtheorien immer auch die zugehörigen Antiteilchen beschreiben (d.h. dass es keine 1-Teilchentheorien mehr sind), und dass die Bewegung eines Teilchens entlang eines raumartigen Intervalls identisch zu jener seines Antiteilchens in der entgegengesetzten Richtung ist. Bei der Berechnung des Propagators zwischen zwei raumartigen Raumzeitpunkten kürzen sich dann die Beiträge von Teilchen und Antiteilchen gerade heraus, und das Ergebnis ist mit der relativistischen Kausalitätsbedingung kompatibel.

Diese Schwierigkeiten mit der 1-Teilcheninterpretation sind jedoch nicht die einzigen Probleme, die es mit diesem Zugang gibt. Ein weiteres Problem besteht darin, dass die Klein-Gordon Gleichung Lösungen mit negativer Energie besitzt. Jede ebene Welle

$$\psi(\mathbf{x}, t) = N e^{-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \quad (2.1.16)$$

löst die Klein-Gordon Gleichung, vorausgesetzt, dass $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$. Lösungen mit $E = -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ tauchen deshalb genauso auf wie jene mit Energie $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Das ist ein schwerwiegendes Problem, da nun das Energiespektrum nicht mehr nach unten beschränkt ist. [Insbesondere bedeutet das, dass jedes Teilchen beliebig (unendlich) viel Energie abgeben kann, in dem es in einen Zustand niedrigerer Energie übergeht!]

Diese Probleme bewogen Dirac dazu, die Klein-Gordon Gleichung durch die Dirac Gleichung zu ersetzen, die in gewissem Sinn die Wurzel der Klein-Gordon Gleichung ist. (Diese werden wir später diskutieren.) Damit kann man das Problem der negativen Norm für ρ zwar lösen, aber die Dirac Gleichung hat auch Lösungen negativer Energie, und die dadurch aufgeworfenen konzeptionellen Probleme müssen wiederum gelöst werden. Dies wird erst in einer Vielteilcheninterpretation möglich sein.

Bevor wir diese Dinge diskutieren können, sollten wir uns jedoch zunächst einige Begriffe der klassischen Feldtheorie in Erinnerung rufen (und verschiedene neue Konzepte einführen).

3 Klassische Feldtheorie

Wir beginnen damit, uns die Lagrange'sche und Hamilton'sche Formulierung der klassischen Mechanik in Erinnerung zu rufen. Danach betrachten wir klassische Feldtheorie von diesem Gesichtspunkt aus, und leiten einige fundamentale Eigenschaften ab.

3.1 Klassische Mechanik

In der klassischen Mechanik kann man die Bewegungsgleichungen aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung ableiten. Betrachte ein klassisches mechanisches System mit Ortskoordinaten $\mathbf{q} = \{q_1, \dots, q_N\}$. Wir bezeichnen mit $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ seine Lagrange Funktion, die eine Funktion der Koordinaten und Geschwindigkeiten (und manchmal auch explizit eine Funktion der Zeit) ist. Für jede Bahn $\mathbf{q}(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, definieren wir die *Wirkung* durch

$$S[\mathbf{q}] = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt. \quad (3.1.1)$$

Das *Prinzip der kleinsten Wirkung* besagt dann, dass unter all den Bahnen $\mathbf{q}(t)$ zu vorgegebenen Endpunkten $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}(t_1)$ und $\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}(t_2)$, die tatsächliche (physikalische) Bahn dadurch ausgezeichnet ist, dass sie die Wirkung extremalisiert. Falls $\mathbf{Q}(t)$ die tatsächliche Bahn beschreibt, dann ist für eine davon infinitesimal verschiedene Bahn $\mathbf{q}(t) = \mathbf{Q}(t) + \delta\mathbf{q}(t)$, die Wirkung

$$S[\mathbf{q}] = S[\mathbf{Q}] + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\delta S}{\delta \mathbf{q}(t)}[\mathbf{Q}] \delta \mathbf{q}(t). \quad (3.1.2)$$

Damit die tatsächliche Bahn die Wirkung extremalisiert, muss daher gelten

$$\frac{\delta S}{\delta \mathbf{q}(t)}[\mathbf{Q}] = 0. \quad (3.1.3)$$

Um diesen Ausdruck mit den Euler-Lagrange Gleichungen zu vergleichen, beobachten wir, dass

$$\delta \dot{\mathbf{q}}(t) = \frac{d}{dt} \delta \mathbf{q}(t), \quad \delta \mathbf{q}(t_1) = \delta \mathbf{q}(t_2) = 0. \quad (3.1.4)$$

Damit ist die obige Variation

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\delta S}{\delta \mathbf{q}(t)}[\mathbf{Q}] \delta \mathbf{q}(t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}(t)} \delta \mathbf{q}(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}(t)} \frac{d}{dt} \delta \mathbf{q}(t) \right]. \quad (3.1.5)$$

Im letzten Term integrieren wir partiell,

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}(t)} \frac{d}{dt} \delta \mathbf{q}(t) = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}(t)} \delta \mathbf{q}(t) \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \delta \mathbf{q}(t) \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}(t)}. \quad (3.1.6)$$

Zusammen mit (3.1.5) erhalten wir dann die vertraute Gleichung

$$\frac{\delta S}{\delta \mathbf{q}(t)} \equiv \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}(t)} = 0. \quad (3.1.7)$$

Um zur Hamilton'schen Beschreibung zu gelangen, führt man die kanonisch konjugierten Impulse durch

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (3.1.8)$$

ein. Wir nehmen nun an, dass wir diese Gleichung invertieren können, d.h. dass wir die Geschwindigkeiten \dot{q}_i durch die Impulse $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_N)$ und die Ortskoordinaten \mathbf{q} ausdrücken können. (Die Orts- und Impulskoordinaten bilden dann Koordinaten für den sogenannten Phasenraum.) Die Hamilton Funktion wird dann durch die Legendre Transformation

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p}, \mathbf{q})) \quad (3.1.9)$$

definiert. Die Variation der Hamilton Funktion ist dann

$$dH = \left[\dot{q}_i + \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} \left(p_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] dp_i + \left[-\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - p_j \right) \right] dq_i, \quad (3.1.10)$$

wobei die Summation über 'dummy'-Variablen implizit ist. Nach Definition der konjugierten Impulse verschwinden die runden Klammern, und wir finden

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -\dot{p}_i, \quad (3.1.11)$$

wobei wir die Euler-Lagrange Gleichungen benutzt haben.

Man kann nun die Zeitableitung einer beliebigen Funktion $f(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ (entlang der tatsächlichen Bahn) als

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} \quad (3.1.12)$$

schreiben, wobei wir die *Poisson Klammer*

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \quad (3.1.13)$$

eingeführt haben. Insbesondere folgt aus dieser Gleichung, dass eine Funktion f , die nicht explizit von der Zeit abhängt, und deren Poisson Klammer mit H verschwindet, zeitunabhängig, d.h. eine Erhaltungsgrösse ist.

Auch die Hamilton'schen Gleichungen (3.1.11) können aus einem Extremalprinzip abgeleitet werden. Dazu beobachten wir, dass

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt = p_i dq_i - H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dt. \quad (3.1.14)$$

Daher können wir die Wirkung auch als

$$S = \int_{t_1}^{t_2} p_i dq_i - H dt \quad (3.1.15)$$

schreiben. Die Wirkung kann daher auch als Funktional der $2N$ Funktionen $q_i(t)$ und $p_i(t)$ (d.h. als Funktional der Phasenraumvariablen) interpretiert werden. Falls wir

wiederum annehmen, dass $q_i(t)$ für $t = t_1$ und $t = t_2$ vorgegeben sind (aber keine Randbedingungen an p_i stellen), findet man

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\delta p_i \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) + \left(p_i \frac{d}{dt} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i \right) \right]. \quad (3.1.16)$$

Nach partieller Integration des vorletzten Terms erhalten wir dann

$$\frac{\delta S}{\delta p_i(t)} = \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad -\frac{\delta S}{\delta q_i(t)} = \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (3.1.17)$$

Falls wir wiederum verlangen, dass die Wirkung extremal sein soll, d.h. $\delta S = 0$, erhalten wir daraus die Hamilton Gleichungen (3.1.11). Schliesslich beobachten wir, dass die Wirkung (nach partieller Integration) auch als

$$S = \mathbf{p}(t_2) \cdot \mathbf{q}(t_2) - \mathbf{p}(t_1) \cdot \mathbf{q}(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} (q_i dp_i + H dt) \quad (3.1.18)$$

geschrieben werden kann. Daher spielen p_i und q_i eine ebenbürtige Rolle in der Wirkung.

Wir bezeichnen mit $S(q_1, t_1; q_2, t_2)$ die Wirkung entlang der tatsächlichen Bahn im Phasenraum, deren Randbedingungen durch $q(t_1) = q_1$ und $q(t_2) = q_2$ festgelegt ist. Diese Funktion hängt dann nur von den Randbedingungen q_1 und q_2 (sowie den vorgegebenen Zeiten t_1 und t_2 ab); ihre Variation ist dann

$$\delta S(q_1, t_1; q_2, t_2) = (p(t_2) \delta q_2 - H(t_2) \delta t_2) - (p(t_1) \delta q_1 - H(t_1) \delta t_1), \quad (3.1.19)$$

woraus folgt, dass

$$H(t_2) = -\frac{\partial S(q_1, t_1; q_2, t_2)}{\partial t_2}, \quad H(t_1) = \frac{\partial S(q_1, t_1; q_2, t_2)}{\partial t_1}, \quad (3.1.20)$$

und entsprechend für die Impulse

$$p(t_2) = \frac{\partial S(q_1, t_1; q_2, t_2)}{\partial q_2}, \quad p(t_1) = -\frac{\partial S(q_1, t_1; q_2, t_2)}{\partial q_1}. \quad (3.1.21)$$

3.2 Klassische Feldtheorie

Wie wir gesehen haben ist die fundamentale Grösse der klassischen Mechanik die Wirkung S , das Zeitintegral der Lagrangefunktion. Wir wollen nun eine Feldtheorie analysieren, bei der die dynamischen Variablen ein Feld $\phi(x)$ ist. [Ein Beispiel für eine solche Feldtheorie ist die Elektrodynamik, die wir später ausführlich diskutieren werden. Dort ist $\phi(x)$ zum Beispiel das 4-er Potential $A^\mu(x)$.] Wir wollen uns von der Analogie zur klassischen Mechanik von Punktteilchen leiten lassen

$$q^j(t) \longleftrightarrow \phi(t, \mathbf{x}), \quad (3.2.1)$$

wobei der diskreten Index j nun zu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ korrespondiert.

Die Wirkung einer Feldtheorie ist das Zeitintegral einer Lagrangefunktion. Falls die Feldtheorie *lokal* ist (in dieser Vorlesung werden wir fast ausschliesslich lokale Feldtheorien betrachten), dann ist die Lagrangefunktion das Raumintegral einer Lagrangedichte, \mathcal{L} , die nur von den Feldern $\phi(x)$ und ihren Ableitungen $\partial_\mu\phi(x)$ abhängt:

$$S = \int L dt = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) d^4x. \quad (3.2.2)$$

Wir werden meistens die Randbedingungen an die Felder nicht explizit angeben; im folgenden werden wir (wenn nicht anders vermerkt) annehmen, dass sich die Raumintegrale über den gesamten Raum erstrecken, und dass die Felder hinreichend schnell im Unendlichen abfallen, so dass wir partiell integrieren können (ohne Randterme zu erhalten). Die Integrationsgrenzen in der Zeitrichtungen werden aus dem Kontext klar sein.

Die Bewegungsgleichungen der Felder können wiederum aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung abgeleitet werden. Im gegenwärtigen Kontext besagt es, dass das System sich so von einer vorgegebenen Feldkonfiguration $\phi_1(\mathbf{x})$ zur Zeit t_1 zu einer vorgegebenen Feldkonfiguration $\phi_2(\mathbf{x})$ zur Zeit t_2 entwickelt, dass die Wirkung extremal (üblicherweise minimal) wird. Um diese Bewegungsgleichungen abzuleiten, betrachten wir daher die Variation der Wirkung

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right] \\ &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Der letzte Term kann mittels des Divergenztheorems in einen Oberflächenterm umgewandelt werden; da die Feldkonfigurationen zur Zeit t_1 und t_2 vorgegeben sind, verschwinden die Oberflächenterme bei $t = t_1$ oder $t = t_2$. Die Oberflächenterme im Unendlichen (in den Raumrichtungen) verschwinden nach Annahme über die Randbedingungen der Felder. Der Beitrag des letzten Terms verschwindet daher insgesamt, und die Feldgleichungen sind die (verallgemeinerten) Euler-Lagrange Gleichungen

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (3.2.4)$$

Falls die Lagrangedichte mehrere Felder enthält, gibt es eine solche Bewegungsgleichung für jedes Feld.

Die Lagrange'sche Beschreibung ist für relativistische Systeme besonders geeignet, da das Integral in der Definition der Wirkung sich über die Raumzeit erstreckt, und daher (unter geeigneten Bedingungen an die Lagrangedichte) manifest Lorentz invariant ist. Um den Bezug zur Quantenmechanik herzustellen, ist es jedoch manchmal nützlich,

die Hamilton'sche Formulierung zu benützen. Das natürliche Analogon des kanonisch konjugierten Impulses ist jetzt

$$p(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{x})}, \quad (3.2.5)$$

d.h. wir identifizieren (wie schon oben erwähnt) die verschiedenen Freiheitsgrade q_i mit den Werten des Feldes ϕ an verschiedenen Raumpunkten \mathbf{x} . Da die Lagrangefunktion das Raumintegral der Lagrangedichte ist, impliziert dies

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{x})} \int \mathcal{L}(\phi(\mathbf{y}), \dot{\phi}(\mathbf{y}), \partial_i \phi(\mathbf{y})) d^3 \mathbf{y} \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{x})} d^3 \mathbf{x} \\ &= \pi(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x}, \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

wobei das Feld

$$\pi(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{x})} \quad (3.2.7)$$

die zu ϕ kanonische konjugierte Impulsdichte genannte wird. Die Hamilton Funktion ist dann

$$H = \int d^3 \mathbf{x} [\pi(\mathbf{x}) \dot{\phi}(\mathbf{x}) - \mathcal{L}] \equiv \int d^3 \mathbf{x} \mathcal{H}, \quad (3.2.8)$$

wobei \mathcal{H} die Hamiltondichte genannt wird.

Als einfaches Beispiel betrachten wir die Feldtheorie eines einzelnen (skalaren) Feldes $\phi(\mathbf{x})$, dessen Lagrangedichte durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

definiert ist. Das Feld ϕ ist reell-wertig, und der Parameter m wird, wie wir später sehen werden, die Rolle einer Masse spielen. Die verallgemeinerte Euler-Lagrange Gleichung, die aus dieser Lagrangedichte folgt, ist

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi + m^2 \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi = 0. \quad (3.2.10)$$

Dies ist gerade die Klein-Gordon Gleichung, die wir schon zuvor betrachtet hatten. [Hier handelt es sich dabei aber um eine *klassische Feldgleichung*, nicht um eine quantenmechanische Wellengleichung!] Die kanonisch konjugierte Impulsdichte ist einfach

$$\pi(\mathbf{x}) = \dot{\phi}(\mathbf{x}), \quad (3.2.11)$$

und die Hamiltondichte ist daher

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (3.2.12)$$

3.3 Symmetrien und Erhaltungsgrößen

Symmetrien bilden in der Beschreibung von Feldtheorien (und überhaupt in der modernen theoretischen Physik) eine wichtige Rolle. Symmetrien spielen typischerweise eine Doppelrolle. Zum einen erlauben uns Symmetrien, die die dynamischen Gleichungen invariant lassen, aus einer Lösung der Bewegungsgleichungen Klassen von Lösungen zu generieren. Zum anderen, führen sie zu Erhaltungsgrößen, wie zum Beispiel Energie, Impuls, Drehimpuls, Ladung, usw. Zwischen diesen beiden Aspekten von Symmetrien gibt es eine tiefe Beziehung, die wir im folgenden diskutieren wollen.

Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel: ein nicht-relativistisches Punktteilchen in einem Kraftfeld, das von einem zeit-unabhängigen Potential herrührt. Die Position und die Geschwindigkeit des Teilchens zur Zeit t für vorgegebene Anfangsbedingungen zur Zeit 0 sind natürlich gleich denen zur Zeit $t + \tau$, falls die selben Anfangsbedingungen wie zuvor zur Zeit τ vorgegeben wurden. In diesem Sinn ist das Problem invariant unter Zeittranslationen. Da das Potential zeitunabhängig ist, wissen wir ausserdem, dass die Energie (d.h. die Hamilton Funktion) eine Erhaltungsgrösse ist. Wir wollen nun verstehen, in welcher Weise diese beiden Eigenschaften miteinander in Beziehung stehen.

Die Zeitableitung einer beliebigen Funktion $f(p, q)$ entlang der tatsächlichen Bewegung im Phasenraum ist

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}. \quad (3.3.1)$$

Die Aussage, dass das System unter Zeittranslationen invariant ist, ist einfach die Aussage, dass

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0. \quad (3.3.2)$$

Da die Poisson Klammer anti-symmetrisch ist, gilt automatisch $\{H, H\} = 0$ und es folgt, dass

$$\frac{dH}{dt} = 0, \quad (3.3.3)$$

d.h. die Energie ist eine Erhaltungsgrösse. Diese einfache Beobachtung genügt zum Beispiel, die Bahn des Teilchens im Phasenraum explizit zu finden, falls sich das Teilchen nur in einer Richtung bewegen kann.

Von dem Gesichtspunkt der Wirkung, kann man dies wie folgt verstehen. Die Wirkung der tatsächlichen Bahn, wobei zur Zeit $t = t_i$ das Teilchen an der Position $q = q_i$, $i = 1, 2$ ist, sei $S(q_1, t_1; q_2, t_2)$. Die Invarianz unter Zeittranslationen bedeutet dann einfach, dass

$$S(q_1, t_1; q_2, t_2) = S(q_1, t_1 + \tau; q_2, t_2 + \tau). \quad (3.3.4)$$

In differentieller Form ist das

$$\frac{\partial S}{\partial t_1} + \frac{\partial S}{\partial t_2} = 0. \quad (3.3.5)$$

Wegen (3.1.20) impliziert dies dann direkt

$$H(t_1) = H(t_2). \quad (3.3.6)$$

Die Energieerhaltung ist also direkt eine Folge der Existenz einer kontinuierlichen Symmetrie, in diesem Fall der Symmetrie unter Zeittranslationen. Entsprechend gilt für Ortstranslationen

$$S(q_1, t_1; q_2, t_2) = S(q_1 + a, t_1; q_2 + a, t_2). \quad (3.3.7)$$

Differenzieren nach a und Benützen von (3.1.21) führt dann direkt zu der Impulserhaltung

$$p(t_1) = p(t_2). \quad (3.3.8)$$

Entsprechend kann man auch die Drehimpulserhaltung ableiten. Diese Beobachtungen gelten allgemein: wann immer ein dynamisches Problem eine Symmetrie besitzt, ist die Wirkung (ausgewertet auf der tatsächlichen Bahn) unter dieser Symmetrie invariant. Falls die Symmetrietransformationen eine kontinuierliche Gruppe bilden, kann man daraus, vermöge Differenzierung bezüglich der Gruppenparameter, eine Erhaltungsgrösse ableiten. [Man sollte jedoch erwähnen, dass Symmetrien nicht notwendigerweise eine kontinuierliche Gruppe bilden müssen. Beispiele diskreter Symmetrien sind Parität, Zeitumkehr, usw. In diesen Fällen führt die Invarianz der Wirkung nicht zu einer Erhaltungsgrösse.]

Diese Überlegungen lassen sich relativ leicht auf den Fall einer lokalen Feldtheorie übertragen.

3.3.1 Noether's Theorem

Für eine lokale Feldtheorie ist die Lagrangedichte eine lokale Funktion der Felder $\phi(x)$ und ihrer Ableitungen. Wir betrachten eine infinitesimale Transformation

$$\phi(x) \mapsto \phi'(x) = \phi(x) + \alpha \Delta\phi(x), \quad (3.3.9)$$

wobei α ein infinitesimaler Parameter ist, und $\Delta\phi$ die Variation der Feldkonfiguration beschreibt. Wir nennen diese Transformation eine *Symmetrie* falls sie die Bewegungsgleichungen invariant lässt, d.h. falls sie Lösungen der Euler-Lagrange Gleichungen auf Lösungen abbildet. Dies wird der Fall sein, falls die Wirkung unter dieser Transformation invariant bleibt. Es genügt jedoch auch, dass sich die Wirkung um einen Oberflächenterm ändert, da dieser für die Berechnung der Euler-Lagrange Gleichungen (d.h. der Bewegungsgleichungen) keine Rolle spielt. Damit also (3.3.9) eine Symmetrie definiert, muss die Lagrangedichte sich wie

$$\mathcal{L}(x) \mapsto \mathcal{L}(x) + \alpha \partial_\mu \mathcal{J}^\mu(x) \quad (3.3.10)$$

transformieren. Andererseits können wir die Variation von \mathcal{L} direkt berechnen:

$$\begin{aligned} \alpha \Delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} (\alpha \Delta \phi) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \partial_\mu (\alpha \Delta \phi) \\ &= \alpha \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \Delta \phi \right) + \alpha \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right] \Delta \phi. \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Unter Benützung der Euler-Lagrange Gleichungen verschwindet der zweite Term; der erste Term ist daher gleich $\alpha \partial_\mu \mathcal{J}^\mu$, und daher gilt

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \quad \text{mit} \quad j^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Delta \phi - \mathcal{J}^\mu. \quad (3.3.12)$$

[Falls die Symmetrie mehrere Felder transformiert, dann muss der erste Term in der Definition von j^μ durch eine Summe solcher Terme, je einen für jedes Feld, ersetzt werden.] Dieses Resultat besagt nun, dass der Strom $j^\mu(x)$ erhalten ist. Für jede kontinuierliche Symmetrie von \mathcal{L} erhalten wir einen solchen Erhaltungssatz; dies ist der Inhalt von *Noether's Theorem*.

Wir sollten bemerken, dass j^μ durch diese Ableitung nicht eindeutig festgelegt ist, da \mathcal{J} durch (3.3.10) nicht eindeutig bestimmt ist. Zum Beispiel können wir zu \mathcal{J}^μ immer eine Grösse $\partial_\nu A^{\mu\nu}$ dazuzugaddieren,

$$\mathcal{J}_A^\mu = \mathcal{J}^\mu + \partial_\nu A^{\mu\nu} \quad (3.3.13)$$

vorausgesetzt, dass $A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$, d.h. dass A anti-symmetrisch ist.

Man könnte sich deshalb fragen, ob der Strom j^μ nicht typischerweise trivial ist. Wie wir unten (an Hand von Beispielen sehen werden) ist dies nicht der Fall. Der Grund dafür liegt darin, dass wir annehmen, dass (3.3.10) unabhängig von den Euler-Lagrange Gleichungen gilt, d.h. unabhängig davon, ob ϕ eine Lösung der Gleichung ist oder nicht. Andererseits gilt die Erhaltung des Stromes j^μ nur falls ϕ die Feldgleichungen erfüllt, da wir in der Ableitung von $\partial_\mu j^\mu = 0$ die Feldgleichungen benützt haben. Daher ist im allgemeinen $\partial_\mu j^\mu \neq 0$ falls ϕ nicht die Feldgleichungen erfüllt; insbesondere ist daher im allgemeinen $j^\mu \neq 0$.

Jeder erhaltene Strom führt zu einer *Erhaltungsgrösse*: dazu betrachten wir

$$Q(t) = \int d^3\mathbf{x} j^0(\mathbf{x}, t). \quad (3.3.14)$$

Diese Ladung ist dann zeit-unabhängig, da

$$\dot{Q}(t) = \int d^3\mathbf{x} \partial_0 j^0(\mathbf{x}, t) = - \int d^3\mathbf{x} \partial_k j^k(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (3.3.15)$$

wobei wir das Divergenztheorem, sowie die Eigenschaft der Felder, im raumartigen Unendlichen schnell abzufallen, benützt haben.

Diese Erhaltungsgrösse ist übrigens von der Freiheit, zu \mathcal{J}^μ (und daher zu j^μ) einen Term $\partial_\nu A^{\mu\nu}$ wie oben hinzuzufügen, unabhängig. In der Tat berechnen wir

$$\begin{aligned} Q_A &= \int_{t=t_0} d^3\mathbf{x} j_A^0(t, \mathbf{x}) \\ &= \int_{t=t_0} d^3\mathbf{x} \left(j_A^0(t, \mathbf{x}) + \partial_i A^{0i}(t, \mathbf{x}) \right) \\ &= Q \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

wobei wir in der zweiten Zeile benützt haben, dass $A^{00} = 0$ wegen der Antisymmetrie von A . Der zweite Term in der zweiten Zeile kann daher vermittle des Divergenztheorems in einen Oberflächenterm umgeschrieben, der nach unserer generellen Annahme über das Abfallen der Felder im Unendlichen verschwindet.

Als ein einfaches Beispiel betrachten wir die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 - m^2 |\phi|^2, \quad (3.3.17)$$

wobei ϕ nun ein *komplexes* Feld ist. Die Feldgleichung ist, wie zuvor [vgl. (3.2.9)], die Klein-Gordon Gleichung. Diese Lagrangedichte ist invariant unter der Transformation

$$\phi(x) \mapsto e^{i\alpha} \phi(x). \quad (3.3.18)$$

Für infinitesimales α führt dies zu

$$\phi(x) \mapsto \phi(x) + i\alpha \phi(x), \quad (3.3.19)$$

d.h.

$$\Delta \phi = i\phi, \quad \Delta \phi^* = -i\phi^*. \quad (3.3.20)$$

[Wir betrachten hier ϕ und ϕ^* als unabhängige Felder; alternativ könnten wir auch den Real- und Imaginärteil von ϕ als unabhängige reelle Felder betrachten.] In diesem Fall ist also $\mathcal{J}^\mu = 0$ und der erhaltene Strom ist einfach

$$j^\mu(x) = i[(\partial^\mu \phi^*)\phi - \phi^*(\partial^\mu \phi)]. \quad (3.3.21)$$

Man kann leicht direkt nachrechnen (unter Benützung der Klein-Gordon Gleichung), dass j^μ tatsächlich erhalten ist.

3.3.2 Noether's Theorem für geometrische Transformationen

Noether's Theorem kann auch für geometrische Transformationen (Translationen, Rotationen, usw) angewendet werden. Zum Beispiel definiert die infinitesimale Translation

$$x^\mu \mapsto x^\mu - a^\mu \quad (3.3.22)$$

eine Transformation der Felder durch

$$\phi(x) \mapsto \phi(x + a) = \phi(x) + a^\mu \partial_\mu \phi(x). \quad (3.3.23)$$

[In diesem Fall ist also $\alpha \Delta \phi = a^\mu \partial_\mu \phi$.] Wir wollen annehmen, dass die Lagrangedichte von x nur vermöge der Abhängigkeit der Felder abhängt,

$$\mathcal{L}(x) \equiv \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)). \quad (3.3.24)$$

Dann transformiert sich \mathcal{L} unter der obigen infinitesimalen Transformation der Felder wie

$$\mathcal{L}(x) \mapsto \mathcal{L} + a^\mu \partial_\mu \mathcal{L} = \mathcal{L} + a^\nu \partial_\mu (\delta^\mu_\nu \mathcal{L}). \quad (3.3.25)$$

In diesem Fall ist daher \mathcal{J} nicht trivial. Wir können Translationen in den vier verschiedenen Raum-Zeit-Richtungen durchführen, und wir erhalten daher vier erhaltene Ströme (die durch den Index $\nu = 0, 1, 2, 3$ parametrisiert sind)

$$T^\mu{}_\nu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \partial_\nu \phi_i - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}, \quad (3.3.26)$$

wobei

$$\partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0. \quad (3.3.27)$$

$T^{\mu\nu}$ wird der *Energie-Impuls-Tensor* genannt. Wie zuvor folgt nun, dass die vier Grössen P^ν , die der gesamten Energie ($\nu = 0$) und dem Gesamtimpuls ($\nu = 1, 2, 3$) entsprechen,

$$P^\nu = \int d^3 \mathbf{x} T^{0\nu}(\mathbf{x}, t) \quad (3.3.28)$$

tatsächlich Erhaltungsgrössen sind.

Für den Fall der Klein-Gordon Theorie mit Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 \quad (3.3.29)$$

ist

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}m^2 \phi^2. \quad (3.3.30)$$

Die totale Energiedichte ist daher gleich

$$T^{00} = \frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2}m^2 \phi^2 = \mathcal{H} \quad (3.3.31)$$

und stimmt daher gerade mit der Hamiltondichte (3.2.12) überein. Die Impulsdichte ist andererseits

$$T^{0i} = -\partial_0 \phi \partial_i \phi, \quad (3.3.32)$$

und der gesamte physikalische Impuls ist

$$P^i = - \int d^3 \mathbf{x} \partial_0 \phi \partial_i \phi = \int d^3 \mathbf{x} \phi \partial_i \partial_0 \phi. \quad (3.3.33)$$

Eine entsprechende Analyse kann auch für die Drehimpulserhaltung durchgeführt werden. Dazu betrachten wir die infinitesimale Rotation

$$x^\mu \mapsto x^\mu + \omega^{\mu\nu} x_\nu, \quad (3.3.34)$$

wobei $\omega^{\mu\nu}$ eine anti-symmetrische infinitesimale Matrix ist. Die Felder $\phi_i(x)$ transformieren sich unter dieser Raumzeittransformation vermöge

$$\phi_i(x) \mapsto S_i{}^j(\omega) \phi_j(x^\mu - \omega^{\mu\nu} x_\nu), \quad (3.3.35)$$

wobei S_i^j die Darstellung der Rotationsgruppe bezeichnet, in der sich die Felder ϕ_i transformieren. Im einfachsten Fall eines skalaren Feldes ϕ ist S trivial, und wir finden

$$\phi(x) \mapsto \phi(x) - \omega^{\mu\nu} x_\nu \partial_\mu \phi. \quad (3.3.36)$$

Dann ist $\alpha \Delta \phi = -\omega^{\mu\nu} x_\nu \partial_\mu \phi$. Die Lagrangedichte transformiert sich unter Rotation trivial (d.h. mit $S = 1$), und dann gilt entsprechend

$$\mathcal{L}(x) \mapsto \mathcal{L}(x) - \omega^{\mu\nu} x_\nu \partial_\mu \mathcal{L}. \quad (3.3.37)$$

Der zugehörige erhaltene Strom ist daher

$$j^\mu = T^{\mu\nu} \omega_{\nu\rho} x^\rho = \frac{1}{2} \omega_{\nu\rho} (T^{\mu\nu} x^\rho - T^{\mu\rho} x^\nu), \quad (3.3.38)$$

wobei wir die Anti-Symmetrie von $\omega^{\mu\nu}$ benützt haben. Da dies für beliebige infinitesimale Rotation gelten muss, folgt, dass der verallgemeinerte Drehimpulstensor

$$J^{\mu,\nu\rho} = T^{\mu\nu} x^\rho - T^{\mu\rho} x^\nu \quad (3.3.39)$$

erhalten ist, $\partial_\mu J^{\mu,\nu\rho} = 0$. Explizit erhält man daraus

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu (T^{\mu\nu} x^\rho - T^{\mu\rho} x^\nu) \\ &= \partial_\mu T^{\mu\nu} x^\rho + T^{\rho\nu} - \partial_\mu T^{\mu\rho} x^\nu - T^{\nu\rho} \\ &= T^{\rho\nu} - T^{\nu\rho}. \end{aligned} \quad (3.3.40)$$

Insbesondere finden wir daher, dass $T^{\mu\nu}$ *symmetrisch* ist. Im allgemeinen Fall (wenn die Felder nicht einfach Skalarfelder sind), ist der Energie-Impulstensor nicht notwendigerweise symmetrisch; man kann ihn jedoch häufig so modifizieren (unter Benützung der in Kapitel 3.3 diskutierten Freiheit), dass er symmetrisch wird.

4 Dirac Gleichung und Elektrodynamik

Nachdem wir nun die Grundbegriffe der klassischen Feldtheorie eingeführt haben, wollen wir zwei klassische Feldtheorien diskutieren: die Dirac Theorie und die klassische Elektrodynamik.

4.1 Die Dirac Gleichung

Wie wir oben gesehen haben, führt die naive quantenmechanische Behandlung der Klein-Gordon Gleichung zu vielfältigen Schwierigkeiten. Eines der Probleme besteht darin, dass die Klein-Gordon Gleichung Lösungen mit positiver und negativer Energie gleichermaßen zulässt. Im wesentlichen kann dies darauf zurückgeführt werden, dass die Klein-Gordon Gleichung eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ist; dies hat Dirac dazu bewogen, nach einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung zu suchen, deren Quadrat gerade die Klein-Gordon Gleichung ist. Dazu machen wir den Ansatz (*Dirac Gleichung*)

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (4.1.1)$$

und versuchen γ^μ so zu finden, dass

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)(i\gamma^\nu \partial_\nu - m)\psi = (\square - m^2)\psi = 0 \quad (4.1.2)$$

ergibt, d.h. dass die Dirac-Gleichung (4.1.1) gerade die Klein-Gordon Gleichung impliziert. Wenn wir die linke Seite von (4.1.2) ausmultiplizieren und nochmals die Dirac Gleichung verwenden, erhalten wir

$$-\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu \psi - 2im\gamma^\mu \partial_\mu \psi + m^2\psi = -\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}\partial_\mu \partial_\nu \psi - m^2\psi = 0, \quad (4.1.3)$$

wobei $\{a, b\}$ den *Anti-kommutator*

$$\{a, b\} = ab + ba \quad (4.1.4)$$

bezeichnet. Dies reproduziert gerade die Klein-Gordon Gleichung, falls die γ^μ die *Dirac-Algebra* erfüllen

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (4.1.5)$$

Es ist daher klar, dass die γ^μ keine Zahlen sein können, aber man kann Matrizen finden, die diese Gleichung erfüllen. In vier Dimensionen (d.h. für $\mu = 0, 1, 2, 3$) ist eine besonders einfache Darstellung dieser Algebra die 4-dimensionale chirale (oder Weyl) Darstellung:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_0 \\ \sigma_0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\sigma_i \\ \sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.1.6)$$

wobei die σ_μ die zwei-dimensionalen *Pauli-Matrizen* sind

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.1.7)$$

Die Pauli-Matrizen sind dadurch charakterisiert, dass

$$(\sigma_\mu)^2 = \mathbf{1}_2, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad \sigma_i \sigma_j = i \epsilon_{ijk} \sigma_k, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.1.8)$$

Insbesondere produzieren sie die (definierende) Darstellung der Lie Algebra $SU(2)$, die durch spurlose, anti-hermitesche 2×2 Matrizen aufgespannt wird:

$$[t_a, t_b] = i \epsilon_{abc} t_c, \quad \text{wobei} \quad t_a = \frac{1}{2} \sigma_a, \quad a = 1, 2, 3. \quad (4.1.9)$$

Wegen der Relationen in (4.1.8) erfüllt der Anti-Kommutator dann gerade

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2 \delta^{ij}. \quad (4.1.10)$$

Diese Eigenschaften implizieren insbesondere, dass für $i, j = 1, 2, 3$

$$\{\gamma^i, \gamma^j\} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\sigma_i \\ \sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\sigma_j \\ \sigma_j & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\sigma_j \\ \sigma_j & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\sigma_i \\ \sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix} = -2 \delta^{ij} \mathbf{1}_4, \quad (4.1.11)$$

sowie

$$\{\gamma^0, \gamma^i\} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \{\gamma^0, \gamma^0\} = 2 \mathbf{1}_4. \quad (4.1.12)$$

Die Dirac Gleichung kann man mit Hilfe der ‘Feynman’ Notation kompakt schreiben als

$$(i\rlap{\not{D}} - m) \psi = 0, \quad \rlap{\not{D}} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu. \quad (4.1.13)$$

Da die γ^μ 4×4 Matrizen sind, muss auch ψ ein 4-dimensionaler (Spalten-)Vektor sein; er wird üblicherweise *Dirac Spinor* genannt. Die Dirac Gleichung kann aus der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi) - m \bar{\psi} \psi \equiv \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \quad (4.1.14)$$

als Feldgleichung abgeleitet werden. Hier ist $\bar{\psi}$ der (Reihen-)Vektor

$$\bar{\psi} \equiv (\gamma^0 \psi^*)^t \equiv \psi^\dagger \gamma^0, \quad (4.1.15)$$

wobei ψ^* der komplex konjugierte Vektor zu ψ ist, und wir in der zweiten Gleichung benützt haben, dass in der Weyl Darstellung γ^0 symmetrisch ist. Um aus dieser Lagrangedichte die Feldgleichungen abzuleiten, betrachten wir (wie schon zuvor im Fall des komplexen Skalarfeldes) ψ und $\bar{\psi}$ als unabhängige Variablen; die Variation nach $\bar{\psi}$ ergibt dann gerade die Dirac Gleichung

$$i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \psi = 0. \quad (4.1.16)$$

Andererseits führt die Variation nach ψ zu

$$-i \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu - m \bar{\psi} = 0. \quad (4.1.17)$$

Einer der Hauptgründe für die Konstruktion der Dirac Gleichung bestand darin, dass sie zu einer Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu = 0$ führt, für die $\rho = j^0$ die Rolle einer positiven Wahrscheinlichkeitsdichte spielen kann. Der Strom j^μ kann einfach durch

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (4.1.18)$$

definiert werden. Er erfüllt die Kontinuitätsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^\mu &= (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi \\ &= i m (\bar{\psi} \psi - \bar{\psi} \psi) = 0, \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

wobei wir die Dirac Gleichung, sowie (4.1.17) benützt haben. Die Null-Komponente des Stromes, j^0 , ist gerade

$$j^0 = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi \quad (4.1.20)$$

und ist daher gerade manifesterweise nicht-negativ. Die Dirac Gleichung ist also, zumindest was diese Frage anbelangt, als Schrödinger Gleichung interpretierbar.

4.1.1 Lösungen positiver and negativer Energie und Dirac's Löchertheorie

Obgleich die Dirac Gleichung nun eine Differentialgleichung erster Ordnung ist, hat sie Lösungen mit positiver und negativer Energie; die ursprüngliche Idee, dieses Problem durch die Betrachtung der Dirac Gleichung (statt der Klein Gordon Gleichung) zu vermeiden, ist daher nicht gelungen.

Der Einfachheit halber suchen wir Lösungen der Dirac Gleichung, die ebene Wellen beschreiben, d.h. Lösungen der Form

$$\begin{aligned} \psi^{(+)}(x) &= e^{-ik \cdot x} u(k), & \text{positive Energie,} \\ \psi^{(-)}(x) &= e^{ik \cdot x} v(k), & \text{negative Energie,} \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

mit $k^0 > 0$. Da die Dirac Gleichung die Klein Gordon Gleichung impliziert, wissen wir, dass $k^2 = m^2$. Der zeit-artige 4-er Vektor k^μ ist daher also gerade der Energie-Impulsvektor des Teilchens mit Masse m . Die Dirac Gleichung impliziert nun einfach, dass

$$(\not{k} - m) u(k) = 0, \quad (\not{k} + m) v(k) = 0, \quad (4.1.22)$$

wobei wir wiederum die Feynman Notation, $\not{k} \equiv \gamma^\mu k_\mu$ benützt haben. Falls $m > 0$ gilt im Ruhesystem des Teilchens $k^\mu = (m, 0, 0, 0)$, und die obigen Gleichungen reduzieren sich zu

$$(\gamma^0 - \mathbf{1}) u(m, \mathbf{0}) = 0, \quad (\gamma^0 + \mathbf{1}) v(m, \mathbf{0}) = 0. \quad (4.1.23)$$

Mit unseren Konventionen für γ^μ sind die allgemeinen Lösungen daher von der Form

$$u(m, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}, \quad v(m, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} \eta \\ -\eta \end{pmatrix}, \quad (4.1.24)$$

wobei ξ und η beliebige 2-dimensionale komplexe Vektoren sind. Für beliebige Impulse auf der Massenschale (also für beliebige k^μ mit $k^2 = m^2$) kann man mit Hilfe der Lorentzsymmetrie (die wir erst im nächsten Kapitel diskutieren werden), daraus $u(k)$ und $v(k)$ konstruieren. In jedem Fall ist es aus dem oben gesagten klar, dass die Dirac Gleichung gleichermassen Lösungen mit positiver und negativer Energie besitzt. Als relativistische Wellengleichung ist die Dirac-Gleichung daher nicht brauchbar, da die Existenz von Lösungen mit negativer Energie dazu führt, dass alle Zustände positiver Energie instabil sind. [Sie können unter Freigabe von Energie in einen Zustand niedrigerer Energie übergehen.]

Eine Lösung dieses Problems im Rahmen einer Vielteilchentheorie wurde von Dirac bereits 1930 vorgeschlagen. Obgleich diese Lösung nicht unsere schlussendliche Sicht der Dinge darstellt (da sie nur für fermionische Theorien anwendbar ist), ist es dennoch instruktiv, seine Argument zu erklären. (Insbesondere hat die zugrunde liegende Idee viele physikalisch wichtige Anwendungen, zum Beispiel für die Beschreibung von Elektronen in einem Metall.) Die Grundidee von Dirac ist einfach: *im Vakuum sind alle Zustände negativer Energie bereits besetzt!* Man spricht daher oft von dem sogenannten *Diracsee*.

Wegen des Pauliprinzips kann in jedem (fermionischen) Zustand nur ein Elektron sitzen; falls die Zustände negativer Energie bereits besetzt sind, ist es daher für ein Teilchen, das in einem Zustand positiver Energie sitzt, unmöglich, seine Energie abzugeben, um in einen Zustand negativer Energie überzugehen: die Zustände positiver Energie sind damit stabil.

Dieses Bild hat aber auch noch eine andere Konsequenz: wir können ein Elektron aus dem Diracsee in einen Zustand positiver Energie anregen (durch Energiezufuhr). Dabei entsteht ein ‘Loch’ im Diracsee (in das wiederum ein Elektron fallen könnte). Dieses Loch kann wiederum als Teilchen interpretiert werden: da es als Loch unter den Zuständen negativer Energie mit negativer Ladung (Elektronenladung) auftritt, scheint dieses Teilchen positive Energie und positive Ladung zu haben. Dieses Lochteilchen wird daher als Positron interpretiert.

Diese Theorie sagt daher insbesondere zwei interessante Prozesse voraus:

Ein Elektron (positiver Energie) fällt in ein freies Loch:
dies interpretieren wir als die Vernichtung eines Elektron-Positron Paares.

Ein Elektron wird (zum Beispiel durch Streuung mit einem Photonenstrahl, d.h. durch Licht) aus einem Zustand negativer Energie in einen Zustand positiver Energie angeregt; dabei entsteht ein Elektron und ein Loch, d.h. ein Elektron und ein Positron: wir interpretieren dies als die Erzeugung eines Elektron-Positron Paares durch Licht.

Auf Grund dieser Überlegungen postulierte daher Dirac die Existenz eines neuen Teilchens, des Positrons, das wenig später (1932) tatsächlich beobachtet wurde. Andererseits ist klar, dass diese Interpretation nicht im Rahmen einer gewöhnlichen quan-

tenmechanischen Einteilchentheorie möglich ist: die Theorie beschreibt Prozesse, bei denen Teilchen erzeugt und vernichtet werden, d.h. Prozesse, die nicht die Teilchenzahl erhalten!

In dieser Interpretation der Diracgleichung spielen nun auch Lösungen negativer Energie eine wichtige Rolle. Es scheint daher ein wenig voreilig zu sein, die Klein-Gordon Gleichung nur weil auch sie Lösungen negativer Energie besitzt, zu verwerfen. [In der Tat beschreibt sie (wie wir später sehen werden) skalare Teilchen mit Spin Null (zum Beispiel Pionen).] Andererseits können wir natürlich nicht das Konzept der Löcher direkt auf die Klein-Gordon Gleichung übertragen, da das Paulirpinzip (das nur für Fermionen gilt) dabei eine wichtige Rolle spielt. Jedoch ist das Konzept des unendlich stark geladenen, nicht observablen Diracsees selbst für Fermionen ein wenig komisch. Um eine befriedigende Beschreibung zu finden, müssen wir eine echte Vielteilchentheorie betrachten; dies wird durch die sogenannte ‘zweite Quantisierung’ erreicht, d.h. durch die Einführung von Quantenfelder, die Teilchen und Anti-Teilchen erzeugen und vernichten können.

4.1.2 Die Majorana Bedingung

Um aus dem komplexen Dirac-Feld ein reelles zu erhalten, ist eine Realitätsbedingung zu stellen, d.h. das Analogon der Realitätsbedingung $\bar{\phi} = \phi$ im Fall des komplexen Skalarfeldes. Diese Bedingung muss die Dirac Gleichung und (4.1.17) ineinander überführen. Eine konsistente Realitätsbedingung ist

$$\psi = i \gamma^2 \gamma^0 \bar{\psi}^t. \quad (4.1.25)$$

Falls man diese Gleichung in die Dirac Gleichung einsetzt, erhält man nämlich

$$-\gamma^\mu \gamma^2 \gamma^0 \partial_\mu \bar{\psi}^t - i m \gamma^2 \gamma^0 \bar{\psi}^t = 0. \quad (4.1.26)$$

Die transponierte Gleichung ist dann (nach Multiplikation mit i)

$$-i \partial_\mu \bar{\psi} (\gamma^\mu \gamma^2 \gamma^0)^t + m \bar{\psi} (\gamma^2 \gamma^0)^t = 0. \quad (4.1.27)$$

Schliesslich multipliziert man von rechts mit $(\gamma^0 \gamma^2)^t$ und erhält dann

$$-i \partial_\mu \bar{\psi} (\gamma^\mu \gamma^2 \gamma^0)^t (\gamma^0 \gamma^2)^t - m \bar{\psi} = 0. \quad (4.1.28)$$

Man rechnet leicht nach, dass

$$(\gamma^\mu \gamma^2 \gamma^0)^t (\gamma^0 \gamma^2)^t = \gamma^\mu \quad (4.1.29)$$

für alle μ . Damit erhält man gerade (4.1.17).

Die Realitätsbedingung kann besonders einfach formuliert werden, falls die *Majorana Darstellung* der Dirac Algebra benützt wird

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_2 \\ \sigma_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & i\sigma_3 \end{pmatrix}, \quad (4.1.30)$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} -i\sigma_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -i\sigma_1 \end{pmatrix}. \quad (4.1.31)$$

Man rechnet leicht nach, dass auch diese Darstellung die Dirac-Algebra erfüllt. [Tatsächlich sind alle 4-dimensionalen Darstellungen der Dirac-Algebra zueinander isomorph; insbesondere gibt es daher eine invertierbare 4×4 Matrix S so dass

$$\gamma_{\text{Majorana}}^\mu = S \gamma_{\text{Weyl}}^\mu S^{-1}.$$

Im vorliegenden Fall ist diese Matrix zum Beispiel gerade

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & i \\ i & 1 & -i & 1 \\ -1 & -i & 1 & -i \\ i & -1 & i & 1 \end{pmatrix}.]$$

Die Majorana Darstellung ist dadurch ausgezeichnet, dass alle γ^μ Matrizen *rein imaginär* sind. Insbesondere ist dann die Dirac Gleichung reell. In dieser Basis ist dann die Realitätsbedingung einfach

$$\psi = \psi^*. \quad (4.1.32)$$

Dann ist nämlich

$$\bar{\psi} = (\gamma^0 \psi^*)^t = (\gamma^0 \psi)^t. \quad (4.1.33)$$

Einsetzen in (4.1.17) ergibt

$$-i \partial_\mu (\gamma^0 \psi)^t \gamma^\mu - m (\gamma^0 \psi)^t = 0, \quad (4.1.34)$$

und die Transponierte dieser Gleichung ist dann (nach Multiplikation mit γ^0)

$$-i \gamma^0 (\gamma^\mu)^t \gamma^0 \partial_\mu \psi - m \psi = 0. \quad (4.1.35)$$

Man rechnet leicht nach, dass in der Majorana Darstellung

$$\gamma^0 (\gamma^\mu)^t \gamma^0 = -\gamma^\mu, \quad (4.1.36)$$

und dann ist (4.1.35) in der Tat gerade die Dirac Gleichung.

4.2 Elektrodynamik

Schliesslich wollen wir uns noch kurz die Elektrodynamik (als klassische Feldtheorie) in Erinnerung rufen. Die homogenen (mikroskopischen) Maxwell Gleichungen haben die Form

$$\text{div} \mathbf{B} = 0, \quad \text{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (4.2.1)$$

wobei \mathbf{E} und \mathbf{B} das elektrische und magnetische Feld sind. [Wir haben hier, wie schon oben erwähnt, $c = 1$ gesetzt.] Diese homogenen Maxwell Gleichungen sind automatisch

gelöst, falls wir die elektrischen und magnetischen Felder durch die elektromagnetischen Potentiale Φ und \mathbf{A} vermöge

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\text{grad}\Phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (4.2.2)$$

ausdrücken. Diese sind nur bis auf die Eichtransformation

$$\Phi \mapsto \Phi + \frac{\partial\chi}{\partial t}, \quad \mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} - \text{grad}\chi \quad (4.2.3)$$

bestimmt, wobei χ eine beliebige skalare Funktion ist. Diese Eichfreiheit kann durch Festlegen einer geeigneten Eichbedingung (z.B. $\text{div}\mathbf{A} = 0$ [Coulomb Eichung] oder $\text{div}\mathbf{A} + \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0$ [Lorentz Eichung]) im wesentlichen fixiert werden.

Die inhomogenen Maxwell Gleichungen sind

$$\text{div}\mathbf{E} = \rho, \quad \text{rot}\mathbf{B} - \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j}, \quad (4.2.4)$$

wobei ρ die Ladungsdichte, und \mathbf{j} die Stromdichte ist. [Wir benützen hier die Einheiten, bei denen der Faktor 4π im Coulomb Gesetz auftritt, nicht in den Maxwell Gleichungen; in den Konventionen meiner Elektrodynamik Vorlesung entspricht dies $k = 1/4\pi$.] Ausgedrückt durch die Potentiale lauten diese

$$\square\Phi - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \text{div}\mathbf{A} \right) = \rho, \quad (4.2.5)$$

$$\square\mathbf{A} + \text{grad} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \text{div}\mathbf{A} \right) = \mathbf{j}. \quad (4.2.6)$$

Wegen der Eichfreiheit (4.2.3) sind die Lösungen $\Phi(\mathbf{x}, t)$ und $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ nicht eindeutig bestimmt durch ihre Anfangswerte bei $t = 0$ und die ihrer zeitlichen Ableitungen. Dies passt damit zusammen, dass (4.2.5) keine Bewegungsgleichung ist (die zeitlichen Ableitungen von Φ heben sich weg), sondern bloss eine Nebenbedingung, die wegen (4.2.6) erfüllt ist, sobald sie es bei $t = 0$ ist.

Um die Maxwell Gleichungen Lorentz invariant zu formulieren, kombinieren wir Φ und \mathbf{A} in das 4-er Potential

$$A_\mu = (\Phi, -\mathbf{A}), \quad A^\mu = (\Phi, \mathbf{A}), \quad (4.2.7)$$

und führen den Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu} = (dA)_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (4.2.8)$$

ein. [Hier ist $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Explizit ist $F_{\mu\nu}$ einfach

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2.9)$$

Insbesondere ist der Feldstärketensor unter den Eichtransformationen (4.2.3) invariant.] Die homogenen Maxwell Gleichungen sind dann einfach

$$(dF)_{\mu\nu\sigma} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\sigma} F_{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} F_{\sigma\mu} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} F_{\nu\sigma} = 0. \quad (4.2.10)$$

Diese Gleichungen sind offensichtlich erfüllt, falls $F = dA$, da $dF = ddA = 0$ wegen $dd = 0$. Die inhomogenen Maxwell Gleichungen sind andererseits

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (4.2.11)$$

wobei j^ν der 4-er Strom ist, der durch

$$j^\nu = (\rho, \mathbf{j}) \quad (4.2.12)$$

definiert ist. Die Kontinuitätsgleichung (die die Erhaltung der Ladung beschreibt) ist dann einfach

$$\partial_\nu j^\nu = 0. \quad (4.2.13)$$

Sie ist eine Folge der inhomogenen Maxwell Gleichungen, da

$$\partial_\nu j^\nu = \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (4.2.14)$$

und da F ein anti-symmetrischer Tensor ist. Die oben erwähnte Lorentz Eichung ist kovariant, da man sie einfach als $\partial_\mu A^\mu = 0$ schreiben kann; die Coulomb Eichung hingegen hat keine direkte 4-er Interpretation.

Die Maxwell Gleichungen können als Feldgleichungen aus der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu \quad (4.2.15)$$

abgeleitet werden. Hier wird die Lagrangedichte als Funktion des Feldes \mathbf{A} aufgefasst, und j_ν ist vorgegeben; die Lagrangedichte hängt deshalb auch explizit von x (vermöge der x -Abhängigkeit von j_ν) ab. In der Tat berechnet man

$$\pi^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu} \quad (4.2.16)$$

und

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -j^\nu. \quad (4.2.17)$$

Die Euler Lagrange Gleichungen sind daher gerade

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \partial_\mu \pi^{\mu\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -\partial_\mu F^{\mu\nu} + j^\nu, \quad (4.2.18)$$

und reproduzieren deshalb die (inhomogenen) Maxwell Gleichungen. [Durch Einführung des 4-er Potentials sind die homogenen Maxwell Gleichungen ja automatisch gelöst.]

Die zu A_ν kanonische konjugierte Impulsdichte ist

$$\pi^{0\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\nu)} = -F^{0\nu}. \quad (4.2.19)$$

Diese verschwindet für $\nu = 0$, d.h. $\pi^{00} = 0$. Man kann daher $\partial_0 A_0$ nicht durch die zu A_0 konjugierte Impulsdichte π^{00} ausdrücken; dies ist eine Folge davon, dass nicht alle vier Komponenten des 4-er Potentials dynamische Grössen sind, da A_ν nur bis auf Eichtransformationen (4.2.3) eindeutig bestimmt ist. [Zum Beispiel gilt unter der Eichtransformation $A_\nu \mapsto A_\nu - \partial_\nu \chi$, wobei $\chi \equiv \chi(t)$ ist, $\partial_0 A_0 \mapsto \partial_0 A_0 - \dot{\chi}$, während alle anderen $\partial_\mu A_\nu$ invariant bleiben; der Wert von $\partial_0 A_0$ kann daher durch eine geeignete Eichtransformation beliebig gewählt werden.]

Wählt man jedoch (für $j_\nu = 0$, d.h. falls keine externen Ladungen vorgegeben sind) die Coulomb Eichung $A^0 = 0$, $\text{div} \mathbf{A} = 0$ um diese Eichfreiheit zu eliminieren, dann sind die verbleibenden dynamischen Felder A^i , $i = 1, 2, 3$. Die zu A^i kanonisch konjugierte Impulsdichte ist

$$\pi_k = F^{0k} = -E_k. \quad (4.2.20)$$

Da

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2), \quad (4.2.21)$$

folgt dann für die Hamiltondichte

$$\mathcal{H} = -\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{A}} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2). \quad (4.2.22)$$

Dies stimmt dann gerade mit der aus der Elektrodynamik bekannten Energiedichte des elektromagnetischen Feldes überein.

Manchmal ist es auch nützlich, die Eichung durch einen eichfixierenden Term in der Lagrangedichte festzulegen. Dazu betrachtet man (für $j^\nu = 0$) die nicht eich-invariante Lagrangedichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} (\partial_\nu A^\nu)^2 \\ &= -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu A^\nu) + \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\nu A^\mu) - \frac{\lambda}{2} (\partial_\nu A^\nu) (\partial_\mu A^\mu). \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

Die kanonischen Impulse sind dann

$$\pi_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} = -F_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} \partial_\rho A^\rho, \quad (4.2.24)$$

und die Euler-Lagrange Gleichung daher

$$-\partial^\mu F_{\mu\nu} - \lambda \partial_\nu (\partial_\rho A^\rho) = 0. \quad (4.2.25)$$

Da $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ist diese Gleichung daher zu

$$\square A^\nu - (1 - \lambda) \partial^\nu (\partial_\rho A^\rho) = 0 \quad (4.2.26)$$

äquivalent. Ableiten dieser Gleichung nach ∂_ν ergibt dann $\lambda \square (\partial_\nu A^\nu) = 0$; für $\lambda \neq 0$ gilt daher die (Lorentz-invariante) Lorentz-Eichung

$$\partial_\rho A^\rho = 0 \quad (4.2.27)$$

vorausgesetzt, dass

$$\partial_\rho A^\rho|_{t=0} = 0 \quad \text{und} \quad \partial_0 (\partial_\rho A^\rho)|_{t=0} = 0. \quad (4.2.28)$$

Den zu λ -proportionalen Zusatzterm in der Lagrangedichte nennt man deshalb einen *eich-fixierenden Term*. [Wie wir später sehen werden, ist es jedoch nicht so einfach, diese Eichfixierung auch in der Quantentheorie durchzuführen.] Falls die Lorentz-Eichung gilt, dann reduzieren sich die Euler-Lagrange Gleichungen gerade wiederum auf die Maxwell Gleichungen. Im Gegensatz zu der Lagrangedichte ohne eichfixierenden Term ist nun jedoch

$$\pi_\nu \equiv \pi_{0\nu} = -F_{0\nu} - \lambda \delta_{0\nu} (\partial_\rho A^\rho), \quad (4.2.29)$$

und daher

$$\pi_0 = -\lambda (\dot{\Phi} + \text{div} \mathbf{A}), \quad \pi_k = -\dot{A}_k + \partial_k \Phi, \quad (4.2.30)$$

was für $\lambda \neq 0$ nach $(\dot{\Phi}, \dot{A}_k)$ auflösbar ist und daher direkt eine Hamilton'sche Formulierung erlaubt.

Von besonderer Bedeutung ist der Fall $\lambda = 1$, der *Feynman Eichung* genannt wird. Wegen

$$\partial_\mu (\partial^\nu A^\mu - g^{\mu\nu} \partial_\rho A^\rho) = 0 \quad (4.2.31)$$

sind die letzten beiden Term in (4.2.23) für $\lambda = 1$ gerade gleich der Divergenz

$$\frac{1}{2} \partial_\mu [A_\nu (\partial^\nu A^\mu - g^{\mu\nu} \partial_\rho A^\rho)]. \quad (4.2.32)$$

Damit ist die Lagrangedichte zu der von Fermi betrachteten Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu A^\nu) \quad (4.2.33)$$

äquivalent (da sie sich nur um einen Randterm unterscheiden, der die Feldgleichungen nicht modifiziert). Diese Lagrangedichte ist dann gerade die Lagrangedichte eines masselosen Skalarfeldes für jede Komponente A^μ , ($\mu = 0, 1, 2, 3$). Allerdings ist noch die Eichbedingung $\partial_\nu A^\nu = 0$ zu implementieren.

Für das elektromagnetische Feld mit $j_\nu = 0$ ist der kanonische Energieimpulstensor

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= -F^\mu{}_\sigma \partial^\nu A^\sigma - \mathcal{L} g^{\mu\nu} \\ &= -F^\mu{}_\sigma \partial^\nu A^\sigma + \frac{1}{4} F_{\sigma\rho} F^{\sigma\rho} g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.2.34)$$

Er ist weder symmetrisch noch eichinvariant, im Unterschied zu dem aus der Elektrodynamik bekannten Energie-Impulstensor; diesbezüglich fehlt ihm der Term

$$F^\mu{}_\sigma \partial^\sigma A^\nu = F^{\mu\sigma} \partial_\sigma A^\nu = \partial_\sigma (F^{\mu\sigma} A^\nu), \quad (4.2.35)$$

wobei die letzte Gleichung die Maxwell Gleichung $\partial_\sigma F^{\mu\sigma} = 0$ voraussetzt. Da der Zusatzterm eine totale Ableitung ist, bleibt der Unterschied ohne Konsequenzen; insbesondere liefert (4.2.34) dieselben, aus der Elektrodynamik bekannten, Erhaltungsgrößen.

5 Lorentzsymmetrie

Bevor wir mit der Quantisierung dieser verschiedenen Feldtheorien beginnen wollen, sollten wir uns zunächst über die Lorentz-Transformationseigenschaften der Felder Klarheit verschaffen.

5.1 Die quantenmechanische Lorentzgruppe

In der Quantenmechanik haben wir gesehen, dass sich manche Teilchen (nämlich die Fermionen) tatsächlich nicht in Darstellungen der räumlichen Drehgruppe transformieren, sondern in Darstellungen ihrer zweifachen Überlagerung $SU(2)$

$$SU(2)/\{\pm 1\} \simeq SO(3). \quad (5.1.1)$$

Hierbei ist $SU(2)$ die Gruppe der unitären (komplexen) 2×2 Matrizen mit Determinante $+1$; jedes Element von $SU(2)$ kann als

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad \text{wobei} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (5.1.2)$$

geschrieben werden. Um die Relation zwischen $SU(2)$ und $SO(3)$ zu verstehen, definieren wir für jeden Vektor x im Minkowski-Raum die Matrix

$$\tilde{x} = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}, \quad (5.1.3)$$

wobei σ_μ die oben eingeführten Pauli-Matrizen sind. Diese Abbildung ist invertierbar, da

$$x^\mu = \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{x} \sigma_\mu), \quad (5.1.4)$$

wie man leicht nachrechnet. [Dazu benützt man die Definition (5.1.3), sowie die Eigenschaften der Pauli-Matrizen (4.1.10).] Falls x^μ ein reeller Vektor ist, dann ist \tilde{x} eine *hermitesche Matrix*; umgekehrt führt jede hermitesche Matrix \tilde{x} vermöge (5.1.4) zu einem reellen 4-er Vektor. Schliesslich rechnet man leicht nach, dass die Determinante von \tilde{x} gerade mit dem Lorentz-invarianten Skalarprodukt von x übereinstimmt,

$$\det \tilde{x} = x_\mu x^\mu. \quad (5.1.5)$$

Für jedes Element A von $SU(2)$ betrachten wir nun die Abbildung

$$\tilde{x} \mapsto \tilde{x}' = A \tilde{x} A^\dagger. \quad (5.1.6)$$

Als Abbildung von $x^\mu \mapsto (x')^\mu$ aufgefasst, ist dies eine lineare Abbildung, die reelle 4-er Vektoren auf reelle 4-er Vektoren abbildet. [Falls \tilde{x} hermitesch ist, dann ist auch $A \tilde{x} A^\dagger$ hermitesch.] Wegen (5.1.5) lässt diese Transformation das Lorentz-invariante Skalarprodukt invariant, und definiert daher eine Lorentztransformation. Schliesslich

ist es wegen (5.1.3) klar, dass $(x')^0 = x^0$, und daher muss die zugehörige Lorentztransformation gerade ein Element in $SO(3)$ sein. Diese Konstruktion definiert daher einen Gruppenhomomorphism

$$SU(2) \rightarrow SO(3). \quad (5.1.7)$$

Es ist relativ offensichtlich, dass der Kern dieser Transformation gerade $\pm \mathbf{1}_2 \in SU(2)$ ist. Ferner ist der Homomorphismus surjektiv, und daher haben wir (5.1.1).

In der Quantenfeldtheorie interessieren wir uns nicht nur für Darstellungen der räumlichen Drehgruppe, sondern für Darstellungen der relativistischen Lorentzgruppe. Wie in der Quantenmechanik erwarten wir jedoch, dass sich manche Teilchen (nämlich die Fermionen) nur in Darstellungen einer geeigneten Überlagerung transformieren. Wir definieren daher die *quantenmechanische Lorentzgruppe* durch

$$SL(2, \mathbb{C}) = \{A \text{ komplexe } 2 \times 2 \text{ Matrix mit } \det A = 1\}. \quad (5.1.8)$$

Diese Gruppe enthält natürlich $SU(2)$ als Untergruppe. Sie wirkt auf x vermöge

$$\tilde{x} \mapsto \tilde{x}' = A \tilde{x} A^\dagger. \quad (5.1.9)$$

Wegen der Multiplikationseigenschaft der Determinanten ist offensichtlich, dass

$$\det(\tilde{x}') = \det(\tilde{x});$$

daher definiert die durch (5.1.9) definierte Transformation gerade eine Lorentztransformation. Wie zuvor im Fall der quantenmechanischen Drehgruppe ist natürlich auch die quantenmechanische Lorentzgruppe eine Überlagerung der üblichen Lorentzgruppe. In der Tat sieht man leicht, dass $A \in SL(2, \mathbb{C})$ genau dann auf jedem x trivial wirkt, falls $A = \pm \mathbf{1}_2$. Die übliche Lorentzgruppe ist daher gerade

$$L_+^\uparrow = SL(2, \mathbb{C}) / \mathbb{Z}_2. \quad (5.1.10)$$

Genauer gesagt taucht auf der linken Seite hier die *orthochrone eigentliche Lorentzgruppe* auf, d.h. die Untergruppe der Lorentztransformationen, für die

$$L_+^\uparrow = \{\Lambda \in L \mid \Lambda^0_0 \geq 1, \det \Lambda = +1\}. \quad (5.1.11)$$

[Dies ist einfach eine Folge davon, dass die Gruppe $SL(2, \mathbb{C})$ zusammenhängend ist, d.h. für jedes Element in $A \in SL(2, \mathbb{C})$ gibt es eine stetige Abbildung $[0, 1] \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$, $t \mapsto A(t)$ so dass $A(0) = \mathbf{1}$ und $A(1) = A$. Daher erhält man unter der obigen Quotientenabbildung auch eine Zusammenhangskomponente der Lorentzgruppe; da diese die Identität enthält, kann es sich dabei nur um L_+^\uparrow handeln.]

Im folgenden ist es nützlich, neben der hermiteschen Matrix \tilde{x} noch eine verwandte (hermitesche) Matrix \hat{x} einzuführen, die durch

$$\hat{x} = \epsilon \tilde{x}^t \epsilon^t \quad (5.1.12)$$

definiert wird, wobei ϵ die 2×2 Matrix

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\epsilon^{-1} \quad (5.1.13)$$

ist. Explizit gilt dann

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} x^0 - x^3 & -x^1 - ix^2 \\ -x^1 + ix^2 & x^0 + x^3 \end{pmatrix} \equiv \sum_{\mu=0}^3 x^\mu \hat{\sigma}_\mu \quad (5.1.14)$$

wobei wir $\hat{\sigma}_\mu$ durch

$$\hat{\sigma}_\mu = \epsilon \sigma_\mu \epsilon^t \quad (5.1.15)$$

definiert haben. [Daher ist $\hat{\sigma}_0 = \sigma_0$ und $\hat{\sigma}_i = -\sigma_i$, d.h. formal ist $\hat{\sigma}_\mu = \sigma^\mu$.]

Wie wir oben gesehen haben definiert jedes Element $A \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ eine Lorentztransformation vermöge der Wirkung (5.1.9) auf \tilde{x} . Man rechnet leicht nach, dass für jede reguläre 2×2 Matrix A gilt

$$(\det A) A^{-1} = \epsilon A^t \epsilon^t. \quad (5.1.16)$$

[Dies folgt einfach daraus, dass für jede solche Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{die Inverse durch} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

gegeben ist.] Die durch A definierte Lorentztransformation transformiert daher \hat{x} als

$$\begin{aligned} \hat{x} \mapsto \hat{x}' &= \epsilon (A \tilde{x} A^\dagger)^t \epsilon^t \\ &= \epsilon (A^\dagger)^t \tilde{x}^t A^t \epsilon^t \\ &= (A^\dagger)^{-1} \epsilon \tilde{x}^t \epsilon^t A^{-1} \\ &= (A^\dagger)^{-1} \hat{x} A^{-1}, \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

wobei wir benützt haben, dass für $A \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ $\det A = 1$. Im Vergleich zu (5.1.9) taucht in (5.1.17) gerade $(A^\dagger)^{-1}$ an Stelle von A auf.

Natürlich hat die quantenmechanische Lorentzgruppe abgesehen von der üblichen 4-dimensionalen (reellen) Darstellung auf Vektoren des Minkowskiraumes noch andere Darstellungen. Insbesondere definieren die Abbildungen

$$v \mapsto v' = A v, \quad v \mapsto v' = A^* v, \quad \text{und} \quad v \mapsto v' = A^{\dagger^{-1}} v, \quad (5.1.18)$$

wobei v ein Vektor in \mathbb{C}^2 ist, zwei-dimensionale komplexe Darstellungen. [Hier bezeichnet A^* die komplex konjugierte (aber nicht transponierte) Matrix, und A^\dagger ist die komplex konjugierte transponierte Matrix. Es ist hervorzuheben, dass die letzte Abbildung eine Darstellung ist, da

$$[(AB)^\dagger]^{-1} = [B^\dagger A^\dagger]^{-1} = (A^\dagger)^{-1} (B^\dagger)^{-1}.$$

Wir sollten auch darauf hinweisen, dass diese Darstellung gerade in der Transformation von \hat{x} auftritt.] Schliesslich folgt aus der Identität (5.1.16) dass die zweite und dritte Darstellung von (5.1.18) äquivalent zueinander sind.

5.2 Kovarianz der Klein-Gordon Gleichung

Die Klein-Gordon Gleichung (3.2.10) sowie ihre zugehörige Lagrangedichte (3.2.9) sind relativ offensichtlich Lorentz invariant: unter der Lorentztransformation Λ , die auf 4-er Vektoren als

$$x^\mu \mapsto x'^\mu \equiv (\Lambda x)^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (5.2.1)$$

wirkt, transformiert sich das Feld ϕ einfach als

$$U(\Lambda) \phi(x) U(\Lambda)^{-1} = \phi(\Lambda^{-1} x). \quad (5.2.2)$$

[Das Auftreten der inversen Lorentztransformation im Argument von ϕ ist dafür nötig, dass (5.2.2) eine Darstellung der Lorentzgruppe definiert:

$$\begin{aligned} U(\Lambda_1 \Lambda_2) \phi(x) U(\Lambda_1 \Lambda_2)^{-1} &= \phi(\Lambda_2^{-1} \Lambda_1^{-1} x) \\ &= U(\Lambda_1) \phi(\Lambda_2^{-1} x) U(\Lambda_1)^{-1} \\ &= U(\Lambda_1) U(\Lambda_2) \phi(x) U(\Lambda_2)^{-1} U(\Lambda_1)^{-1}. \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Wir haben ausserdem die Notation $U(\Lambda)$ eingeführt, um deutlich zu machen, dass es sich um eine spezifische Darstellung der Lorentzgruppe handelt.]

Es ist dann klar, dass

$$U(\Lambda) \mathcal{L}(x) U(\Lambda)^{-1} = \mathcal{L}(\Lambda^{-1} x). \quad (5.2.4)$$

Da das Mass d^4x Lorentz-invariant ist, ist daher die Wirkung S unter Lorentztransformationen invariant. Insbesondere hat daher die Klein-Gordon Gleichung dieselbe Form in allen Inertialsystemen. Natürlich kann man das auch direkt nachprüfen. Dazu erinnern wir uns daran, dass

$$\partial'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu \quad (5.2.5)$$

wobei

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad x^\nu = \Lambda_\mu{}^\nu x'^\mu, \quad (5.2.6)$$

d.h. die beiden Matrizen $\Lambda^\mu{}_\nu$ und $\Lambda_\mu{}^\nu$ sind invers zueinander,

$$\Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\rho{}^\nu = \delta_\mu^\rho, \quad \Lambda_\mu{}^\nu \Lambda^\mu{}_\rho = \delta_\rho^\nu. \quad (5.2.7)$$

[Diese Notation ist mit den üblichen Regeln bezüglich des Hebens und Senkens von Indizes kompatibel:

$$\Lambda_\mu{}^\nu = g_{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \Lambda^\rho{}_\sigma. \quad (5.2.8)$$

Da Lorentztransformationen die Minkowski Metrik invariant lassen, gilt dann nämlich in der Tat

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\rho{}^\nu &= \Lambda^\mu{}_\nu g_{\rho\sigma} g^{\nu\tau} \Lambda^\sigma{}_\tau \\ &= g_{\rho\sigma} g^{\mu\sigma} = \delta_\rho^\mu. \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

Entsprechend zeigt man, dass

$$\partial'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} \partial^{\nu}, \quad (5.2.10)$$

und daher gilt dann

$$\partial'_{\mu} \partial'^{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\nu} \Lambda^{\mu}_{\rho} \partial_{\nu} \partial^{\rho} = \partial_{\nu} \partial^{\nu}, \quad (5.2.11)$$

d.h. der d'Alembert Operator ist in der Tat Lorentz-invariant. Gleiches gilt natürlich auch für die Masse m , und daher hat die Klein-Gordon Gleichung in allen Bezugssystemen dieselbe Form.

Die Kovarianz der Elektrodynamik ist mehr oder weniger offensichtlich, sobald sie in der 4-er Schreibweise (wie oben) formuliert ist. Dabei transformieren sich oben und unten stehende Indizes gerade wie x^{μ} bzw. x_{ν} ; zum Beispiel transformiert sich der Feldstärketensor wie

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} F^{\rho\sigma}, \quad F'_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}^{\rho} \Lambda_{\nu}^{\sigma} F_{\rho\sigma} \quad (5.2.12)$$

und daher ist die Lagrangedichte $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ Lorentz-invariant. Entsprechend zeigt man auch, dass die Bewegungsgleichungen (die Maxwell Gleichungen) Lorentz kovariant sind. [Diese Dinge wurden bereits im Detail in der Elektrodynamik Vorlesung besprochen, und müssen hier nicht wiederholt werden.]

5.3 Kovarianz der Dirac Gleichung

Die Analyse für den Fall der Dirac Gleichung ist komplizierter (aber auch interessanter). Wir wollen zeigen, dass die Dirac Gleichung in allen Bezugssystemen dieselbe Form besitzt (d.h. Lorentz kovariant ist), falls sich der Dirac Spinor $\psi(x)$ in der richtigen Weise unter Lorentztransformationen transformiert. Im folgenden wollen wir annehmen, dass die Dirac Gleichung Lorentz kovariant ist, und dadurch das Transformationsverhalten des Dirac Spinors ableiten. Seien x und x' wie oben definiert. In beiden Bezugssystemen soll die Dirac Gleichung gelten, d.h.

$$\begin{aligned} i \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi(x) - m \psi(x) &= 0 \\ i \gamma^{\mu} \partial'_{\mu} \psi'(x') - m \psi'(x') &= 0. \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

Wir machen den Ansatz, dass sich $\psi(x)$ unter der Lorentztransformation Λ wie

$$\psi'(x') = S(\Lambda) \psi(x) \quad (5.3.2)$$

transformiert, wobei $S(\Lambda)$ eine 4-dimensionale (invertierbare) Matrix ist, die auf die vier Indizes des Dirac Spinors wirkt. [Damit dieses Transformationsverhalten konsistent ist, muss $S(\Lambda)$ eine Darstellung der Lorentzgruppe (oder ihrer geeigneten Überlagerung) definieren. In der Notation der Diskussion zu Beginn dieses Kapitels schreiben wir (5.3.2) als

$$U(\Lambda) \psi(x) U(\Lambda)^{-1} = \psi'(x) = S(\Lambda) \psi(\Lambda^{-1}x).] \quad (5.3.3)$$

Einsetzen in (5.3.1) führt dann zu

$$i \gamma^\mu \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu S(\Lambda) \psi(x) - m S(\Lambda) \psi(x) = 0. \quad (5.3.4)$$

Dies stimmt mit der Dirac Gleichung im x -Koordinatensystem überein, falls

$$S(\Lambda)^{-1} \gamma^\mu S(\Lambda) \Lambda_\mu{}^\nu = \gamma^\nu, \quad (5.3.5)$$

bzw.

$$S(\Lambda) \gamma^\nu S(\Lambda)^{-1} = \Lambda_\mu{}^\nu \gamma^\mu. \quad (5.3.6)$$

5.3.1 Die Konstruktion in der Weyl Darstellung

Eine Lösung kann wie folgt konstruiert werden. Zunächst beobachten wir, dass

$$\tilde{x}' = x'^\nu \sigma_\nu = \Lambda^\nu{}_\mu x^\mu \sigma_\nu = x^\mu A \sigma_\mu A^\dagger, \quad (5.3.7)$$

wobei Λ die zu $A \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ gehörende Lorentztransformation ist. Diese Gleichung impliziert daher, dass

$$A \sigma_\mu A^\dagger = \Lambda^\nu{}_\mu \sigma_\nu. \quad (5.3.8)$$

Durch Heben und Senken der Indizes mit Hilfe der (Lorentz-invarianten) Metrik folgt ausserdem

$$A \sigma^\nu A^\dagger = \Lambda_\mu{}^\nu \sigma^\mu. \quad (5.3.9)$$

Die entsprechende Analyse für den Fall von \hat{x} führt mit denselben Argumenten zu

$$(A^\dagger)^{-1} \hat{\sigma}_\mu A^{-1} = \Lambda^\nu{}_\mu \hat{\sigma}_\nu, \quad (5.3.10)$$

und daher durch Heben und Senken der Indizes zu

$$(A^\dagger)^{-1} \hat{\sigma}^\nu A^{-1} = \Lambda_\mu{}^\nu \hat{\sigma}^\mu. \quad (5.3.11)$$

Nun beobachten wir, dass in der chiralen (oder Weyl) Darstellung, die γ -Matrizen kompakt als

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^\mu \\ \hat{\sigma}^\mu & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (5.3.12)$$

geschrieben werden können. Wir machen nun den Ansatz, dass $S(\Lambda)$ gerade durch die sogenannte *Dirac Darstellung*

$$S(\Lambda) = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (A^\dagger)^{-1} \end{pmatrix} \quad (5.3.13)$$

gegeben ist. Um dies nachzuprüfen berechnen wir

$$S(\Lambda) \gamma^\nu S(\Lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & A \sigma^\nu A^\dagger \\ (A^\dagger)^{-1} \hat{\sigma}^\nu A^{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \Lambda_\mu{}^\nu \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^\mu \\ \hat{\sigma}^\mu & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (5.3.14)$$

Dies beweist die Lorentz Kovarianz der Dirac Gleichung zumindest in der Weyl Darstellung der γ -Matrizen. Alle anderen 4-dimensionalen Darstellungen der Dirac-Algebra sind isomorph zu der Weyl Darstellung (wie wir in Kapitel 4.1.2 zumindest für den Fall der Majorana Darstellung explizit gesehen haben), und daher ist die Dirac Gleichung tatsächlich für jede Wahl der Darstellung der Dirac Algebra kovariant.

Bevor wir die Lorentz Kovarianz der Dirac Gleichung ein wenig allgemeiner diskutieren, sollten wir noch auf eine wichtige Eigenschaft der Darstellung (5.3.13) hinweisen. Wie wir in Kapitel 5.1 gesehen haben, ist die quantenmechanische Lorentzgruppe $SL(2, \mathbb{C})$ eine zweifache Überlagerung der üblichen Lorentzgruppe, da $A = \pm 1$ trivial auf den 4-er Vektoren des Minkowskiraumes wirken. In der Dirac Darstellung wirkt jedoch $A = -1$ nicht trivial, d.h. die Dirac Darstellung ist eine Darstellung der quantenmechanischen Lorentzgruppe, aber *nicht* eine Darstellung von L_+^\uparrow ! Da $A = -1$ in $SU(2)$ liegt, gilt eine entsprechende Aussage auch über die Untergruppe der Rotationen: die Dirac Darstellung definiert eine Darstellung von $SU(2)$, nicht aber von $SO(3)$. Wie wir schon zuvor in der Quantenmechanik gelernt haben, bedeutet dies, dass der Dirac Spinor halb-zahligen Spin hat; er beschreibt deshalb Fermionen.

Schliesslich sollten wir erwähnen, dass nicht nur die Dirac Gleichung Lorentz kovariant ist, sondern dass auch die zugehörige Lagrangedichte (4.1.14) Lorentz invariant ist. Wie wir gesehen haben, transformiert sich ψ wie (5.3.2); daher folgt, dass sich $\bar{\psi} = (\gamma^0 \psi^*)^t$ wie

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'(x') &= (\gamma^0 S(\Lambda)^* \psi(x)^*)^t \\ &= (S(\tilde{\Lambda})^* \gamma^0 \psi(x)^*)^t \\ &= \bar{\psi}(x) S(\tilde{\Lambda})^\dagger\end{aligned}\tag{5.3.15}$$

transformiert, wobei wir benützt haben, dass

$$\gamma^0 S(\Lambda) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (A^\dagger)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A^\dagger)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = S(\tilde{\Lambda}) \gamma^0.\tag{5.3.16}$$

Nach Konstruktion gilt dann

$$S(\tilde{\Lambda})^\dagger = S(\Lambda^{-1}) = S(\Lambda)^{-1},\tag{5.3.17}$$

und daher

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) S(\Lambda)^{-1}.\tag{5.3.18}$$

Dies impliziert dann sofort, dass der Masseterm Lorentz-invariant ist. Die Lorentzinvarianz des kinetischen Terms

$$\frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi\tag{5.3.19}$$

folgt dann einfach aus der Eigenschaft (5.3.5).

5.3.2 Der allgemeine Fall

Man kann natürlich die Kovarianz der Dirac Gleichung auch ein wenig allgemeiner (ohne eine Darstellung der Dirac Algebra spezifizieren zu müssen) beweisen. Dazu betrachtet man infinitesimale Lorentztransformationen. Wie wir oben bereits erwähnt haben, sind Lorentztransformationen dadurch ausgezeichnet, dass sie die Minkowski Metrik $g_{\mu\nu}$ invariant lassen, d.h.

$$x'^{\mu} x'^{\nu} g_{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} g_{\mu\nu} x^{\rho} x^{\sigma} = g_{\rho\sigma} x^{\rho} x^{\sigma} \quad (5.3.20)$$

und daher

$$\Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} g_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma}. \quad (5.3.21)$$

Wir machen nun den Ansatz

$$\Lambda^{\mu}_{\rho} = \delta^{\mu}_{\rho} + i\omega^{\mu}_{\rho}, \quad (5.3.22)$$

wobei ω^{μ}_{ρ} infinitesimal ist. Dann ist die Bedingung (5.3.21) gerade

$$\omega^{\mu}_{\rho} g_{\mu\sigma} + \omega^{\nu}_{\sigma} g_{\rho\nu} = 0. \quad (5.3.23)$$

Wenn wir die Indizes von ω ebenfalls mit der Metrik g heben und senken, dann können wir diese Bedingung einfach als

$$\omega_{\sigma\rho} + \omega_{\rho\sigma} = 0 \quad (5.3.24)$$

schreiben, d.h. $\omega_{\mu\nu}$ ist eine antisymmetrische Matrix. Der Tangentialraum der Lorentzgruppe L (bei der Identität) ist daher gerade der Raum der anti-symmetrischen 4×4 Matrizen, und hat daher Dimension $\dim(L) = 6$.

Um die zugehörige Lie Algebra Struktur abzuleiten, ist es am einfachsten, die Wirkung der Lorentzgruppe auf Funktionen zu betrachten. Sei \mathcal{F} der Raum der (differenzierbaren) Abbildungen des Minkowskiraumes in die (komplexen) Zahlen, dann trägt \mathcal{F} natürlicherweise eine Darstellung der Lorentzgruppe: seien $f(x)$ ein beliebiges Element von \mathcal{F} und Λ eine Lorentztransformation, dann definieren wir

$$(\Lambda f)(x) \equiv f(\Lambda^{-1}x). \quad (5.3.25)$$

In dieser Darstellung entspricht dann die infinitesimale Lorentztransformation, die durch (5.3.22) beschrieben wird, gerade

$$(\Lambda f)(x) = f(x_{\mu} - i\omega_{\mu\nu} x^{\nu}) = f(x) - i\omega_{\mu\nu} x^{\nu} \partial^{\mu} f(x) + \mathcal{O}(\omega^2), \quad (5.3.26)$$

und daher dem Differentialoperator

$$(\Lambda f)(x) = f(x) + \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} f(x) + \mathcal{O}(\omega^2) \quad \text{mit} \quad J^{\mu\nu} = i(x^{\mu} \partial^{\nu} - x^{\nu} \partial^{\mu}). \quad (5.3.27)$$

Aus dieser Darstellung kann man nun leicht die Vertauschungsregeln der Operatoren $J^{\mu\nu}$ ableiten; man findet

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho}). \quad (5.3.28)$$

Diese Relationen definieren gerade die Lie Algebra der infinitesimalen Lorentztransformationen. [**Übungsaufgabe:** Zeige, dass die Darstellung

$$(\mathcal{J}^{\mu\nu})_{\alpha}{}^{\beta} = i(\delta^{\mu}_{\alpha} g^{\nu\beta} - \delta^{\nu}_{\alpha} g^{\mu\beta})$$

die obigen Lie Algebra Relationen erfüllt. Diese Darstellung beschreibt gerade die natürliche Wirkung der Lorentzgruppe auf den 4-er Vektoren x^{ν} .]

Um die Lorentz Kovarianz der Dirac Gleichung allgemein zu beweisen, zeigen wir jetzt, dass *jede* Darstellung der Dirac Algebra eine Darstellung dieser infinitesimalen Lorentztransformationen induziert, bezüglich derer sich die γ^{μ} wie in (5.3.6) transformieren. Dazu definieren wir

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]. \quad (5.3.29)$$

Man rechnet leicht nach (**Übungsaufgabe**), dass die $S^{\mu\nu}$ gerade eine Darstellung der Lie Algebra der infinitesimalen Lorentztransformationen sind, d.h. dass

$$[S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho} S^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} S^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} S^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} S^{\nu\rho}). \quad (5.3.30)$$

Da die γ -Matrizen natürlicherweise auf den Indizes des Dirac-Spinors ψ wirken, trägt dieser Raum daher automatisch auch eine Wirkung der quantenmechanischen Lorentzgruppe. [Hier haben wir benützt, dass jede Darstellung der Lie Algebra der Lorentztransformationen sich zu einer Darstellung der (einfach zusammenhängenden) quantenmechanischen Lorentzgruppe aufintegrieren lässt.] Es bleibt daher lediglich zu zeigen, dass sich die γ -Matrizen unter dieser Wirkung wie (5.3.6) transformieren. Falls Λ^{μ}_{ρ} wie in (5.3.22) gegeben ist, gilt

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + i\omega^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad x^{\nu} = x'^{\nu} - i\omega^{\nu}_{\mu} x'^{\mu} + \mathcal{O}(\omega^2), \quad (5.3.31)$$

d.h. wir haben

$$\Lambda_{\mu}{}^{\nu} = \delta_{\mu}^{\nu} - i\omega^{\nu}_{\mu} + \mathcal{O}(\omega^2). \quad (5.3.32)$$

Andererseits schreiben wir (wie in (5.3.27))

$$\Lambda = \mathbf{1} + \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}. \quad (5.3.33)$$

Wir müssen daher also zeigen, dass

$$\left(\mathbf{1} + \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma} S^{\rho\sigma}\right) \gamma^{\nu} \left(\mathbf{1} - \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma} S^{\rho\sigma}\right) \stackrel{!}{=} \Lambda_{\mu}{}^{\nu} \gamma^{\mu} = \left(\delta_{\mu}^{\nu} - i\omega^{\nu}_{\mu}\right) \gamma^{\mu}. \quad (5.3.34)$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu der Bedingung

$$\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma} [S^{\rho\sigma}, \gamma^{\nu}] = -i\omega^{\nu}_{\mu} \gamma^{\mu}. \quad (5.3.35)$$

Man rechnet leicht nach (**Übungsaufgabe**), dass

$$[S^{\rho\sigma}, \gamma^\nu] = -i (g^{\rho\nu} \delta_\mu^\sigma - \delta_\mu^\rho g^{\sigma\nu}) \gamma^\mu = i\gamma^\rho g^{\sigma\nu} - i\gamma^\sigma g^{\rho\nu}. \quad (5.3.36)$$

Kontraktion mit $1/2\omega_{\rho\sigma}$ ergibt dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}[S^{\rho\sigma}, \gamma^\nu] &= \frac{i}{2}\omega_\rho^\nu \gamma^\rho - \frac{i}{2}\omega^\nu_\sigma \gamma^\sigma \\ &= -i\omega^\nu_\sigma \gamma^\sigma, \end{aligned}$$

wobei wir die Anti-Symmetrie von ω benützt haben. Dies beweist daher die Lorentz Kovarianz der Dirac Gleichung unabhängig von der gewählten Darstellung der Dirac Algebra.

5.3.3 Die Weyl Gleichung und der Chiralitätsoperator

Die Dirac Darstellung (5.3.13) hat blockdiagonale Form (falls die γ^μ in der Weyl Darstellung gewählt werden), und bildet daher keine irreduzible Darstellung der Lorentzgruppe. [In der Tat ist die Dirac Darstellung gerade die direkte Summe der ersten und letzten Darstellung in (5.1.18).] Diese Eigenschaft der Dirac Darstellung suggeriert daher, dass wir den Dirac Spinor als

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (5.3.37)$$

zerlegen sollten. Die zwei-dimensionalen Objekte ψ_L und ψ_R werden links- bzw. rechts-händige *Weyl Spinoren* genannt. Nach Konstruktion transformieren sie sich separat unter Lorentztransformationen. Die Dirac Gleichung hat dann die Form

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = \begin{pmatrix} -m & i(\partial_0 - \sigma_j \partial_j) \\ i(\partial_0 + \sigma_j \partial_j) & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0. \quad (5.3.38)$$

Die beiden Darstellungen der Lorentzgruppe ψ_L und ψ_R werden daher gerade durch den Masseterm gemischt; falls wir jedoch $m = 0$ setzen, entkoppeln die Gleichungen für ψ_L und ψ_R :

$$\begin{aligned} i(\partial_0 + \sigma_j \partial_j)\psi_L &= 0 \\ i(\partial_0 - \sigma_j \partial_j)\psi_R &= 0. \end{aligned} \quad (5.3.39)$$

Diese Gleichungen werden üblicherweise die *Weyl Gleichungen* genannt; sie spielen für die Beschreibung von (masselosen) Neutrinos in der Theorie der elektroschwachen Wechselwirkungen eine wichtige Rolle.

Man kann die Weyl Spinoren auch ein wenig abstrakter (d.h. ohne eine spezifische Wahl der Darstellung der γ -Matrizen zu wählen) charakterisieren. Dazu definieren wir den Chiralitätsoperator

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3. \quad (5.3.40)$$

Dieser Operator ist dadurch ausgezeichnet, dass

$$\gamma^5 \gamma^\mu = -\gamma^\mu \gamma^5 \quad \gamma^5 \gamma^5 = \mathbf{1}. \quad (5.3.41)$$

[Beide Eigenschaften können wir einfach direkt aus der Dirac Algebra ableiten, ohne eine spezielle Darstellung wählen zu müssen.] Wegen der letzten Eigenschaft, sind die Eigenwerte von γ^5 gerade ± 1 ; mit unseren obigen Konventionen rechnet man leicht nach, dass

$$\gamma^5 \psi_L = +\psi_L, \quad \gamma^5 \psi_R = -\psi_R. \quad (5.3.42)$$

Der Umstand, dass sich die Eigenräume von γ^5 separat unter Lorentztransformationen transformieren, ist einfach eine Folge davon, dass

$$[\gamma^5, S^{\mu\nu}] = 0, \quad (5.3.43)$$

da $S^{\mu\nu}$ bilinear in den γ -Matrizen ist. Die Zerlegung des Dirac-Spinors in Weyl-Spinoren ist daher für jede Darstellung der Dirac Algebra möglich. [In der Weyl-Darstellung der γ -Matrizen ist jene Zerlegung lediglich besonders einfach.]

6 Quantisierung freier Felder

In diesem Kapitel wollen wir die kanonische Quantisierung einer freien Feldtheorie diskutieren. In der üblichen (nicht-relativistischen) Quantenmechanik erhält man die Schrödinger Gleichung in dem man klassische Observable durch Operatoren ersetzt, wobei die Poisson Klammern der klassischen Observablen die Vertauschungsregeln der Quantenoperatoren bestimmen. Wie wir in Kapitel 2 gesehen haben, können wir kanonische Impulse auch für eine Feldtheorie definieren. Wir können deshalb versuchen, diese Art der ‘Quantisierung’ auch für die Freiheitsgrade einer Feldtheorie durchzuführen. Wie wir sehen werden ist das im wesentlichen ein guter Ansatz.

Für die physikalische Interpretation einer Feldtheorie sind die Wechselwirkungen natürlich von grosser Bedeutung (da sie zum Beispiel festlegen, welcher Art von gebundenen Zuständen eine Theorie besitzt). Im allgemeinen ist es jedoch sehr schwierig, die Bewegungsgleichungen explizit zu lösen, und wir müssen die Wechselwirkungen mit Hilfe einer Störungsreihe beschreiben. Die korrekte Behandlung der Wechselwirkungen stellt ein nicht unerhebliches technisches Problem dar, das uns im Weiteren dieser Vorlesung noch beschäftigen wird! Um diese Probleme auszuklammern, werden wir uns zunächst mit freien Feldtheorien (d.h. Theorien ohne Wechselwirkungen) beschäftigen.

Der Umstand, dass Wechselwirkungen nur perturbativ (d.h. in einer Störungsreihe) behandelt werden können, ist recht unbefriedigend. Es wurden daher verschiedene Versuche unternommen, Quantenfeldtheorien auf andere Weise zu definieren. Insbesondere sind dabei die sogenannten *Wightman Axiome* (bzw. deren euklidische Version, die Osterwalder-Schrader Axiome) zu nennen, bei denen die Korrelationsfunktionen von Quantenfeldtheorien direkt charakterisiert werden, ohne dass jene in einer Störungsreihe aus einer Wirkung hätten abgeleitet werden müssen. Ein anderer axiomatischer Zugang ist jener von Haag und Kastler, bei dem Quantenfeldtheorien durch Netze lokaler Observabler (die durch C^* -Algebren beschrieben werden) definiert werden. In beiden diesen Zugängen ist es gelungen, allgemeine Strukturtheoreme (so wie das Spin-Statistik Theorem, oder das PCT Theorem) abzuleiten. Jedoch ist es nur mit Schwierigkeiten (wenn überhaupt) möglich gewesen, die erfolgreichen Quantenfeldtheorien (z.B. die QED sowie die elektroschwache Theorie von Glashow, Weinberg und Salam) in dieser Weise zu formulieren. Ausserdem ist inzwischen klar geworden, dass selbst jene so erfolgreichen Quantenfeldtheorien nicht wirklich fundamental sind, da sie nur effektive Feldtheorien sind (die die Physik bis zu einer gewissen Energieskala gut beschreiben). Die zugrunde liegende fundamentale Theorie (die dann auch die Effekte der allgemeinen Relativitätstheorie, also der Gravitation beinhalten muss) ist dann vielleicht gar keine lokale Quantenfeldtheorie — der gegenwärtig erfolgversprechendste Kandidat ist *String Theorie*, bei der die verschiedenen Teilchen als Anregungen eines 1-dimensionalen Strings aufgefasst werden. Insofern sollte man vielleicht gar nicht erwarten, dass sich diese Theorien im Rahmen von Axiomsystemen, die lokale Quantenfeldtheorien modellieren, fassen lassen. In jedem Fall werden wir in dieser Vorlesung diese axiomatischen Zugänge zu Quantenfeldtheorien nicht weiter diskutieren.

Im folgenden wollen wir zunächst die wesentlichen Ideen der kanonischen Quan-

tisierung allgemein erklären; das typische Beispiel, das wir dabei im Hinterkopf haben sollten, ist die Klein-Gordon Theorie.

6.1 Allgemeine Formulierung

Wir betrachten eine lokale Lorentz-invariante Feldtheorie, deren Felder durch $\phi_\alpha(x)$ bezeichnet werden, wobei α ein Index ist, der die verschiedenen Felder unterscheidet. Wir wollen annehmen, dass die Felder keine Nebenbedingungen erfüllen, und dass es sich um Felder ganz-zahligen Spins handelt. (Die Behandlung von Feldern mit halb-zahligem Spin, z.B. des Dirac Spinors, erfordert wichtige Modifikationen, die wir später besprechen werden.)

Wie wir bereits in Kapitel 2 erklärt haben, definieren wir die zu ϕ_α kanonische konjugierte Impulsdichte durch

$$\pi_\alpha(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_\alpha(t, \mathbf{x}))}. \quad (6.1.1)$$

Wie schon oben angedeutet wollen wir nun die (komplex- oder reell-wertigen) Felder ϕ_α und π_α durch Operatoren ersetzen, für die wir die kanonischen Vertauschungsregeln

$$[\phi_\alpha(t, \mathbf{x}), \pi_\beta(t, \mathbf{x}')] = i \delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (6.1.2)$$

postulieren. Ausserdem nehmen wir an, dass die Kommutatoren $[\phi_\alpha, \phi_\beta]$ und $[\pi_\alpha, \pi_\beta]$ verschwinden. Dann invertieren wir (6.1.1) um $\partial_0 \phi_\alpha$ durch π_β und ϕ_β auszudrücken, und erhalten damit die Hamiltonfunktion

$$H = \int d^3 \mathbf{x} \left[\sum_\alpha \pi_\alpha(t, \mathbf{x}) \partial_0 \phi_\alpha(t, \mathbf{x}) - \mathcal{L}(\phi, \partial\phi) \right]. \quad (6.1.3)$$

Dieses Vorgehen hat die üblichen Probleme mit der Operatorordnung. Ausserdem führt die Multiplikation von Feldern, die an demselben Raumpunkt ausgewertet werden, wie wir gleich sehen werden zu neuen Schwierigkeiten. Diese beiden Probleme hängen natürlich zusammen.

Wir sollten an dieser Stelle darauf hinweisen, dass wir bisher noch nicht festgelegt haben, in welchem Hilbertraum diese Operatoren wirken. Diese Frage hat eine einfache Antwort für freie Feldtheorien, sowie für Feldtheorien, die man als (leichte) Störung einer freien Feldtheorie auffassen kann. Im allgemeinen ist diese Frage aber komplex und kann nicht einfach allgemein beantwortet werden.

Das einfachste Beispiel ist die Feldtheorie eines einzigen (reellen) Feldes ϕ , dessen Lagrangedichte von der Form

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - V(\phi) \quad (6.1.4)$$

ist, wobei V eine glatte Funktion (zum Beispiel ein Polynom) ist. Die klassischen Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \equiv \square\phi + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0. \quad (6.1.5)$$

Falls $V(\phi)$ lediglich einen quadratischen Term besitzt,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (6.1.6)$$

dann ist die Bewegungsgleichung die Klein-Gordon Gleichung

$$(\square + m^2)\phi = 0. \quad (6.1.7)$$

[Wie wir schon zuvor erwähnt haben, interpretieren wir diese Gleichung hier als klassische Feldgleichung, und *nicht* als relativistische Verallgemeinerung der Schrödinger Gleichung.]

Unabhängig von der Wahl von $V(\phi)$ ist die zu ϕ konjugierte Impulsdichte

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial_0\phi, \quad (6.1.8)$$

so dass wir die Hamiltondichte einfach durch ϕ und π ausdrücken können,

$$H = \int d^3\mathbf{x} \left[\frac{1}{2}(\pi^2 + (\nabla\phi)^2) + V(\phi) \right]. \quad (6.1.9)$$

Für den Fall eines quadratischen Potentials (6.1.6) gilt dann speziell

$$H = \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{2} \left[(\pi^2 + (\nabla\phi)^2) + m^2\phi^2 \right]. \quad (6.1.10)$$

In jedem Fall gibt es dabei keine Probleme mit der Operatorordnung, da lediglich der Kommutator von ϕ mit π nicht verschwindet. Das einzige potentielle Problem mit dieser Vorgehensweise liegt daher darin, dass wir Produkte von Feldern betrachten, die am selben Raumpunkt definiert sind.

Wir konzentrieren uns nun auf den Fall der Klein-Gordon Theorie (6.1.10). Der Integrand des Hamiltonoperators hat in diesem Fall die Struktur von gekoppelten harmonischen Oszillatoren. Um die zugrunde liegende Struktur zu verstehen, vereinfachen wir das System weiter, in dem wir annehmen, dass der Raum lediglich 1-dimensional ist, und dass die kontinuierliche Variable x tatsächlich nur diskrete Werte annehmen kann, $x = na$, wobei $n \in \mathbf{Z}$ und a den Gitterabstand beschreibt. [Im folgenden setzen wir $a = 1$.] Dann können wir (6.1.10) durch

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \left[\pi_n^2 + (\phi_n - \phi_{n-1})^2 + m^2\phi_n^2 \right] \quad (6.1.11)$$

ersetzen. Die kanonischen Vertauschungsregeln sind dann

$$[\phi_n, \phi_m] = [\pi_n, \pi_m] = 0, \quad [\phi_n, \pi_m] = i\delta_{n,m}. \quad (6.1.12)$$

[Ein physikalisches Modell, das durch (6.1.11) beschrieben wird, ist zum Beispiel ein 1-dimensionales Kristall, wobei ϕ_n die Verschiebung des n -ten Atoms beschreibt, und π_n

die konjugierte Variable ist. Jeder individuelle harmonische Oszillator (dessen Rückstellkraft durch das Potential $m^2\phi_n^2$ beschrieben wird) koppelt an seinen nächsten Nachbarn vermöge des Beitrags $(\phi_n - \phi_{n-1})^2$ zur potentiellen Energie.]

Um dieses System zu beschreiben ist es nun geschickt, die Fouriertransformierte von ϕ_n und π_n einzuführen,

$$\phi_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{ikn} \tilde{\phi}(k), \quad \pi_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{ikn} \tilde{\pi}(k). \quad (6.1.13)$$

Da ϕ_n und π_n reell sind, gilt

$$\tilde{\phi}^\dagger(k) = \tilde{\phi}(-k), \quad \tilde{\pi}^\dagger(k) = \tilde{\pi}(-k). \quad (6.1.14)$$

Die obigen Vertauschungsregeln von ϕ_n und π_m entsprechen jetzt

$$[\tilde{\phi}(k), \tilde{\phi}(k')] = [\tilde{\pi}(k), \tilde{\pi}(k')] = 0 \quad (6.1.15)$$

sowie

$$[\tilde{\phi}(k), \tilde{\pi}(-k')] = i \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-i(k-k')n}. \quad (6.1.16)$$

Die letzte Summe ist einfach (**Übungsaufgabe**)

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-i(k-k')n} = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(k - k' + 2\pi n). \quad (6.1.17)$$

Falls wir also $\tilde{\phi}(k)$ und $\tilde{\pi}(k)$ periodisch von $-\pi \leq k \leq \pi$ auf die ganze reelle Achse fortsetzen, reduziert sich diese Gleichung zu $2\pi\delta(k - k')$, und wir haben

$$[\tilde{\phi}(k), \tilde{\pi}(-k')] = 2\pi i \delta(k - k'). \quad (6.1.18)$$

Durch die Fouriermoden kann der Hamiltonoperator nun als

$$H = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \left[\tilde{\pi}^\dagger(k) \tilde{\pi}(k) + \tilde{\phi}^\dagger(k) (m^2 + 2(1 - \cos k)) \tilde{\phi}(k) \right] \quad (6.1.19)$$

geschrieben werden. Wir können diese Hamiltondichte dann als eine Summe entkoppelter Oszillatoren interpretieren; dazu definieren wir

$$\begin{aligned} \omega_k &= \omega_{-k} = \sqrt{m^2 + 2(1 - \cos k)} \\ a_k &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_k}} (\omega_k \tilde{\phi}(k) + i\tilde{\pi}(k)) \\ a_k^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_k}} (\omega_k \tilde{\phi}^\dagger(k) - i\tilde{\pi}^\dagger(k)). \end{aligned} \quad (6.1.20)$$

Ausgedrückt durch die a_k und a_k^\dagger sind die Vertauschungsregeln nun

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta(k - k'). \quad (6.1.21)$$

Die Operatoren a_k^\dagger und a_k erzeugen und vernichten eine Anregung mit Energie ω_k , da der Hamiltonoperator gerade durch

$$H = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dk \omega_k (a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger) = \int_{-\pi}^{\pi} dk H_k \quad (6.1.22)$$

gegeben ist. Die Felder können nun als

$$\begin{aligned} \phi_n &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{\sqrt{4\pi\omega_k}} (a_k e^{ikn} + a_k^\dagger e^{-ikn}) \\ \pi_n &= -i \int_{-\pi}^{\pi} dk \sqrt{\frac{\omega_k}{4\pi}} (a_k e^{ikn} - a_k^\dagger e^{-ikn}) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{\sqrt{4\pi\omega_k}} (a_k e^{-i\omega_k t + ikn} + a_k^\dagger e^{i\omega_k t - ikn}) \right]_{t=0}. \end{aligned} \quad (6.1.23)$$

Die Bezeichnung von a_k und a_k^\dagger als Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren ist gerechtfertigt, da falls $|E\rangle$ ein Eigenzustand des Hamiltonoperators mit Eigenwert E ist, gilt

$$\begin{aligned} H a_k |E\rangle &= E a_k |E\rangle + [H, a_k] |E\rangle = (E - \omega_k) a_k |E\rangle \\ H a_k^\dagger |E\rangle &= E a_k^\dagger |E\rangle + [H, a_k^\dagger] |E\rangle = (E + \omega_k) a_k^\dagger |E\rangle. \end{aligned} \quad (6.1.24)$$

Die Anregungsmode, die durch a_k^\dagger charakterisiert wird und Energie ω_k besitzt, beschreibt in dem oben erwähnten mechanischen Modell eines Kristalls gerade eine kohärente quantisierte Vibration der Atome, die man üblicherweise als Phonon bezeichnet. Wir können das Spektrum der Theorie durch die Anregungen der Phononen auf einem Grundzustand beschreiben; dieser Grundzustand (den wir mit $|0\rangle$ bezeichnen) ist dadurch ausgezeichnet, dass

$$a_k |0\rangle = 0 \quad (6.1.25)$$

für alle a_k . Es gibt jedoch nun ein Problem mit der Definition des Hamiltonoperators: wenn wir den Hamiltonoperator auf dem Grundzustand auswerten, finden wir

$$\begin{aligned} H|0\rangle &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dk \omega_k (a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger) |0\rangle \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dk \omega_k [a_k, a_k^\dagger] |0\rangle, \end{aligned} \quad (6.1.26)$$

aber das letzte Integral hat keine Bedeutung, da $[a_k, a_k^\dagger] = \delta(0)$.

Der Grund für diese Divergenz liegt darin, dass wir angenommen haben, dass das Kristall unendlich ausgedehnt ist. Falls das Kristall endliche Grösse hat (indem wir zum Beispiel die endlich vielen Gitterpunkte durch $-N \leq n \leq N$ beschreiben), und falls wir periodische Randbedingungen wählen (indem wir die Gitterpunkte n und $n+p(2N+1)$ für $p \in \mathbb{Z}$ identifizieren), dann sind die Impulse quantisiert, $k = 2\pi q/(2N+1)$, wobei $q \in \mathbb{Z}$ und $-N \leq q \leq N$. In diesem Fall wäre die Nullpunktsenergie einfach

$$E_0 = \frac{N}{2N} \sum_{q=-N}^N \omega_{2\pi q/(2N+1)}, \quad (6.1.27)$$

und daher insbesondere endlich. Falls wir den Limes $N \rightarrow \infty$ nehmen, dann rührt die Divergenz von E_0 von der (unendlich werdenden) Grösse des Systems her, da

$$\frac{1}{2N} \sum_{q=-N}^N \omega_{2\pi q/(2N+1)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dk \omega_k \quad (6.1.28)$$

konvergiert.

Indem wir die möglichen x -Werte diskret gewählt haben, haben wir die Impulse auf die Brioullin Zone $-\pi \leq k \leq \pi$ eingeschränkt; wir haben dadurch also einen ‘UV cutoff’ eingeführt (d.h. wir haben die Beiträge von sehr grossen Impulsen abgeschnitten). Indem wir nun das System zusätzlich endlich gewählt haben (d.h. ‘by putting the system in a box’) haben wir nun auch noch die obige IR Divergenz entfernt; der resultierende Hamiltonoperator ist dann ohne Ambiguität definiert. Die Nullpunktsenergie (die im IR Limes $N \rightarrow \infty$ divergiert) ist tatsächlich nicht direkt beobachtbar; in der Feldtheorie (die uns ja hauptsächlich interessiert) beschreibt sie die Energie des Vakuums. Das einzige, was wir wirklich messen können sind Energiedifferenzen. Wir können daher einfach bestimmen, dass wir unsere Energieskala so festlegen, dass die Energie des Vakuums gerade verschwindet. Mit dieser Festlegung wird der Hamiltonoperator dann

$$H = \int_{-\pi}^{\pi} dk \omega_k a_k^\dagger a_k. \quad (6.1.29)$$

[In einer relativistischen Feldtheorie müssen wir zusätzlich darauf achten, dass diese Subtraktion auch die Lorentzsymmetrie des Problems erhält!]

In dem obigen Ausdruck tauchen die Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren ‘normalgeordnet’ auf: damit meint man, dass die Vernichtungsoperatoren rechts von den Erzeugungsoperatoren stehen. Diese Ordnung wird manchmal *Wick Ordnung* genannt und durch einen Doppelpunkt bezeichnet:

$$: \frac{1}{2} (a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger) := a_k^\dagger a_k. \quad (6.1.30)$$

Wir bemerken, dass das normalgeordnete Produkt zweier Operatoren kommutativ ist, d.h. $:ab: = :ba:$, und dass die Definition der Normalordnung sich auf einen Vakuumzustand bezieht.

In dem obigen System sind Phononen wohl definierte Objekte, deren Anzahl erhalten ist. Dies ist eine Folge davon, dass der Zahloperator

$$N = \int_{-\pi}^{\pi} dk a_k^\dagger a_k \quad (6.1.31)$$

mit dem Hamiltonoperator vertauscht, $[H, N] = 0$. Um das Spektrum genauer zu beschreiben, nehmen wir jetzt an, dass wir das Vakuum normiert haben, $\langle 0|0 \rangle = 1$. Das bra-Vakuum erfüllt dann die adjungierte Gleichung zu (6.1.25),

$$\langle 0| a_k^\dagger = 0. \quad (6.1.32)$$

Der Zustand, in dem das Phonon a_k^\dagger angeregt ist, hat dann wiederum unendliche Norm,

$$\langle 0|a_k a_k^\dagger|0\rangle = \langle 0|[a_k, a_k^\dagger]|0\rangle = \infty \quad (6.1.33)$$

da der Kommutator wiederum $\delta(0)$ ist. Diese Art der Divergenz ist uns bereits aus der Quantenmechanik bekannt. Dort haben wir auch bereits gelernt, dass man normierbare Zustände erhält, in dem man *Wellenpakete* betrachtet,

$$a_f^\dagger|0\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} dk f(k) a_k^\dagger|0\rangle. \quad (6.1.34)$$

Dieser Zustand ist dann normierbar, falls f quadratintegrierbar (L^2) ist,

$$\begin{aligned} \langle 0|a_f a_f^\dagger|0\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} dk_1 \int_{-\pi}^{\pi} dk_2 f^*(k_1) f(k_2) \langle 0|a_k a_k^\dagger|0\rangle \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} dk |f(k)|^2 < \infty. \end{aligned} \quad (6.1.35)$$

Die Operatoren a_k und a_k^\dagger müssen mit ‘Testfunktionen’ f verschmiert werden, um vernünftige Operatoren zu ergeben; sie werden deshalb manchmal als *operatorwertige Distributionen* bezeichnet.

Der Zustand $a_f^\dagger|0\rangle$ ist ein 1-Phonon Zustand, da

$$\begin{aligned} N a_f^\dagger|0\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} dk_1 \int_{-\pi}^{\pi} dk_2 f(k_2) a_{k_1}^\dagger a_{k_1} a_{k_2}^\dagger|0\rangle \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} dk f(k) a_k^\dagger|0\rangle = a_f^\dagger|0\rangle. \end{aligned} \quad (6.1.36)$$

Um den ganzen Zustandsraum zu konstruieren, betrachten wir Vektoren der Form

$$|r\rangle = a_{f_1}^\dagger a_{f_2}^\dagger \cdots a_{f_r}^\dagger|0\rangle, \quad (6.1.37)$$

wobei f_i , $i = 1, \dots, r$ (orthonormale) L^2 -Funktionen sind. Der Raum, der von allen solchen Zuständen (für $r = 0, 1, 2, \dots$) aufgespannt wird, nennt man den *Fockraum*. Mit derselben Rechnung wie oben zeigt man, dass die Zustände der Form $|r\rangle$ r -Phononen-zustände sind, d.h.

$$N|r\rangle = r|r\rangle. \quad (6.1.38)$$

Falls die Funktionen f_1, \dots, f_r bei k_1, \dots, k_r stark gepeakt sind, gilt ausserdem

$$H|r\rangle \simeq \left(\sum_{i=1}^r \omega_{k_i} \right) |r\rangle. \quad (6.1.39)$$

Schliesslich beobachten wir, dass dieser Zustand in den f_i symmetrisch ist; dies ist eine Folge davon, dass die Erzeugungsoperatoren vertauschen

$$\begin{aligned} |r\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} dk_1 \cdots \int_{-\pi}^{\pi} dk_r f_1(k_1) \cdots f_r(k_r) a_{k_1}^\dagger \cdots a_{k_r}^\dagger|0\rangle \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} dk_1 \cdots \int_{-\pi}^{\pi} dk_r \frac{1}{r!} \sum_{\sigma} f_1(k_{\sigma(1)}) \cdots f_r(k_{\sigma(r)}) a_{k_1}^\dagger \cdots a_{k_r}^\dagger|0\rangle, \end{aligned} \quad (6.1.40)$$

wobei die Summe in der letzten Zeile über alle ($r!$) Permutationen von r Objekten läuft. Die Phononen sind daher identische Teilchen und genügen der Bosestatistik.

Die Quantisierung, die wir oben betrachtet haben, wurde zu fester Zeit $t = 0$ durchgeführt. Die Theorie ist jedoch unter Zeittranslationen invariant, und es sollte daher keine Rolle spielen, für welches feste t die Theorie quantisiert wird. Wir hätten stattdessen auch die Operatoren $\phi_n(t)$, $\pi_n(t)$ benützen können, für die

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_n(t) &= i[H, \phi_n(t)] = \pi_n(t), & \phi_n(0) &\equiv \phi_n \\ \dot{\pi}_n(t) &= i[H, \pi_n(t)], & \pi_n(0) &\equiv \pi_n,\end{aligned}\quad (6.1.41)$$

wobei

$$\phi_n(t) = e^{iHt} \phi_n e^{-iHt} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{\sqrt{4\pi\omega_k}} \left(a_k e^{-i\omega_k t + ikn} + a_k^\dagger e^{i\omega_k t - ikn} \right), \quad \pi_n(t) = \dot{\phi}_n(t). \quad (6.1.42)$$

Die Operatoren $a_k e^{-i\omega_k t}$ und $a_k^\dagger e^{i\omega_k t}$ erfüllen natürlich weiterhin die kanonischen Vertauschungsregeln, und H und N sind zeit-unabhängig. Die Beziehung zwischen den Observablen zur Zeit $t = 0$ und zur Zeit t ist durch eine unitär implementierte kanonische Transformation beschrieben. Die physikalischen Erwartungswerte sind natürlich unabhängig davon, ob man dabei im Heisenberg oder Schrödinger Bild arbeitet.

Die Struktur der zeitabhängigen Felder $\phi_n(t)$ zeigt aber, dass das Feld ϕ_n Anteile mit positiver und negativer Frequenz besitzt. Diese entsprechen der Erzeugung und Vernichtung von Phononen, wobei die Phononen immer positive Energie ω_k besitzen. (Den Lösungen mit negativer Energie entsprechen daher gerade die Vernichtung von Phononen.) Das Feld ϕ sollte daher nicht als Wellenfunktion verstanden werden; es ist vielmehr ein Operator, der auf dem Fockraum wirkt. Auf den ersten Blick könnte man denken, dass ϕ lediglich eine Superposition von Lösungen der Wellengleichung ist, aber dies ist nicht richtig: die Koeffizienten, a_k und a_k^\dagger sind keine Zahlen, sondern operatorwertige Distributionen! Dieses Verfahren (bei dem man die Koeffizienten der Lösungen der Bewegungsgleichung durch Operatoren ersetzt) wird üblicherweise ‘Zweite Quantisierung’ genannt. Der Fockraum, auf dem diese Operatoren wirken, beschreibt dann nicht mehr nur 1-Teilchen (Phononen) Zustände, sondern enthält nun auch Zustände beliebig hoher Phononenzahl.

6.2 Das Skalarfeld

Für den Fall eines freien skalaren Feldes, dessen Hamiltonfunktion durch (6.1.10) gegeben ist, können wir die Quantisierung sehr analog durchführen. Wir bezeichnen die drei-dimensionalen Impulse (wie sich bald zeigen wird, ist das die richtige Interpretation) durch \mathbf{k} , und definieren

$$k^0 = \omega_{\mathbf{k}} = \omega_{-\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} > 0. \quad (6.2.1)$$

Das Lorentz-invariante Mass, das im folgenden immer wieder auftreten wird, ist

$$d\tilde{k} \equiv \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}} = \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(k^2 - m^2) \theta(k^0). \quad (6.2.2)$$

Die letzte Gleichung macht die Lorentz-Invarianz dieses Masses manifest. Natürlich kann man dies auch direkt aus der Definition von $d\tilde{k}$ nachrechnen: dazu beobachten wir, dass das Mass offensichtlich rotationsinvariant ist. Um die Lorentzinvarianz zu beweisen, genügt es daher zu zeigen, dass es auch unter boosts invariant ist. Ein boost mit Geschwindigkeit

$$v = \frac{v}{c} = \tanh \theta \quad (6.2.3)$$

in der x^1 -Richtung, lässt die Impulse in der 2 und 3 Richtung invariant, und wirkt auf k_1 und $\omega_{\mathbf{k}}$ wie

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbf{k}'} &= \cosh \theta \omega_{\mathbf{k}} + \sinh \theta k_1 \\ k_1' &= \sinh \theta \omega_{\mathbf{k}} + \cosh \theta k_1. \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

Durch differenzieren erhält man dann

$$dk_1' = \cosh \theta dk_1 + \sinh \theta \frac{k_1}{\omega_{\mathbf{k}}} dk_1, \quad (6.2.5)$$

und es ist dann klar (durch Vergleich von (6.2.4) mit (6.2.5)), dass $dk_1/\omega_{\mathbf{k}}$ Lorentz-invariant ist.

Das Feld $\phi(t, \mathbf{x})$ muss die Klein-Gordon Gleichung (die Euler-Lagrange Gleichung der Wirkung (6.1.6)) erfüllen; wir können es daher als Superposition von solchen Lösungen schreiben:

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \int d\tilde{k} \left[a(k) e^{-ik \cdot x} + a^\dagger(k) e^{ik \cdot x} \right]. \quad (6.2.6)$$

Die zu ϕ kanonisch konjugierte Impulsdichte ist dann

$$\pi(\mathbf{x}) = \partial_0 \phi = -i \int d\tilde{k} \omega_{\mathbf{k}} \left[a(k) e^{-ik \cdot x} - a^\dagger(k) e^{ik \cdot x} \right]. \quad (6.2.7)$$

Wie im oben diskutierten diskreten Fall, postulieren wir nun die Vertauschungsrelationen (zu fester Zeit)

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (6.2.8)$$

wobei die Kommutatoren von zwei ϕ -Feldern oder zwei π -Feldern verschwinden. Um daraus die Vertauschungsrelationen für die Operatoren $a(k)$ und $a^\dagger(k)$ abzuleiten, beobachten wir, dass wir (6.2.6) und (6.2.7) invertieren, und $a(k)$ (sowie $a^\dagger(k)$) durch ϕ und π ausdrücken können:

$$a(k) = \int d^3\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} [\omega_{\mathbf{k}} \phi(0, \mathbf{x}) + i\pi(0, \mathbf{x})] = i \int d^3\mathbf{x} \left[e^{ik \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(t, \mathbf{x}) \right]_{t=0} \quad (6.2.9)$$

und

$$a^\dagger(k) = \int d^3\mathbf{x} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} [\omega_{\mathbf{k}} \phi(0, \mathbf{x}) - i\pi(0, \mathbf{x})] = -i \int d^3\mathbf{x} \left[e^{-ik \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(t, \mathbf{x}) \right]_{t=0}. \quad (6.2.10)$$

Die kanonischen Vertauschungsregeln (6.2.8) implizieren dann, dass

$$[a(k), a^\dagger(k')] = (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (6.2.11)$$

sowie

$$[a(k), a(k')] = [a^\dagger(k), a^\dagger(k')] = 0. \quad (6.2.12)$$

Bis auf die unterschiedliche Normierung, ist das genau zu (6.1.21) analog; wir interpretieren daher $a(k)$ und $a^\dagger(k)$ als Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren.

Die Definition der Operatoren $a(k)$ und $a^\dagger(k)$ (6.2.9) und (6.2.10) hängt zunächst von der Wahl eines spezifischen Zeitpunktes (nämlich $t = 0$ in dem obigen Fall) ab. Tatsächlich ist die Definition jedoch von t unabhängig: man rechnet nämlich leicht nach, dass (für den Fall von $a(k)$)

$$\partial_0 \int d^3 \mathbf{x} \left[e^{ik \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(t, \mathbf{x}) \right] = \int d^3 \mathbf{x} \left[e^{ik \cdot x} \partial_0^2 \phi(x) + \{ (m^2 - \Delta) e^{ik \cdot x} \} \phi(x) \right], \quad (6.2.13)$$

wobei wir ausgenützt haben, dass $(k^0)^2 = m^2 + \mathbf{k}^2$. Mit Hilfe von partieller Integration können wir den Laplace Operator auf $\phi(x)$ abwälzen, und der Integrand verschwindet dann wegen der Klein Gordon Gleichung. Daher können wir $a(k)$ und $a^\dagger(k)$ auch durch

$$\begin{aligned} a(k) &= i \int d^3 \mathbf{x} e^{ik \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) \\ a^\dagger(k) &= -i \int d^3 \mathbf{x} e^{-ik \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) \end{aligned}$$

schreiben.

Der Zustandsraum (bzw. den Fockraum) kann wie zuvor durch die Wirkung der Erzeugungsoperatoren $a^\dagger(k)$ aus dem Vakuumzustand $|0\rangle$ erzeugt werden. Dieser Vakuumzustand ist wiederum dadurch charakterisiert, dass

$$a(k) |0\rangle = 0. \quad (6.2.14)$$

Wir normieren ihn kanonisch, $\langle 0|0\rangle = 1$, und die adjungierte Relation von (6.2.14) ist dann

$$\langle 0| a^\dagger(k) = 0. \quad (6.2.15)$$

Eine Basis des Fockraums kann durch (normalisierte) r -Teilchen Zustände angegeben werden; diese sind von der Form

$$|r\rangle = \mathcal{N} \int d\tilde{k}_1 \cdots d\tilde{k}_r F(k_1, \dots, k_r) a^\dagger(k_1) \cdots a^\dagger(k_r) |0\rangle, \quad (6.2.16)$$

wobei \mathcal{N} eine Normalisierungskonstante ist, die garantiert, dass $\langle r|r\rangle = 1$

$$\mathcal{N} = \left[r! \int d\tilde{k}_1 \cdots d\tilde{k}_r |F(k_1, \dots, k_r)|^2 \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (6.2.17)$$

Da die Erzeugungsoperatoren $a^\dagger(k_i)$ miteinander vertauschen, kann man wiederum ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die ‘Wellenfunktion’ $F(k_1, \dots, k_r)$ unter Vertauschung irgendwelcher zwei Impulse symmetrisch ist.

Die Definition des Hamiltonoperators ist wie zuvor ein wenig delikater, da man die richtige Normalordnungsvorschrift wählen muss; da der Zustand $|0\rangle$ das Vakuum beschreibt, dessen Energie verschwindet, ist die natürliche Definition

$$H = \frac{1}{2} \int d\tilde{k} \omega_{\mathbf{k}} : (a^\dagger(k) a(k) + a(k) a^\dagger(k)) := \int d\tilde{k} \omega_{\mathbf{k}} a^\dagger(k) a(k). \quad (6.2.18)$$

Der Impulsoperator ist durch

$$P^i = \int d^3\mathbf{x} T^{0i}(\mathbf{x}) \quad (6.2.19)$$

gegeben, wobei $T^{0i} = \partial^0\phi \partial^i\phi$ ist. Das Feld $\phi(t, \mathbf{x})$ können wir durch $a(k)$ und $a^\dagger(k)$ vermöge (6.2.6) ausdrücken, und daher ist

$$\begin{aligned} P^i &= - \int d^3\mathbf{x} \int d\tilde{k}_1 \int d\tilde{k}_2 \left[a(k_1) k_1^i e^{-ik_1 \cdot x} - a^\dagger(k_1) k_1^i e^{ik_1 \cdot x} \right] \times \\ &\quad \times \omega_{\mathbf{k}_2} \left[a(k_2) e^{-ik_2 \cdot x} - a^\dagger(k_2) e^{ik_2 \cdot x} \right] \\ &= - \int d\tilde{k}_1 k_1^i \int d\tilde{k}_2 \omega_{\mathbf{k}_2} \int d^3\mathbf{x} \left[a(k_1) a(k_2) e^{-i(k_1+k_2) \cdot x} - a(k_1) a^\dagger(k_2) e^{-i(k_1-k_2) \cdot x} \right. \\ &\quad \left. - a^\dagger(k_1) a(k_2) e^{i(k_1-k_2) \cdot x} + a^\dagger(k_1) a^\dagger(k_2) e^{i(k_1+k_2) \cdot x} \right] \\ &= \int d\tilde{k}_1 k_1^i \int d\tilde{k}_2 \omega_{\mathbf{k}_2} \left[(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) (a^\dagger(k_1) a(k_2) + a(k_1) a^\dagger(k_2)) \right. \\ &\quad \left. - (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) (e^{-2i\omega_{\mathbf{k}_1} x^0} a(k_1) a(k_2) + e^{2i\omega_{\mathbf{k}_1} x^0} a^\dagger(k_1) a^\dagger(k_2)) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int d\tilde{k} k^i (a^\dagger(k) a(k) + a(k) a^\dagger(k)), \end{aligned} \quad (6.2.20)$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass $d\tilde{k} = d^3\mathbf{k}/(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}$, sowie dass der zweite Term in der vorletzten Zeile wegen der Asymmetrie des Integranden (unter $k_1 \leftrightarrow k_2$) verschwindet. Im Gegensatz zum Hamiltonoperator gibt es hier kein Normalordnungsproblem, da der Integrand den Faktor k^i enthält; damit können wir also den Impulsoperator als

$$P^i = \int d\tilde{k} k^i a^\dagger(k) a(k) \quad (6.2.21)$$

schreiben. Es folgt daher, dass der Vakuumzustand (automatisch) keinen Impuls trägt,

$$P^\mu |0\rangle = 0. \quad (6.2.22)$$

Mit Hilfe von (6.2.11) kann man leicht zeigen, dass der Impulsoperator mit dem Hamiltonoperator vertauscht,

$$[H, P^i] = 0. \quad (6.2.23)$$

Dies passt damit zusammen, dass der Impulsoperator (6.2.21) tatsächlich zeit-unabhängig ist. Zusammen mit der Definition des Hamiltonoperators (6.2.18) können wir den 4-er Impulsoperator kompakt als

$$P^\mu = \int d\tilde{k} k^\mu a^\dagger(k) a(k) \quad (6.2.24)$$

schreiben, wobei $P^0 = H$. Die Verallgemeinerung von (6.2.23) ist dann

$$[P^\mu, P^\nu] = 0. \quad (6.2.25)$$

Man berechnet leicht, dass

$$[P^\mu, a^\dagger(k)] = k^\mu a^\dagger(k). \quad (6.2.26)$$

Dies zeigt, dass $a^\dagger(k)$ Zustände mit Impuls k erzeugt. Schliesslich definieren wir den Zahloperator N durch

$$N = \int d\tilde{k} a^\dagger(k) a(k). \quad (6.2.27)$$

Man rechnet leicht nach, dass N mit dem Impulsoperator P^μ vertauscht, und dass

$$N|r\rangle = r|r\rangle, \quad (6.2.28)$$

wobei $|r\rangle$ wie oben (6.2.16) definiert ist.

6.2.1 Poincare Invarianz

Die obige Quantisierung wurde in einem speziellen Inertialsystem durchgeführt. [Insbesondere wurden die kanonischen Vertauschungsrelationen zur gleichen Zeit postuliert!] Man kann sich daher fragen, ob diese Vorgehensweise die Poincarésymmetrie erhalten hat. Eine Quantenfeldtheorie ist unter Poincarétransformationen invariant, falls es zu jeder Poincarétransformation (a, Λ) einen unitären Operator $U(a, \Lambda)$ gibt, so dass

$$U(a, \Lambda) \phi(x) U^\dagger(a, \Lambda) = \phi(\Lambda x + a). \quad (6.2.29)$$

[Hier bezeichnet Λ eine Lorentztransformation, und a eine Translation; die Poincarégruppe ist das semidirekte Produkt der Lorentzgruppe und der Translationsgruppe.]

Unter geeigneten Annahmen an die Differenzierbarkeit der Felder genügt es, diese Eigenschaft für infinitesimale Transformationen zu zeigen, d.h. für Transformationen der Form

$$x'^\mu = x^\mu + \delta\omega^\mu{}_\nu x^\nu + \delta a^\mu. \quad (6.2.30)$$

Wie wir in Kapitel 5.3 gesehen haben, muss dabei $\omega_{\mu\nu}$ antisymmetrisch sein, d.h. $\omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} = 0$. Wir bezeichnen die Operatoren, die diese infinitesimale Transformationen generieren, als

$$U = \mathbf{1} - \frac{i}{2} \delta\omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} + i\delta a_\mu P^\mu. \quad (6.2.31)$$

Damit (6.2.29) gilt, müssen diese Operatoren dann die Eigenschaft besitzen, dass

$$i \left[\delta a_\mu P^\mu - \frac{i}{2} \delta\omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu}, \phi(x) \right] = \delta a_\mu \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \delta\omega_{\mu\nu} (x^\nu \partial^\mu - x^\mu \partial^\nu) \phi. \quad (6.2.32)$$

Wie in Kapitel 5.3.2 rechnet man nach (**Übungsaufgabe**), dass diese Generatoren gerade den Vertauschungsregeln

$$\begin{aligned} [P^\mu, P^\nu] &= 0 \\ [M^{\mu\nu}, P^\lambda] &= i(g^{\mu\lambda} P^\nu - g^{\nu\lambda} P^\mu) \\ [M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] &= i(g^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - g^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} - g^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} + g^{\nu\sigma} M^{\mu\rho}) \end{aligned} \quad (6.2.33)$$

genügen. [Die hier eingeführten Operatoren $M^{\mu\nu}$ unterscheiden sich gerade durch ein Vorzeichen von den zuvor eingeführten Operatoren $J^{\mu\nu}$.]

Wir haben oben bereits eine Formel für die Generatoren P^μ abgeleitet; dabei haben wir benützt, dass diese Generatoren gerade durch das Noether Theorem definiert sein sollten. Wir machen daher den Ansatz

$$M^{\mu\nu} = \int d^3\mathbf{x} \left(x^\mu T^{0\nu} - x^\nu T^{0\mu} \right), \quad (6.2.34)$$

wobei $T^{\mu\nu}$ wie in Kapitel 3.3 gegeben ist,

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\rho \phi)^2 + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} m^2 \phi^2. \quad (6.2.35)$$

In der Quantentheorie sollten diese Ausdrücke normalgeordnet werden; dann findet man (**Übungsaufgabe**)

$$\begin{aligned} M_{0j} &= i \int d\tilde{k} a^\dagger(k) \left(\omega_{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial k^j} \right) a(k) \\ M_{jl} &= i \int d\tilde{k} a^\dagger(k) \left(k_j \frac{\partial}{\partial k^l} - k_l \frac{\partial}{\partial k^j} \right) a(k). \end{aligned} \quad (6.2.36)$$

Man rechnet leicht nach, dass diese Generatoren (zusammen mit den oben abgeleiteten Ausdrücken für P^μ) gerade (6.2.32) und (6.2.33) erfüllen.

6.2.2 Der Propagator

Nachdem wir uns von der Lorentz-Invarianz unserer Beschreibung überzeugt haben, wollen wir nun analysieren, inwieweit das Feld ϕ Teilchen mit Masse m (und Spin null) beschreibt. Die kanonischen Vertauschungsregeln, die wir oben postuliert haben, verlangen, dass die Felder $\phi(x)$ und $\phi(y)$ zur selben Zeit, d.h. für $x^0 = y^0$, vertauschen. Der Kommutator zu unterschiedlichen Zeiten hingegen verschwindet im allgemeinen nicht:

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &= \int d\tilde{k}_1 \int d\tilde{k}_2 \left[a(k_1) e^{-ik_1 \cdot x} + a^\dagger(k_1) e^{ik_1 \cdot x}, a(k_2) e^{-ik_2 \cdot y} + a^\dagger(k_2) e^{ik_2 \cdot y} \right] \\ &= \int d\tilde{k} \left[e^{-ik \cdot (x-y)} - e^{ik \cdot (x-y)} \right] \\ &= i\Delta(x-y), \end{aligned} \quad (6.2.37)$$

wobei wir die Vertauschungsrelation (6.2.11) und (6.2.12) benützt haben (sowie die Definition des Masses $\tilde{d}\tilde{k}$). Diese Funktion (oder besser gesagt: Distribution) kann auch mit Hilfe der Stepfunktion $\epsilon(u)$,

$$\epsilon(u) = \begin{cases} 1 & \text{falls } u > 0 \\ -1 & \text{falls } u < 0 \end{cases} \quad (6.2.38)$$

als

$$\Delta(x-y) = -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \delta(k^2 - m^2) \epsilon(k^0) e^{-ik \cdot (x-y)} \quad (6.2.39)$$

geschrieben werden. Dies zeigt, dass $\Delta(x-y)$ eine ungerade, Lorentz-invariante Lösung der Klein-Gordon Gleichung ist. Wegen der kanonischen Vertauschungsregeln wissen wir, dass

$$\Delta(0, \mathbf{x}) = 0. \quad (6.2.40)$$

Wegen der Lorentz-Invarianz der Funktion gilt daher, dass $\Delta(x)$ ausserhalb des Lichtkegels verschwindet, d.h. dass

$$\Delta(x) = 0 \quad \text{falls } x^2 < 0. \quad (6.2.41)$$

Diese Eigenschaft kann man auch direkt aus der Definition von $\Delta(x)$ verstehen: falls x raumartig ist, d.h. falls $x^2 < 0$, gibt es eine kontinuierliche Lorentztransformation, die x in $-x$ überführt; daher kürzen sich die beiden Terme in (6.2.37) gerade weg! Dieses Argument gilt jedoch nicht, falls x licht- oder zeit-artig ist; im allgemeinen verschwindet daher die Funktion $\Delta(x)$ nicht. Die physikalische Interpretation dieser Eigenschaft ist, dass Messungen, die an raumartig getrennten Punkten durchgeführt werden, sich nicht gegenseitig beeinflussen; die Theorie, die wir konstruiert haben, ist daher wirklich lokal und Lorentzinvariant! Schliesslich beobachten wir noch, dass

$$\partial_0 \Delta(x)|_{x^0=0} = -\delta^{(3)}(\mathbf{x}), \quad (6.2.42)$$

da $\pi(x) = \partial_0 \phi(x)$.

6.3 Das geladene Skalarfeld

In der obigen Beschreibung des (reellen) hermiteschen Skalarfeldes kann man die Teilchen nicht von ihren Anti-Teilchen unterscheiden, da sie keine Ladung tragen, bezüglich derer sie sich unterscheiden. Um zu verstehen, in welcher Weise Anti-Teilchen in einer Quantenfeldtheorie auftreten, ist es deshalb nützlich, ein Beispiel zu analysieren, in dem es eine solche Ladung gibt. Das einfachste Modell dieser Art ist die Theorie eines *komplexen* Skalarfeldes. Diese Theorie wird durch die Lagrangedichte (3.3.17)

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi \quad (6.3.1)$$

beschrieben. Wie wir bereits in Kapitel 3.3. gesehen haben, besitzt diese Theorie eine U(1) Symmetrie

$$\phi(x) \mapsto e^{i\alpha} \phi(x), \quad \phi^\dagger(x) \mapsto e^{-i\alpha} \phi^\dagger(x). \quad (6.3.2)$$

Mit Hilfe des Noether Theorems können wir daher (wie wir gleich im Detail erklären werden) eine Ladung definieren.

Wir können das komplexe Feld $\phi(x)$ nach Real- und Imaginärteil zerlegen,

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1(x) + i\phi_2(x)). \quad (6.3.3)$$

Die Lagrangedichte (6.3.1) ist dann einfach die Summe der Lagrangedichten (6.1.6) für die beiden Felder ϕ_1 und ϕ_2 (mit dem gleichen Masseparameter m). Die Quantisierung kann daher separat für die beiden reellen Felder ϕ_1 und ϕ_2 durchgeführt werden, und es gibt zwei Teilchenzahloperatoren N_1 und N_2 ,

$$N_i = \int d\tilde{k} a_i^\dagger(k) a_i(k), \quad i = 1, 2 \quad (6.3.4)$$

bezüglich derer die Zustände charakterisiert werden können.

Bezüglich der Felder ϕ und ϕ^\dagger sind die kanonisch konjugierten Impulsdichten

$$\pi = \dot{\phi}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\dot{\phi}_1 - i\dot{\phi}_2), \quad \pi^\dagger = \dot{\phi} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\dot{\phi}_1 + i\dot{\phi}_2), \quad (6.3.5)$$

und die Hamiltondichte ist

$$H = \int d^3\mathbf{x} : \pi^\dagger \pi + \nabla\phi^\dagger \cdot \nabla\phi + m^2 \phi^\dagger \phi : . \quad (6.3.6)$$

Wir bemerken, dass in (6.3.6) relativ zu (6.1.10) kein Faktor 1/2 auftritt; dies hängt damit zusammen, dass wir diesen Faktor in die Normalisierung von ϕ absorbiert haben. Die Vertauschungsregeln

$$[\phi(x), \phi(y)] = [\phi^\dagger(x), \phi^\dagger(y)] = 0, \quad [\phi(x), \phi^\dagger(y)] = i\Delta(x - y) \quad (6.3.7)$$

reduzieren sich bei $x^0 = y^0$ zu

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{y})] = [\phi^\dagger(t, \mathbf{x}), \pi^\dagger(t, \mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (6.3.8)$$

Durch Moden ausgedrückt können wir ϕ und ϕ^\dagger als

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int d\tilde{k} [a(k) e^{-ik \cdot x} + b^\dagger(k) e^{ik \cdot x}] \\ \phi^\dagger(x) &= \int d\tilde{k} [b(k) e^{-ik \cdot x} + a^\dagger(k) e^{ik \cdot x}] \end{aligned} \quad (6.3.9)$$

wobei die Moden a und b durch a_1 und a_2 wie

$$\begin{aligned} a(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1(k) + ia_2(k)) \\ a^\dagger(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1^\dagger(k) - ia_2^\dagger(k)) \\ b(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1(k) - ia_2(k)) \\ b^\dagger(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1^\dagger(k) + ia_2^\dagger(k)) \end{aligned} \quad (6.3.10)$$

so dass die Vertauschungsregeln für a und b gerade

$$[a(k), a^\dagger(k')] = [b(k), b^\dagger(k')] = (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (6.3.11)$$

sind. Wir erkennen aus (6.3.9), dass das Feld ϕ Quanten des Typs a zerstört, und jene des Typs b erzeugt, während dies bei dem Feld ϕ^\dagger gerade umgekehrt ist. Die zugehörigen Zahloperatoren für Quanten des Typs a und b sind durch

$$N_a = \int d\tilde{k} a^\dagger(k) a(k), \quad N_b = \int d\tilde{k} b^\dagger(k) b(k) \quad (6.3.12)$$

definiert. Wir können den Zustandsraum daher auch nach Eigenzuständen von N_a und N_b zerlegen (statt nach Eigenzuständen von N_1 und N_2); wie wir gleich sehen werden ist diese Wahl natürlicher im Hinblick auf die schon oben erwähnte Ladung. Schliesslich ist der 4-er Impuls durch

$$P^\mu = \int d\tilde{k} k^\mu [a^\dagger(k) a(k) + b^\dagger(k) b(k)] \quad (6.3.13)$$

definiert; das Vakuum wird von $a(k)$ und $b(k)$ vernichtet, und trägt daher keinen 4-er Impuls.

Die obige U(1) Symmetrie führt vermöge Noethers Theorem zu dem erhaltenen Strom

$$j_\mu =: i\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi : \quad (6.3.14)$$

und daher zu der erhaltenen Ladung

$$\begin{aligned} Q &= \int d^3\mathbf{x} : i\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi : \\ &= \int d\tilde{k} [a^\dagger(k) a(k) - b^\dagger(k) b(k)] = N_a - N_b. \end{aligned} \quad (6.3.15)$$

Man rechnet leicht nach, dass

$$\dot{Q} = i[H, Q] = 0, \quad \partial_\mu j^\mu = 0. \quad (6.3.16)$$

Wir lesen daraus ab, dass die a -Quanten Ladung $+1$ tragen, während die b -Quanten Ladung -1 haben. Die beiden Typen spielen dabei eine symmetrische Rolle.

Es ist üblich, einen Typ von Quanten (sagen wir a) mit Teilchen zu identifizieren, den anderen (in diesem Fall b) mit Anti-Teilchen. [Statt von einem Anti-Teilchen könnten wir in gewissem Sinn auch von einem ‘Loch’ im Sinn der Dirac’schen Lochtheorie sprechen!] Die Symmetrie der Theorie verlangt, dass $m_a = m_b$, und weiterhin, dass Teilchen und Antiteilchen denselben Spin (hier Spin null) besitzen. Die diskrete Symmetrie, die Teilchen und Anti-Teilchen miteinander vertauscht wird ‘Ladungskonjugation’ genannt. In der obigen Beschreibung sind Teilchen und Anti-Teilchen in dem Feld ϕ (bzw. ϕ^\dagger) verbunden; insbesondere zeigt dies, dass es eine tiefe Beziehung zwischen den dynamischen Eigenschaften von Teilchen und Anti-Teilchen gibt.

6.3.1 Zeitgeordnete Produkte

Wie wir oben gesehen haben, erzeugt der Operator ϕ^\dagger Teilchen der Ladung $+1$, und vernichtet Anti-Teilchen der Ladung -1 . In jedem Fall erhöht es die Ladung um $+1$.

Entsprechend erniedrigt das Feld ϕ die Ladung um 1. Wir können daher die gemeinsame Wirkung von $\phi^\dagger(x)$ und $\phi(x')$, die die Ladung invariant lässt, auf zwei verschiedene Weisen interpretieren, je nachdem ob $t > t'$ oder $t' > t$: falls $t' > t$ erzeugen wir zuerst ein Teilchen zur Zeit t , das wir danach (zur Zeit t') wieder vernichten. Die zugehörige Amplitude ist der Erwartungswert des Operators

$$\theta(t' - t) \phi(t', \mathbf{x}') \phi^\dagger(t, \mathbf{x}) \quad (6.3.17)$$

beschrieben. Falls $t > t'$, erzeugen wir hingegen zuerst ein Anti-Teilchen, das dann wieder durch ϕ^\dagger absorbiert wird; die zugehörige Amplitude ist dann der Erwartungswert des Operators

$$\theta(t - t') \phi^\dagger(t, \mathbf{x}) \phi(t', \mathbf{x}'). \quad (6.3.18)$$

Die Summe der beiden Operatoren (6.3.17) und (6.3.18) ist gerade das sogenannte *zeitgeordnete Produkt*

$$\mathcal{T} \left(\phi(x') \phi^\dagger(x) \right) = \theta(t' - t) \phi(t', \mathbf{x}') \phi^\dagger(t, \mathbf{x}) + \theta(t - t') \phi^\dagger(t, \mathbf{x}) \phi(t', \mathbf{x}'), \quad (6.3.19)$$

das von Dyson eingeführt wurde. Es wird normalerweise mit dem Symbol \mathcal{T} bezeichnet. Unter der Zeitordnung \mathcal{T} vertauschen bosonische Operatoren (so wie ϕ und ϕ^\dagger).

Wir betrachten nun die Wirkung des Differentialoperators $\square_{x'} + m^2$ auf das zeitgeordnete Produkt (6.3.19). Diese Rechnung ist ein wenig delikater, da auch die θ -Funktion von t' abhängt; wir erwarten daher, dass das Resultat eine Distribution ist. Explizit finden wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \mathcal{T} \left(\phi(x') \phi^\dagger(x) \right) &= \frac{\partial}{\partial t'} \left[\mathcal{T} \left(\frac{\partial}{\partial t'} \phi(x') \phi^\dagger(t) \right) + \delta(t' - t) [\phi(x'), \phi^\dagger(x)] \right] \\ &= \mathcal{T} \left(\frac{\partial^2}{\partial t'^2} \phi(x') \phi^\dagger(t) \right) + \delta(t' - t) \left[\frac{\partial}{\partial t'} \phi(x'), \phi^\dagger(x) \right], \end{aligned}$$

wobei wir benützt haben, dass

$$\frac{\partial}{\partial t'} \theta(t' - t) = \delta(t' - t), \quad \frac{\partial}{\partial t'} \theta(t - t') = -\delta(t' - t), \quad (6.3.20)$$

sowie

$$\delta(t' - t) [\phi(x'), \phi^\dagger(x)] = i\delta(t' - t) \Delta(0, \mathbf{x}' - \mathbf{x}) = 0. \quad (6.3.21)$$

Nun gilt

$$\delta(t' - t) \left[\frac{\partial}{\partial t'} \phi(x'), \phi^\dagger(x) \right] = i\delta(t' - t) \frac{\partial}{\partial t'} \Delta(t' - t, \mathbf{x}' - \mathbf{x}) = -i\delta^{(4)}(x' - x), \quad (6.3.22)$$

wobei wir (6.2.42) benützt haben. Da $\phi(x')$ die Wellengleichung erfüllt, $\square_{x'} \phi(x') = 0$, gilt daher

$$\left(\square_{x'} + m^2 \right) \mathcal{T} \left(\phi(x') \phi^\dagger(x) \right) = -i\delta^{(4)}(x' - x). \quad (6.3.23)$$

Der Vakuumerwartungswert

$$G_F(x' - x) = i\langle 0|\mathcal{T}(\phi(x')\phi^\dagger(x))|0\rangle \quad (6.3.24)$$

ist daher eine Green'sche Funktion für den Klein-Gordon Differentialoperator, d.h. er erfüllt

$$(\square + m^2)G_F(x) = \delta^{(4)}(x). \quad (6.3.25)$$

Dieser Propagator wird der *Feynman Propagator* genannt. Man kann leicht nachrechnen (**Übungsaufgabe**), dass er sich als

$$G_F(x - y) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip\cdot(x-y)} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (6.3.26)$$

schreiben lässt. [Insbesondere zeigt diese Formel, dass $G_F(x) = G_F(-x)$.] Hier beschreibt der Term $i\epsilon$ wie die p_0 -Integrationskontour um den Pol bei $p_0^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ herumlaufen soll; damit ist das Integral eindeutig festgelegt. Falls $x^0 > 0$ schliessen wir nämlich die Kontour des p_0 -Integrals in der unteren Halbebene, und erhalten den positiven Frequenzterm; für $x^0 < 0$ schliessen wir die Kontour des p_0 -Integrals in der oberen Halbebene, und erhalten den negativen Frequenzterm. Zusammen finden wir daher

$$G_F(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_p} \left\{ \theta(x^0) e^{-i\omega_p x^0 + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \theta(-x^0) e^{i\omega_p x^0 + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right\}. \quad (6.3.27)$$

Im Gegensatz zu dem Vakuumerwartungswert des Kommutators $i\Delta(x-x')$ verschwindet daher der Feynman Propagator nicht ausserhalb des Vorwärtslichtkegels; zum Beispiel ist für $x^0 = 0$ und $r = |\mathbf{x}|$

$$\begin{aligned} G_F(0, r) &= \frac{1}{2(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp p}{\sqrt{p^2 + m^2}} e^{ipr} \\ &= \frac{i}{(2\pi)^2 r} \int_m^{\infty} d\rho \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - m^2}} e^{-\rho r} \sim \frac{ie^{-mr}}{(2\pi)^2 r^2} \left(\frac{\pi m r}{2}\right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (6.3.28)$$

wobei wir in der zweiten Gleichung $p = i\rho$ gesetzt haben und die Kontour um den Branch-cut, der bei $p = im$ beginnt und nach Unendlich läuft, gewickelt haben. Der Feynman Propagator beschreibt die Propagation eines Teilchens oder eines Anti-Teilchens, und wird in der späteren Formulierung der Feynman Regeln eine wichtige Rolle spielen. Erst wenn die Propagation von Teilchen und Anti-Teilchen zusammen betrachtet wird (so wie in der Berechnung des Kommutators), erhält man Funktionen, die für raumartige Abstände verschwinden.

6.3.2 Wick's Theorem

Mit Hilfe des Feynman Propagators können wir nun auch leicht Vakuumerwartungswerte beliebiger zeit-geordneter Produkte von Feldern berechnen, d.h. Ausdrücke der

Form¹

$$\langle 0 | \mathcal{T}(\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)) | 0 \rangle. \quad (6.3.29)$$

Die Zeitordnung ist hier in offensichtlicher Weise definiert: für gegebene x_1, \dots, x_n werden die Felder chronologisch geordnet, d.h.

$$\mathcal{T}(\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)) = \phi(x_{\pi(1)}) \cdots \phi(x_{\pi(n)}), \quad x_{\pi(1)}^0 > x_{\pi(2)}^0 > \cdots > x_{\pi(n)}^0. \quad (6.3.30)$$

Um den Vakuumerwartungswert dieses Produktes auszurechnen zerlegen wir das Feld $\phi(x)$ in seinen Erzeugungs- und Vernichtungsanteil

$$\phi(x) = \phi_-(x) + \phi_+(x), \quad (6.3.31)$$

wobei

$$\begin{aligned} \phi_-(x) &= \int d\tilde{k} a(k) e^{-ik \cdot x} \\ \phi_+(x) &= \int d\tilde{k} a^\dagger(k) e^{+ik \cdot x}. \end{aligned} \quad (6.3.32)$$

Nach Konstruktion gilt dann

$$\phi_-(x)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\phi_+(0) = 0. \quad (6.3.33)$$

Der Vakuumerwartungswert des zeit-geordneten Produktes zweier Felder ist daher also

$$\begin{aligned} \langle 0 | \mathcal{T}(\phi(x_1) \phi(x_2)) | 0 \rangle &= \theta(x_1^0 - x_2^0) \langle 0 | \phi_-(x_1) \phi_+(x_2) | 0 \rangle \\ &\quad + \theta(x_2^0 - x_1^0) \langle 0 | \phi_-(x_2) \phi_+(x_1) | 0 \rangle \\ &= \theta(x_1^0 - x_2^0) \langle 0 | [\phi_-(x_1), \phi_+(x_2)] | 0 \rangle \\ &\quad + \theta(x_2^0 - x_1^0) \langle 0 | [\phi_-(x_2), \phi_+(x_1)] | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Da die Kommutatoren der Felder gerade Zahlen sind, gilt daher also

$$-i G_F(x_1 - x_2) = \theta(x_1^0 - x_2^0) [\phi_-(x_1), \phi_+(x_2)] + \theta(x_2^0 - x_1^0) [\phi_-(x_2), \phi_+(x_1)], \quad (6.3.34)$$

was man natürlich auch direkt nachrechnen kann. Wir können diese Identität auch noch anders schreiben:

$$\mathcal{T}(\phi(x_1) \phi(x_2)) = \mathcal{N}(\phi(x_1) \phi(x_2) + \overline{\phi(x_1) \phi(x_2)}), \quad (6.3.35)$$

wobei $\mathcal{N}(\cdot)$ das normalgeordnete Produkt bezeichnet (bei dem alle Erzeugungsoperatoren links von den Vernichtungsoperatoren stehen), und

$$\overline{\phi(x_1) \phi(x_2)} = -i G_F(x_1 - x_2) \equiv D_F(x_1 - x_2) \quad (6.3.36)$$

¹Der Einfachheit halber betrachten wir hier nur den Fall des reellen Skalarfeldes.

ist. Die Verallgemeinerung zu n Feldern ist jetzt relativ offensichtlich:

$$\mathcal{T}(\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)) = \mathcal{N}(\phi(x_1) \cdots \phi(x_n) + \text{alle möglichen Kontraktionen}). \quad (6.3.37)$$

Diese Formel wird üblicherweise *Wick's Theorem* genannt. Man beweist sie leicht durch Induktion nach der Anzahl der Felder (**Übungsaufgabe**). Um die Definition von 'alle möglichen Kontraktionen' deutlich zu machen, schreiben wir den Fall $n = 4$ explizit aus:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4) = \mathcal{N} & \left(\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} \right. \\ & + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} \\ & \left. + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} \right). \end{aligned} \quad (6.3.38)$$

[Falls zwei Felder, die nicht direkt nebeneinander stehen, miteinander kontrahiert werden, definieren wir die Kontraktion immer noch durch den Feynman Propagator.] Bei der Berechnung des Vakuumerwartungswertes tragen dann nur jene Terme bei, bei denen jedes Feld kontrahiert ist (da der Vakuumerwartungswert eines normal-geordneten Produktes von Feldern immer verschwindet). Für den obigen Fall von vier Feldern sind das gerade die Terme in der letzten Zeile

$$\begin{aligned} \langle 0 | \mathcal{T}(\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4) | 0 \rangle = & D_F(x_1 - x_2) D_F(x_3 - x_4) + \\ & D_F(x_1 - x_3) D_F(x_2 - x_4) + \\ & D_F(x_1 - x_4) D_F(x_2 - x_3). \end{aligned} \quad (6.3.39)$$

Entsprechend kann man nun leicht die Vakuumerwartungswerte beliebiger zeit-geordneter Produkte von Feldern auswerten.

7 Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

Wir wollen nun die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes diskutieren. Im Prinzip funktioniert dies wie zuvor im Fall des skalaren Feldes; da das Feld jedoch Nebenbedingungen erfüllt, treten dabei einige neue Schwierigkeiten auf, die wir besprechen müssen. Es gibt verschiedene Verfahren, dieses Problem zu lösen; im folgenden wollen wir die *Gupta-Bleuler Methode* besprechen.

7.1 Indefinite Metrik

Wie wir zuvor in Kapitel 4.2 erklärt haben, kann man die Feldgleichungen der Elektrodynamik (die Maxwell Gleichungen) aus der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (7.1.1)$$

ableiten. [Wir betrachten hier zunächst den Fall, dass der externe Strom j^μ verschwindet, $j^\mu = 0$.] Hier ist $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, wobei A_μ das 4-er Potential ist. Wie wir in Kapitel 4.2 auch erklärt haben, ist diese Lagrangedichte für die Quantisierung nicht geeignet, da die zu A_0 konjugierte Impulsdichte verschwindet.

Um dieses Problem zu umgehen führen wir einen eichfixierenden Term in die Lagrangedichte ein

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} (\partial_\nu A^\nu)^2. \quad (7.1.2)$$

Die Bewegungsgleichungen, die aus dieser Lagrangedichte abgeleitet werden

$$\square A_\mu - (1 - \lambda) \partial_\mu (\partial \cdot A) = 0 \quad (7.1.3)$$

reproduzieren dann die Maxwell Gleichungen sobald wir die Nebenbedingung $(\partial \cdot A) = 0$ (d.h. die Lorentz Eichung) implementiert haben. Klassisch kann dies dadurch erreicht werden, dass $(\partial \cdot A)$ sowie seine Zeitableitung zum Beispiel für $t = 0$ zu Null gesetzt werden. In der Quantentheorie wird die Implementierung dieser Nebenbedingung (wie wir gleich sehen werden) etwas mehr Mühe bereiten. Insbesondere haben wir durch die Einführung von λ virtuelle Freiheitsgrade eingeführt; diese sind, wie wir gleich sehen werden, dafür verantwortlich, dass der volle Zustandsraum nicht mehr positiv definit ist. Um einen positiv definiten Zustandsraum zu erhalten (der für die Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Theorie essentiell ist) müssen wir am Schluss uns wiederum auf die physikalischen Freiheitsgrade einschränken.

Der Vorteil dieser modifizierten Lagrangedichte ist, dass die zu A_ρ kanonisch konjugierten Impulse

$$\pi^\rho = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\rho)} = F^{\rho 0} - \lambda g^{\rho 0} (\partial \cdot A) \quad (7.1.4)$$

nun alle nicht verschwinden. Wir postulieren nun die kanonischen Vertauschungsregeln

$$[A_\mu(t, \mathbf{x}), \pi^\nu(t, \mathbf{x}')] = i \delta_\mu^\nu \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (7.1.5)$$

Wir sehen nun sofort, dass die Implementierung der Nebenbedingung $(\partial \cdot A) = 0$ in der Quantentheorie nicht so einfach möglich ist: $(\partial \cdot A)$ ist nun ein Operator proportional zu π^0 , und die Operatorgleichung $(\partial \cdot A) = 0$ ist nicht mit der Vertauschungsregeln (7.1.5) kompatibel! Wir werden deshalb zunächst diese Nebenbedingung ignorieren.

Im Prinzip kann man λ beliebig ungleich null wählen; um die Präsentation zu vereinfachen wählen wir von nun $\lambda = 1$. In diesem Fall vereinfacht sich die Bewegungsgleichung (7.1.3) zu

$$\square A_\mu = 0. \quad (7.1.6)$$

Die Wahl $\lambda = 1$ wird manchmal als ‘Feynman Eichung’ bezeichnet (obgleich es sich dabei natürlich nicht um eine ‘Eichung’ im üblichen Sinn handelt).

Die Vertauschungsregeln (7.1.5) werden durch

$$[A_\mu(t, \mathbf{x}), A_\nu(t, \mathbf{x}')] = [\pi_\mu(t, \mathbf{x}), \pi_\nu(t, \mathbf{x}')] = 0 \quad (7.1.7)$$

komplettiert. Für $\lambda = 1$ gilt nun

$$\pi^0 = -\dot{A}^0 + \partial^i A^i, \quad \pi^i = -\dot{A}^i + \partial^i A^0. \quad (7.1.8)$$

Da die räumlichen Ableitungen von $A(t, \mathbf{x})$ miteinander (und mit $A(t, \mathbf{x}')$ wegen (7.1.7)) vertauschen, können wir die gesamten Vertauschungsrelationen auch als

$$\begin{aligned} [A_\mu(t, \mathbf{x}), A_\nu(t, \mathbf{x}')] &= [\dot{A}_\mu(t, \mathbf{x}), \dot{A}_\nu(t, \mathbf{x}')] = 0 \\ [A_\mu(t, \mathbf{x}), \dot{A}_\nu(t, \mathbf{x}')] &= -i g_{\mu\nu} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (7.1.9)$$

Die vier verschiedenen Komponenten von A erfüllen daher Vertauschungsregeln wie die skalaren Felder, die wir zuvor besprochen haben; der einzige (wie sich gleich zeigen wird wichtige) Unterschied besteht darin, dass im Kommutator der 0-Komponente das falsche Vorzeichen auftritt!

Wie zuvor entwickeln wir nun die Felder A_μ in ebenen Wellenlösungen der Bewegungsgleichung $\square A_\mu = 0$ (d.h. wir zerlegen sie nach Fourier Komponenten):

$$A_\mu(t, \mathbf{x}) = \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=0}^3 \left[a^{(\lambda)}(k) \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k) e^{-ik \cdot x} + a^{(\lambda)\dagger}(k) \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k) e^{ik \cdot x} \right], \quad (7.1.10)$$

wobei wie zuvor

$$d\tilde{k} = \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0}, \quad k_0 = |\mathbf{k}|. \quad (7.1.11)$$

Hier bezeichnen $\epsilon_\mu^{(\lambda)}(k)$ für jedes k auf dem positiven Lichtkegel vier linear unabhängige Vektoren, von denen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen können, dass sie reell sind. Das Symbol \dagger bezeichnet hermitesche Konjugation (bezüglich eines nicht-degenerierten Skalarprodukts). Die Felder A_μ beschreiben dann hermitesche Operatoren; das ist das Quantenanalogs davon, dass die klassischen Felder A_μ reell sind.

Um (7.1.10) genauer zu verstehen, wählen wir jetzt eine Basis für die Polarisationsvektoren $\epsilon_\mu^{(\lambda)}(k)$ in einem spezifischen Lorentzsystem. Sei $n = \epsilon^{(0)}(k)$ ein zeitartiger

Vektor, $n^2 = 1$ mit $n^0 > 0$. Wir wählen $\epsilon^{(1)}(k)$ und $\epsilon^{(2)}(k)$ in einer Ebene, die orthogonal zu k und n ist:

$$\epsilon^{(\lambda)}(k) \cdot k = \epsilon^{(\lambda)}(k) \cdot n = 0, \quad \lambda = 1, 2. \quad (7.1.12)$$

In diesem (2-dimensionalen) Vektorraum orthonormieren wir dann diese Vektoren

$$\epsilon^{(\lambda)}(k) \cdot \epsilon^{(\lambda')}(k) = -\delta_{\lambda, \lambda'}, \quad \lambda, \lambda' = 1, 2. \quad (7.1.13)$$

Schliesslich wählen wir $\epsilon^{(3)}(k)$ in der Ebene, die von n und k aufgespannt wird, und zwar so, dass $\epsilon^{(3)}(k)$ orthogonal zu n liegt:

$$\epsilon^{(3)}(k) \cdot n = 0, \quad (\epsilon^{(3)}(k))^2 = -1. \quad (7.1.14)$$

Explizit ist $\epsilon^{(3)}(k)$ daher gerade durch

$$\epsilon^{(3)}(k) = \frac{k - (n \cdot k)n}{(k \cdot n)} \quad (7.1.15)$$

gegeben, wobei wir bemerken, dass $k \cdot n \neq 0$, da n zeit-artig und k licht-artig ist. [Wir haben hier angenommen, dass $k \neq 0$.]

Die beiden Polarisationsvektoren $\epsilon^{(1)}$ und $\epsilon^{(2)}$ werden *transversal* genannt (da sie zu k orthogonal sind); $\epsilon^{(3)}$ wird *longitudinal* genannt (da der Vektor in der Ebene, die von n und k aufgespannt wird, liegt); und schliesslich wird $\epsilon^{(0)}$ *skalar* genannt. Falls $n = (1, 0, 0, 0)$ und $k = (1, 0, 0, 1)$, gilt dann zum Beispiel

$$\epsilon^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7.1.16)$$

Für jedes n und k gilt dann

$$\sum_{\lambda=0}^3 \frac{\epsilon_{\mu}^{(\lambda)}(k) \epsilon_{\nu}^{(\lambda)}(k)}{\epsilon^{(\lambda)}(k) \cdot \epsilon^{(\lambda)}(k)} = g_{\mu\nu}, \quad \text{und} \quad \epsilon^{(\lambda)}(k) \cdot \epsilon^{(\lambda')}(k) = g^{\lambda\lambda'}. \quad (7.1.17)$$

Die zweite Gleichung ist nach der Konstruktion der Polarisationsvektoren offensichtlich; um die erste Gleichung zu erhalten benutzen wir, dass die vier Polarisationsvektoren linear unabhängig sind, und dass wir daher jeden 4-er Vektor x als

$$x_{\mu} = \sum_{\lambda} \hat{x}_{\lambda} \epsilon_{\mu}^{(\lambda)}(k) \quad (7.1.18)$$

schreiben können; nach Kontraktion mit $\epsilon^{(\lambda')}$ gilt daher

$$\epsilon^{(\lambda')}(k) \cdot x = \hat{x}_{\lambda} g^{\lambda\lambda'} = g^{\lambda\lambda'} \hat{x}_{\lambda'}, \quad (7.1.19)$$

wobei in der letzten Gleichung keine Summation über λ' vorgenommen wird. Deshalb ist

$$x_\mu = \sum_\lambda \frac{\epsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \epsilon_\nu^{(\lambda)}(k) x^\nu}{g^{\lambda\lambda}}, \quad (7.1.20)$$

was dann gerade die erste Gleichung von (7.1.17) reproduziert.

Die Vertauschungsrelationen für die Felder A_μ sind nun zu den Vertauschungsrelationen der Moden

$$\begin{aligned} [a^{(\lambda)}(k), a^{(\lambda')}(k')] &= [a^{(\lambda)\dagger}(k), a^{(\lambda')\dagger}(k')] = 0 \\ [a^{(\lambda)}(k), a^{(\lambda')\dagger}(k')] &= -g^{\lambda\lambda'} 2k^0 (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \end{aligned} \quad (7.1.21)$$

äquivalent (**Übungsaufgabe**). Ausserdem zeigt man leicht, dass für beliebige Zeiten

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)] = -ig_{\mu\nu} \Delta(x - y), \quad (7.1.22)$$

wobei $\Delta(x)$ die oben in (6.2.39) eingeführte Funktion (mit $m = 0$) ist. Soweit erscheint alles gut zu funktionieren, da der Kommutator wiederum für raumartige Abstände verschwindet. Das Problem taucht jedoch nun auf, wenn wir den Fockraum konstruieren. Dazu führen wir wie zuvor einen Vakuumzustand ein, der dadurch charakterisiert ist, dass

$$a^{(\lambda)}(k)|0\rangle = 0, \quad \lambda = 0, 1, 2, 3. \quad (7.1.23)$$

Der Vakuumzustand wird so normiert, dass $\langle 0|0\rangle = 1$. Betrachte nun die 1-Teilchenzustände mit skalarer Polarisierung

$$|1\rangle = \int d^3\tilde{k} f(k) a^{(0)\dagger}(k)|0\rangle. \quad (7.1.24)$$

Das Normquadrat dieses Zustandes ist dann

$$\langle 1|1\rangle = \int d^3\tilde{k} \int d^3\tilde{k}' f(k)^* f(k') \langle 0|a^{(0)}(k) a^{(0)\dagger}(k')|0\rangle = -\langle 0|0\rangle \int d\tilde{k} |f(k)|^2, \quad (7.1.25)$$

und ist daher negativ; Zustände mit dieser Eigenschaft werden als *Geister* bezeichnet (da sie nicht physikalisch sind). Der Fockraum trägt daher eine indefinite Metrik! [Falls wir die obige Rechnung für die drei anderen Polarisierungen durchführen erhalten wir ein positives Resultat.]

Da der Zustandsraum nun eine indefinite Metrik besitzt, ist es nicht mehr klar, wie man die Amplituden als Wahrscheinlichkeiten interpretieren soll. Andererseits sollte es uns nicht verwundern, dass wir ein Problem bei dieser Vorgehensweise erhalten: wie wir oben erklärt haben, beschreibt die Theorie, die wir bisher betrachtet haben, nicht die (Quanten-)Elektrodynamik, da wir die Nebenbedingung $(\partial \cdot A) = 0$ (die Lorentz-Eichung) bisher ignoriert haben. Wie wir auch oben erklärt haben, ist es mit den Vertauschungsregeln inkompatibel $(\partial \cdot A) = 0$ als Operatoridentität zu verlangen. Aber wir sollen vielleicht verlangen, dass die physikalischen Zustände ψ die Lorentz-Eichung als Erwartungswert erfüllen, d.h.

$$\langle \psi | (\partial \cdot A) | \psi \rangle = 0. \quad (7.1.26)$$

Diese Gleichung ist jedoch nicht linear in ψ ; um die lineare Struktur des physikalischen Zustandsraumes zu erhalten, postulieren wir daher die ein wenig stärkere Bedingung,

$$\partial^\mu A_\mu^{(+)}|\psi\rangle = 0, \quad (7.1.27)$$

wobei $A_\mu^{(+)}$ der Anteil von A_μ mit positiven Frequenzen ist, d.h.

$$A_\mu^{(+)} = \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=0}^3 a^{(\lambda)}(k) \epsilon_\mu^{(\lambda)} e^{-ik \cdot x}. \quad (7.1.28)$$

Der relevante Operator ist daher

$$\partial^\mu A_\mu^{(+)} = \int d\tilde{k} e^{-ik \cdot x} \sum_{\lambda=0}^3 a^{(\lambda)}(k) \epsilon^{(\lambda)}(k) \cdot k. \quad (7.1.29)$$

Mit unserer obigen Wahl der Polarisationsvektoren trägt in der Summe über λ nur $\lambda = 0, 3$ bei, und die Bedingung (7.1.27) ist zu

$$\left[a^{(0)}(k) - a^{(3)}(k) \right] |\psi\rangle = 0 \quad \text{für alle } k \neq 0 \quad (7.1.30)$$

äquivalent. Transversale Zustände, d.h. Zustände, die durch die transversalen Erzeugungsoperatoren $a^{(1)\dagger}(k)$ und $a^{(2)\dagger}(k)$ aus dem Vakuum erzeugt werden, erfüllen offensichtlich diese Bedingung.

Wir wollen nun zeigen, dass das Skalarprodukt auf dem Unterraum des Fockraum, der durch (7.1.30) charakterisiert ist, positiv semidefinit ist. Dazu betrachten wir den Zahloperator (Geisterzahl) für die longitudinalen und skalaren Erzeugungsoperatoren

$$N' = \int d\tilde{k} \left[a^{(3)\dagger}(k) a^{(3)}(k) - a^{(0)\dagger}(k) a^{(0)}(k) \right]. \quad (7.1.31)$$

[Das Minuszeichen ist eine Folge des Minuszeichen in den Vertauschungsrelationen für die Moden $a^{(0)}$.] Falls $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ Eigenwerte

$$N'|\psi_i\rangle = n_i|\psi_i\rangle, \quad i = 1, 2 \quad (7.1.32)$$

haben, gilt

$$\langle \psi_1 | N' | \psi_2 \rangle = n_1 \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = n_2 \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle, \quad (7.1.33)$$

und daher ist $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = 0$ es sei denn, dass $n_1 = n_2$. Weiterhin beobachten wir, dass falls $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ die Bedingung (7.1.30) erfüllen

$$\begin{aligned} n \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle &= \langle \psi_1 | N' | \psi_2 \rangle \\ &= \int d\tilde{k} \langle \psi_1 | \left[a^{(3)\dagger}(k) a^{(3)}(k) - a^{(0)\dagger}(k) a^{(0)}(k) \right] | \psi_2 \rangle = 0, \end{aligned} \quad (7.1.34)$$

wobei $n = n_1 = n_2$, und wir benützt haben, dass

$$a^{(3)}(k)|\psi_2\rangle = a^{(0)}(k)|\psi_2\rangle, \quad \langle \psi_1 | a^{(3)\dagger}(k) = \langle \psi_1 | a^{(0)\dagger}(k). \quad (7.1.35)$$

Dies bedeutet, dass

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = 0, \quad (7.1.36)$$

es sei denn $n = n_1 = n_2 = 0$. In letzterem Fall enthält ψ_1 und ψ_2 nur transverse Erzeugungsoperatoren, und das Skalarprodukt ist daher offensichtlich positive semidefinite. Schliesslich beobachten wir, dass

$$\begin{aligned} a^{(3)\dagger}(k) a^{(3)}(k) &= a^{(0)\dagger}(k) a^{(0)}(k) \\ &= \left(a^{(3)\dagger}(k) - a^{(0)\dagger}(k) \right) a^{(0)}(k) + a^{(3)\dagger}(k) \left(a^{(3)}(k) - a^{(0)}(k) \right). \end{aligned}$$

Falls $|\phi\rangle$ (7.1.30) erfüllt und nicht-triviale Geisterzahl $n > 0$ hat, gilt

$$n|\phi\rangle = N'|\phi\rangle = \int d\tilde{k} \left(a^{(3)\dagger}(k) - a^{(0)\dagger}(k) \right) a^{(0)}(k) |\phi\rangle, \quad (7.1.37)$$

d.h. $|\phi\rangle$ liegt im Bild der Operatoren $(a^{(3)\dagger}(k) - a^{(0)\dagger}(k))$. Die Zustände $|\phi\rangle$ mit nicht-trivialer Geisterzahl, die (7.1.30) erfüllen, sind Ausdruck der residuellen Eichfreiheit,

$$A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \quad (7.1.38)$$

wobei $\square\Lambda = 0$. [Diese Eichtransformation modifiziert weder den Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$, noch ändert sie die Lorentz Eichbedingung $\partial_\mu A^\mu = 0$.] Falls

$$|\psi'\rangle = |\psi\rangle + |\phi\rangle, \quad (7.1.39)$$

wobei $|\psi\rangle$ ein physikalischer Zustand ist, so ist $\langle \psi' | \psi' \rangle = \langle \psi | \psi \rangle$, und

$$\langle \psi' | A^\mu(x) | \psi' \rangle = \langle \psi | A^\mu(x) | \psi \rangle + \partial^\mu \Lambda(x), \quad (7.1.40)$$

wobei $\square\Lambda = 0$. Zum Beweis bemerken wir zunächst, dass

$$\begin{aligned} [A^\mu(x), (a^{(3)\dagger}(k) - a^{(0)\dagger}(k))] &= \int d\tilde{k}' e^{-ik'\cdot x} \left([a^{(3)}(k') \epsilon^{(3)\mu}(k'), a^{(3)\dagger}(k)] \right. \\ &\quad \left. - [a^{(0)}(k') \epsilon^{(0)\mu}(k'), a^{(0)\dagger}(k)] \right) \\ &= e^{-ik\cdot x} \left(\epsilon^{(3)\mu}(k) + \epsilon^{(0)\mu}(k) \right). \end{aligned} \quad (7.1.41)$$

Da $\epsilon^{(0)} = n$, ist dann wegen (7.1.15)

$$\epsilon^{(3)\mu}(k) + \epsilon^{(0)\mu}(k) = \frac{k^\mu}{(k \cdot n)}. \quad (7.1.42)$$

Ausserdem können wir wegen (7.1.37) ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass ϕ sich als

$$|\phi\rangle = \left(a^{(3)\dagger}(k) - a^{(0)\dagger}(k) \right) a^{(0)}(k) |\chi\rangle \quad (7.1.43)$$

schreiben lässt.

Die Differenz der Erwartungswerte in (7.1.40) ist gerade

$$\Delta = \langle \psi | A^\mu(x) | \phi \rangle + \langle \phi | A^\mu(x) | \psi \rangle + \langle \phi | A^\mu(x) | \phi \rangle. \quad (7.1.44)$$

Der zweite Term ist gerade das komplex konjugierte des ersten Terms; es genügt daher, den ersten und dritten Term zu analysieren. Der dritte Term ist

$$\begin{aligned} \langle \phi | A^\mu(x) | \phi \rangle &= \langle \phi | [A^\mu(x), (a^{(3)\dagger}(k) - a^{(0)\dagger}(k))] a^{(0)}(k) | \chi \rangle \\ &= \frac{k^\mu}{(k \cdot n)} e^{-ik \cdot x} \langle \phi | a^{(0)}(k) | \chi \rangle = \partial^\mu \Lambda, \end{aligned} \quad (7.1.45)$$

wobei Λ einfach durch

$$\Lambda = e^{-ik \cdot x} \frac{i}{(k \cdot n)} \langle \phi | a^{(0)}(k) | \chi \rangle \quad (7.1.46)$$

gegeben ist. Offensichtlich ist Λ eine Lösung der Wellengleichung und beschreibt daher eine residuelle Eichtransformation. Die Analyse für den ersten Terme ist identisch.

Diese Analyse impliziert, dass wir zwei Zustände, die (7.1.30) erfüllen, identifizieren sollten, falls sie sich nur um Zustände mit nicht-trivialer Geisterzahl (die ebenfalls (7.1.30) erfüllen) unterscheiden. Der Raum der *physikalischen Zustände* ist daher der Quotientenraum

$$\mathcal{F}_{\text{phys}} = \{ |\psi\rangle \in \mathcal{F} : (a^{(0)}(k) - a^{(3)}(k)) |\psi\rangle = 0 \} / \sim, \quad (7.1.47)$$

wobei $|\psi\rangle \sim |\psi'\rangle$ falls $|\psi\rangle = |\psi'\rangle + |\phi\rangle$, wobei $|\phi\rangle$ nicht-triviale Geisterzahl hat (und ebenfalls (7.1.30) erfüllt). Das Skalarprodukt auf $\mathcal{F}_{\text{phys}}$ ist wohldefiniert, da es nicht von dem gewählten Repräsentanten in der Äquivalenzklasse abhängt (da $\langle \psi | \phi \rangle = 0$). Ein ausgezeichneter Repräsentant jeder Klasse ist der durch $N'|\psi\rangle = 0$ ausgezeichnete Vektor $|\psi\rangle$. Allerdings hängt dieser von der Wahl der Polarisierungen ab. Andererseits zeigt diese Wahl des Repräsentanten, dass das Skalarprodukt auf $\mathcal{F}_{\text{phys}}$ positiv definit ist! Ausserdem wird daraus klar, dass für den Raum der physikalischen Zustände nur die zwei transversen Polarisierungen eine Rolle spielen. Man muss jedoch betonen, dass der ganze (indefinite) Fockraum notwendig ist, um die Lokalitätseigenschaften der Theorie zu bewahren: longitudinale und skalare Polarisierungen tragen in intermediären Kanälen (wie wir später sehen werden) bei.

7.2 Der Propagator

Wie zuvor im Fall des Skalarfeldes sollte der Propagator der Vakuumerwartungswert des zeitgeordneten Produktes sein. Zeitordnung wird dabei wie zuvor durch

$$\mathcal{T}(A_\mu(x) A_\nu(y)) = \theta(x^0 - y^0) A_\mu(x) A_\nu(y) + \theta(y^0 - x^0) A_\nu(y) A_\mu(x) \quad (7.2.1)$$

definiert. Einsetzen der Entwicklung (7.1.10) und Benützung der Vertauschungsregeln (7.1.21) führt dann zu

$$\langle 0 | \mathcal{T}(A_\mu(x) A_\nu(y)) | 0 \rangle = ig_{\mu\nu} G_F(x - y)|_{m=0} = -ig_{\mu\nu} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2 + i\epsilon}. \quad (7.2.2)$$

Die verschiedenen Komponenten des Feldes A_μ sind hier unabhängig voneinander; das Vorzeichen für die 0-Komponente ist jedoch wieder umgekehrt. Für $m = 0$ kann man den Feynman Propagator explizit ausrechnen

$$G_F(x) = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 + i\epsilon} = \frac{1}{4i\pi^2} \frac{1}{x^2 - i\epsilon}. \quad (7.2.3)$$

Die obige Analyse wurde in der ‘Feynman Eichung’, d.h. für $\lambda = 1$ durchgeführt. Für allgemeines λ ist die Analyse komplizierter, da die verschiedenen Komponenten von A_μ nicht entkoppeln. Physikalische Resultate dürfen aber nicht von der Wahl von λ abhängen.

7.3 Massive Vektorfelder

In der Maxwell Theorie sind die Photonen masselos. (Dies ist äquivalent dazu, dass die elektromagnetischen Felder von unendlicher Reichweite sind). Der Umstand, dass diese Masse verschwindet, ist die Ursache für die sogenannte Infrarot-Katastrophe, nämlich dass unendlich viele Photonen kleinen Impulses abgestrahlt werden, wann immer ein geladenes Teilchen beschleunigt wird. Wir wollen nun analysieren, inwieweit eine kleine Masse für die Photonen dies beeinflussen würde. Von einem kinematischen Gesichtspunkt führt eine Masse dazu, dass auch der longitudinale Polarisationszustand physikalisch wird.

Klassisch werden massive Spin-1 Teilchen durch die sogenannten *Proca Gleichungen* für das 4-er Vektorfeld $A_\mu(x)$ beschrieben

$$\partial_\rho F^{\rho\nu} + \mu^2 A^\nu = 0, \quad F^{\rho\nu} = \partial^\rho A^\nu - \partial^\nu A^\rho. \quad (7.3.1)$$

Diese Gleichungen sind gerade die Bewegungsgleichungen, die aus der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2 + \frac{1}{2}\mu^2 A^2 \quad (7.3.2)$$

abgeleitet werden. [Man beachte das umgekehrte Minuszeichen für den Masseterm relativ zu $-(m^2/2)\phi^2$ im Fall des Skalarfeldes; dies hängt einfach damit zusammen, dass $A^2 = (A_0)^2 - (A_i)^2$.]

Die Divergenz der ersten Gleichung in (7.3.1) führt zu

$$\mu^2 \partial \cdot A = 0. \quad (7.3.3)$$

Falls $\mu \neq 0$ ist daher A_μ divergenzfrei und die Proca Gleichung ist einfach

$$(\square + \mu^2) A_\rho = 0, \quad \partial \cdot A = 0. \quad (7.3.4)$$

Der Umstand, dass $\partial \cdot A$ verschwindet, sorgt dafür, dass einer der vier Freiheitsgrade von A_μ in kovarianter Weise eliminiert wird. Insbesondere bedeutet dies, dass man die

Theorie einfach nach Elimination der skalaren Polarisation quantisieren kann. Dazu entwickelt man das Feld $A_\rho(x)$ nach Moden

$$A_\rho(x) = \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=1,2,3} \left[a^{(\lambda)}(k) \epsilon_\rho^{(\lambda)}(k) e^{-ik \cdot x} + a^{(\lambda)\dagger}(k) \epsilon_\rho^{(\lambda)}(k) e^{ik \cdot x} \right], \quad (7.3.5)$$

wobei $k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}$. Der Vektor k ist dann zeit-artig, und wir können $n = k/\mu$ in der Konstruktion der Polarisationsvektoren $\epsilon^{(\lambda)}$ wählen. Die drei orthonormierten Polarisationsvektoren $\epsilon^{(\lambda)}$ für $\lambda = 1, 2, 3$ sind dann alle zu k orthogonal; der obige Ansatz erfüllt daher die Nebenbedingung $\partial \cdot A = 0$, sowie natürlich die Wellengleichung (7.3.4).

Für dieses Feld postulieren wir nun die kanonischen Vertauschungsregeln, was gerade zu

$$[a^{(\lambda)}(k), a^{(\lambda')\dagger}(k')] = \delta_{\lambda\lambda'} 2k^0 (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (7.3.6)$$

führt. Der Kommutator

$$[A_\rho(x), A_\nu(y)] = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \epsilon(k^0) \delta(k^2 - \mu^2) e^{-ik \cdot (x-y)} \left(g_{\rho\nu} - \frac{k_\rho k_\nu}{\mu^2} \right), \quad (7.3.7)$$

ist kovariant (und verschwindet ausserhalb des Vorwärtslichtkegels), aber die naive Konstruktion eines zeit-geordneten Produktes führt nun zu einem nicht kovarianten Propagator

$$\langle 0 | \mathcal{T} (A_\rho(x) A_\nu(y)) | 0 \rangle = -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} \frac{g_{\rho\nu} - k_\rho k_\nu / \mu^2}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} - \frac{i}{\mu^2} \delta_{\rho 0} \delta_{\nu 0} \delta^{(4)}(x - y). \quad (7.3.8)$$

Der letzte Term ist nicht kovariant; er trägt jedoch nur für $x = y$ bei. Die Definition des zeit-geordneten Produktes ist natürlich für $x = y$ ein wenig willkürlich, und dieser nicht-kovariante Term spiegelt lediglich die Tatsache wieder, dass wir die Zeit-Ordnung falsch definiert haben. Insbesondere könnten wir den kovarianten Propagator dadurch definieren, dass wir diesen Term einfach weglassen.

Falls wir nicht an dem $\mu \rightarrow 0$ Limes interessiert sind, wäre dies eine befriedigende Vorgehensweise. Insbesondere führt die obige Beschreibung zu einem manifest positiv definiten Fockraum, in dem nur physikalische Zustände des massiven Spin 1 Teilchens auftreten.

Falls wir aber versuchen in dieser Beschreibung $\mu^2 = 0$ zu setzen, werden viele Ausdrücke singulär. Dies spiegelt einfach die Tatsache wieder, dass die Lagrangedichte $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2$ ohne einen eich-fixierenden Term für die Quantisierung ungeeignet ist. Wir sollten daher versuchen, auch im massiven Fall einen solchen Term einzuführen. Dazu betrachten wir die Stückelberg Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2 + \frac{1}{2}\mu^2 A^2 - \frac{1}{2}\lambda (\partial \cdot A)^2. \quad (7.3.9)$$

Falls $\lambda \neq 0$ ist der Limes $\mu \rightarrow 0$ nicht singulär. Die Euler-Lagrange Gleichungen dieser Lagrangedichte sind

$$(\square + \mu^2) A^\rho - (1 - \lambda) \partial^\rho (\partial \cdot A) = 0. \quad (7.3.10)$$

Falls wir nun die Divergenz dieser Gleichung betrachten, finden wir

$$\lambda \left[\square + \frac{\mu^2}{\lambda} \right] (\partial \cdot A) = 0. \quad (7.3.11)$$

Falls $\lambda \neq 0$, ist $\partial \cdot A$ ein Skalarfeld, das die Klein-Gordon Gleichung mit Massequadrat $m^2 = \mu^2/\lambda$ erfüllt. [Im Prinzip könnte hier m^2 negativ sein; wir wollen annehmen, dass dies nicht der Fall ist, d.h. wir wählen $\lambda > 0$.] Das Feld

$$A_\rho^T \equiv A_\rho + \frac{1}{m^2} \partial_\rho (\partial \cdot A) = A_\rho + \frac{\lambda}{\mu^2} \partial_\rho (\partial \cdot A) \quad (7.3.12)$$

ist dann divergenzfrei

$$\partial^\rho A_\rho^T = (\partial \cdot A) + \frac{\lambda}{\mu^2} \square (\partial \cdot A) = 0. \quad (7.3.13)$$

wie aus (7.3.11) folgt. Entsprechend können wir daher A_ρ in einen ‘transversen’ (Spin-1) Teil, und eine ‘skalaren’ Teil aufspalten

$$A_\rho = A_\rho^T - \frac{\lambda}{\mu^2} \partial_\rho (\partial \cdot A). \quad (7.3.14)$$

Das Feld A_ρ hat daher eine Modenentwicklung

$$\begin{aligned} A_\rho(x) = & \int \frac{d^3 k}{2 k^0 (2\pi)^3} \sum_{\lambda=1}^3 \left[a^{(\lambda)}(k) \epsilon_\rho^{(\lambda)}(k) e^{-ik \cdot x} + a^{(\lambda)\dagger}(k) \epsilon_\rho^{(\lambda)}(k) e^{ik \cdot x} \right] \Big|_{k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}} \\ & + \int \frac{d^3 k}{2 k^0 (2\pi)^3} \frac{k_\rho}{\mu} \left[a^{(0)}(k) e^{-ik \cdot x} + a^{(0)\dagger}(k) e^{ik \cdot x} \right] \Big|_{k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}}, \end{aligned}$$

wobei, wie zuvor, die Polarisationsvektoren relativ zu dem zeit-artigen Vektor $n \sim k$ gewählt sind.

Kanonische Quantisierung führt dann zu den Vertauschungsrelationen

$$[a^{(\lambda)}(k), a^{(\lambda')\dagger}(k')] = \delta_{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 2\sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (7.3.15)$$

wobei $\lambda, \lambda' = 1, 2, 3$, sowie

$$[a^{(0)}(k), a^{(0)\dagger}(k')] = -(2\pi)^3 2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'); \quad (7.3.16)$$

alle anderen Kommutatoren verschwinden. Das zeit-geordnete Produkt ist nun

$$\langle 0 | \mathcal{T} (A_\rho(x) A_\nu(y)) | 0 \rangle = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} \left(\frac{g_{\rho\nu} - k_\rho k_\nu / \mu^2}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} + \frac{k_\rho k_\nu / \mu^2}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \right), \quad (7.3.17)$$

wobei $m^2 = \mu^2/\lambda$. Der Kommutator ist andererseits

$$\begin{aligned} [A_\rho(x), A_\nu(y)] = & - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left\{ \left[\frac{1}{2 k^0} (e^{-ik \cdot (x-y)} - e^{ik \cdot (x-y)}) \left(g_{\rho\nu} - \frac{k_\rho k_\nu}{\mu^2} \right) \right]_{k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}} \right. \\ & \left. + \left[\frac{1}{2 k^0} (e^{-ik \cdot (x-y)} - e^{ik \cdot (x-y)}) \frac{k_\rho k_\nu}{\mu^2} \right]_{k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}} \right\}. \end{aligned}$$

In dieser Beschreibung sind also beide Ausdrücke automatisch Lorentz kovariant.

7.4 Casimir Energie

Es ist instruktiv, schon an dieser Stelle einen einfachen Effekt der Quantenelektrodynamik zu studieren, den sogenannten Casimir Effekt. Bis anhin haben wir die Felder immer im freien Raum betrachtet; wie wir jedoch bereits aus der klassischen Elektrodynamik wissen, gibt es oft Situationen, in denen andere Randbedingungen an die elektromagnetischen Felder gestellt werden (zum Beispiel in der Gegenwart von Leitern).

Betrachte zum Beispiel die einfache Konfiguration zweier grosser, paralleler Leiterplatten. [Dies ist die Konfiguration, die in der Originalarbeit von Casimir (1948) betrachtet wurde.] Wir nehmen an, dass diese Platten sich entlang der $x - y$ Ebene erstrecken, quadratisch sind (mit Kantenlänge L), und dass sie den Abstand $a \ll L$ (entlang der z -Achse) haben. Wir wollen die Feldenergie per Einheitsfläche dieser Konfiguration, relativ zum Vakuum, berechnen. Die Ableitung dieser Grösse (nach a) beschreibt dann die Kraft (pro Einheitsfläche), die auf diese Platten wirkt.

Dazu betrachten wir die Moden innerhalb des Volumens $V = L^2 a$, und ignorieren irgendwelche Beiträge von den Kanten. Wie wir oben gesehen haben, sind lediglich die beiden transversalen Moden des elektromagnetischen Feldes physikalisch (und tragen zu der Energie bei). Die Randbedingungen implizieren weiterhin, dass $E_x = E_y = B_z = 0$ an den beiden Rändern. Je nach der Richtung des Impulses \mathbf{k} sind dann nur eine oder beide transversalen Polarisierungen erlaubt: falls $k_z = 0$, dann ist k parallel zu der Platte, und lediglich eine der beiden Polarisierungen überlebt. [Zum Beispiel sei \mathbf{k} parallel zur x -Achse, $\mathbf{k} = k(1, 0, 0)$. Dann sind die transversen Polarisierung $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$; in diesem Fall ist B_z proportional zu $B_z \sim kA_y = 0$, und daher muss $A_y = 0$ sein.] Falls $k_z \neq 0$, sind hingegen beide transversalen Polarisierungen erlaubt; allerdings muss dann k_z quantisiert sein,

$$k_z = \frac{n\pi}{a}, n = 1, 2, \dots, \quad (7.4.1)$$

damit die Randbedingungen an beiden Rändern erfüllt sein können. [Zum Beispiel betrachte den Fall, dass $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$. Dann sind die beiden transversalen Polarisierungen $(1, 0, 0)$ und $(0, 1, 0)$; B_z verschwindet dann automatisch, und für E_x und E_y benötigen wir, dass $\partial_0 A^x = \partial_0 A^y = 0$ an den beiden Rändern; dies kann dadurch erreicht werden, dass wir die Lösungen für $k_z = \pm n\pi/a$ zusammenaddieren, so dass die Lösung gerade zu $\sin(\pi z/a)$ proportional ist. Insbesondere gibt es daher nur *eine* Lösung für $k_z = \pm n\pi/a$, die wir durch (7.4.1) mit $n = 1, 2, 3, \dots$ charakterisieren können.

Die Vakuumenergie des Feldes (die wir zuvor zu Null gesetzt hatten — siehe die Diskussion in Kapitel 6.1) ist dann einfach

$$E = \sum \frac{1}{2} \omega_\alpha = \frac{1}{2} \int L^2 \frac{d^2 k_\parallel}{(2\pi)^2} \left[|\mathbf{k}_\parallel| + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathbf{k}_\parallel^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (7.4.2)$$

Natürlich macht dieser Ausdruck (so wie er da steht) keinen Sinn, da das Integral divergiert. Um eine bedeutungsvolle Antwort zu erhalten, müssen wir davon die (ebenfalls unendliche) Vakuumenergie abziehen, die in demselben Volumen vorhanden wäre, falls

wir keine Randbedingungen gefordert hätten; diese ist gerade

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{1}{2} \int L^2 \frac{d^2 k_{\parallel}}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a dk_z}{2\pi} 2 \sqrt{\mathbf{k}_{\parallel}^2 + k_z^2} \\ &= \frac{1}{2} \int L^2 \frac{d^2 k_{\parallel}}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} dn 2 \sqrt{\mathbf{k}_{\parallel}^2 + n^2 \pi^2 / a^2}. \end{aligned} \quad (7.4.3)$$

Die relative Energie pro Einheitsfläche ist dann

$$\mathcal{E} = \frac{E - E_0}{L^2} = \frac{1}{2\pi} \int k dk \left(\frac{k}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{k^2 + n^2 \pi^2 / a^2} - \int_0^{\infty} dn \sqrt{k^2 + n^2 \pi^2 / a^2} \right), \quad (7.4.4)$$

wobei wir Polarkoordinaten eingeführt haben. Dieser Ausdruck macht immer noch keinen Sinn, da er UV-divergent ist, d.h. für grosse k divergiert. Diese Divergenz ist nicht physikalisch, da unsere Beschreibung des perfekten Leiters durch die oben erwähnten Randbedingungen für Wellenlängen, die kürzer als der Atomabstand in dem Leitermaterial sind, nicht vernünftig ist. Wir führen deshalb einen (glatten) cut-off ein, d.h. wir definieren eine Funktion $f(k)$, die für $k \leq k_m$ $f(k) = 1$ ist, und für $k \gg k_m$ verschwindet. [Hier ist k_m von der Grössenordnung des inversen Atomabstandes.] Mit der Ersetzung $u = a^2 k^2 / \pi^2$ können wir dann die relative Energie pro Einheitsfläche als

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{\pi^2}{4a^3} \int_0^{\infty} du \left[\frac{\sqrt{u}}{2} f\left(\frac{\pi}{a} \sqrt{u}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u + n^2} f\left(\frac{\pi}{a} \sqrt{u + n^2}\right) \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\infty} dn \sqrt{u + n^2} f\left(\frac{\pi}{a} \sqrt{u + n^2}\right) \right] \\ &= \frac{\pi^2}{4a^3} \left[\frac{1}{2} F(0) + F(1) + F(2) + \dots - \int_0^{\infty} dn F(n) \right] \end{aligned} \quad (7.4.5)$$

schreiben, wobei

$$F(n) = \int_0^{\infty} du \sqrt{u + n^2} f\left(\frac{\pi}{a} \sqrt{u + n^2}\right). \quad (7.4.6)$$

Die Vertauschung von Integration und Summation ist hier gerechtfertigt, da die cut-off Funktion dafür sorgt, dass nun die Integrale und Summen absolut konvergieren; insbesondere ist nach Konstruktion der cut-off Funktion, $F(n) \rightarrow 0$ falls $n \rightarrow \infty$. Wir können dann die sogenannte Euler-MacLaurin Formel benutzen

$$\frac{1}{2} F(0) + F(1) + F(2) + \dots - \int_0^{\infty} dn F(n) = \frac{1}{2!} B_2 F'(0) - \frac{1}{4!} B_4 F'''(0) + \dots, \quad (7.4.7)$$

wobei B_l die Bernoulli Zahlen sind, die durch

$$\frac{y}{e^y - 1} = \sum_{l=0}^{\infty} B_l \frac{y^l}{l!} \quad (7.4.8)$$

definiert sind. [Zum Beispiel ist $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, usw.] Nach der Substitution $s = u + n^2$ gilt

$$F(n) = \int_{n^2}^{\infty} ds \sqrt{s} f\left(\frac{\pi}{a}\sqrt{s}\right), \quad (7.4.9)$$

und daher ist

$$F'(n) = -2n^2 f\left(\frac{\pi n}{a}\right). \quad (7.4.10)$$

Die cut-off Funktion ist konstant gleich eins für kleine Argumente, und daher gilt $f(0) = 1$, $f^{(n)}(0) = 0$ für $n \geq 1$. Damit ist $F'(0) = 0$, $F'''(0) = -4$, und alle höheren Ableitungen von F verschwinden am Ursprung. Diese Aussagen sind unabhängig von der genauen Wahl der cut-off Funktion! Das Endresultat ist daher

$$\mathcal{E} = \frac{\pi^2}{a^3} \frac{B_4}{4!} = -\frac{\pi^2}{720 a^3}. \quad (7.4.11)$$

Die zugehörige Kraft per Einheitsfläche ist dann

$$\mathcal{F} = -\frac{\pi^2}{240 a^4}, \quad (7.4.12)$$

und sie wirkt anziehend. Diese (sehr kleine) Kraft wurde 1958 von Sparnay experimentell nachgewiesen!

Die Kraft ist eine Konsequenz der Fluktuationen des elektromagnetischen Feldes, die selbst im Vakuum stattfinden. (Dies zeigt wiederum, dass die Quantenfeldtheorie keine Ein-Teilchentheorie ist, sondern dass sie automatisch die Erzeugung und Vernichtung von Teilchen — hier Photonen — beschreibt.) Falls wir makroskopische Leiter einführen, ist ‘Arbeit’ nötig sein, um die geeigneten Randbedingungen an den Leitern zu implementieren, d.h. die resultierende Konfiguration hat eine andere Nullpunktenergie als das reine Vakuum; diese Differenz hängt vom Abstand der beiden Leiter ab, und führt daher zu der obigen Kraft.

8 Quantisierung des Dirac Feldes

Im Kapitel 4.1 haben wir die Dirac Gleichung besprochen. Dabei haben wir gesehen, dass diese auch Lösungen negativer Energie besitzt. Die Idee der Dirac'schen Löchertheorie bestand dann darin, dass im Vakuum alle Zustände negativer Energie besetzt sind. Diese Interpretation macht natürlich nur im Rahmen einer Vielteilchentheorie Sinn. In diesem Kapitel wollen wir diese Vielteilchentheorie systematisch (d.h. so wie wir das zuvor für das freie Skalarfeld und die Quantenelektrodynamik getan haben) konstruieren.

Die Quantentheorien, die wir bisher besprochen haben, führen zu Fockräumen, in denen die verschiedenen Anregungszustände beliebig häufig besetzt werden können. Andererseits ist klar, dass die Dirac'sche Löchertheorie darauf basiert, dass die 'Dirac Teilchen' dem Pauli Prinzip unterliegen (so dass in jedem Zustand maximal nur ein Teilchen sitzen kann). Um Anregungen zu konstruieren, die dem Pauli Prinzip genügen, müssen wir also unsere Vorgehensweise ein wenig modifizieren. Wir wollen das nun im Detail besprechen.

8.1 Antikommutatoren

Wir wollen nun die Dirac Gleichung analog zu der Elektrodynamik behandeln. Wie wir bereits in Kapitel 4.1 erklärt haben, folgt die Dirac Gleichung aus der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \left[\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi \right] - m \bar{\psi} \psi, \quad (8.1.1)$$

wobei ψ ein 4-dimensionaler Spaltenvektor ist, und $\bar{\psi}$ durch

$$\bar{\psi} \equiv (\gamma^0 \psi^*)^t = \psi^\dagger \gamma^0 \quad (8.1.2)$$

definiert ist. (Wir arbeiten weiterhin in der chiralen Darstellung der γ -Matrizen, für die γ^0 symmetrisch ist.) Wir können ψ und $\bar{\psi}$ als unabhängige Variable betrachten; Variation nach $\bar{\psi}$ ergibt dann gerade die Dirac Gleichung

$$i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \psi = 0. \quad (8.1.3)$$

Die kanonischen Impulse sind

$$\bar{\pi}^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} = -\frac{i}{2} \gamma^\mu \psi, \quad \pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu. \quad (8.1.4)$$

Da diese Impulse nicht von $\partial_0 \psi$ oder $\partial_0 \bar{\psi}$ abhängen, können wir nicht $\partial_0 \psi$ und $\partial_0 \bar{\psi}$ durch die Impulse ausdrücken und damit zu der Hamilton'schen Beschreibung übergehen. [Wir haben daher ein ähnliches Problem wie zuvor bei der Quantisierung der Elektrodynamik, wo $\pi^{00} = 0$ und wir daher $\partial_0 A_0$ nicht durch die zu A_0 konjugierte Impulsdichte ausdrücken konnten — vgl. die Diskussion in Kapitel 4.2.]

Wir wollen daher ein wenig anders vorgehen. Wir wollen annehmen, dass ψ und $\bar{\psi}$ quantisierte Operatoren sind, die auf einem Hilbertraum wirken. Dann können wir

analysieren, unter welchen Bedingungen die Generatoren der Poincaré Gruppe (die wir mittels von Noether's Theorem konstruieren können), die Felder ψ und $\bar{\psi}$ richtig transformieren. Da die Generatoren der Poincaré Gruppe durch ψ und $\bar{\psi}$ ausgedrückt werden können, wird uns diese Methode erlauben, die Vertauschungsregeln der Felder direkt abzuleiten. [Diese Methode funktioniert übrigens auch für die Feldtheorien, die wir bisher betrachtet haben: überprüfe dies für das freie Skalarfeld (**Übungsaufgabe**).] Wie wir in Kapitel 3.3.2 gesehen haben, ist der Energie-Impulstensor

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \partial^\nu \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \partial^\nu \psi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \\ &= -\frac{i}{2} \partial^\nu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial^\nu \psi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \\ &= \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}^\nu \psi. \end{aligned} \quad (8.1.5)$$

wobei wir die Dirac Gleichung benützt haben, die impliziert, dass $\mathcal{L} = 0$. Wir haben hier eine willkürliche Operatorenordnung angenommen, in dem wir $\bar{\psi}$ links von ψ geschrieben haben; unsere Vorgehensweise ist also heuristisch. Der Feldimpuls ist dann

$$P^\nu = \int_{x^0=0} d^3 \mathbf{x} T^{0\nu} = \frac{i}{2} \int_{x^0=0} d^3 \mathbf{x} \psi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\nu \psi. \quad (8.1.6)$$

Wir wollen nun die Vertauschungsregeln für die Felder ψ dadurch bestimmen, dass

$$\partial_\mu \psi(x) = i[P_\mu, \psi(x)], \quad (8.1.7)$$

d.h. dass die Impulsgeneratoren P_μ tatsächlich als Translationsgeneratoren auf den Feldern wirken.

Um dies bequem analysieren zu können, entwickeln wir das Feld ψ (so wie wir das auch zuvor für das freie Skalarfeld und das Vektorpotential getan haben) nach den ebenen Wellen Lösungen der Dirac-Gleichung. Diese sind von der Form

$$\psi(x) = u e^{-ip \cdot x}, \quad (8.1.8)$$

wobei $u \in \mathbb{C}^4$ und

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) u = (\not{p} - m) u = 0. \quad (8.1.9)$$

Multiplikation mit $(\not{p} + m)$ führt dann zu

$$\begin{aligned} 0 &= (\not{p} + m)(\not{p} - m) u = [p_\mu p_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu - m^2] u \\ &= \left[\frac{1}{2} p_\mu p_\nu \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} - m^2 \right] u = [p^2 - m^2] u, \end{aligned} \quad (8.1.10)$$

woraus folgt, dass p auf der Massenschale $p^2 = m^2$ liegen muss. Zu vorgegebenem \mathbf{p} gibt es dann immer zwei Lösungen, $p^0 = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Im folgenden nehmen wir immer an, dass $p^0 > 0$; die Lösung mit $p^0 < 0$ beschreiben wir dann durch

$$\psi(x) = v e^{ip \cdot x}, \quad (8.1.11)$$

wobei $p^2 = m^2$ mit $p^0 > 0$ und

$$(\not{p} + m)v = 0. \quad (8.1.12)$$

Die Eigenräume $\not{p} = \pm m$ sind je 2-dimensional, da $\text{sp}\not{p} = p_\mu \text{sp}(\gamma^\mu) = 0$. Wir wollen die ‘Polarisationsvektoren’ $u^{(\alpha)}(p)$ und $v^{(\alpha)}(p)$, wobei $\alpha = 1, 2$, geeignet normieren. Dazu beobachten wir zunächst, dass für $p = (m, \mathbf{0})$, die Bedingungen (8.1.9) und (8.1.12) einfach

$$(\gamma^0 - \mathbf{1}_4)u = 0, \quad (\gamma^0 + \mathbf{1}_4)v = 0 \quad (8.1.13)$$

sind. In der Weyldarstellung ist γ^0 hermitesch, und wir können die Eigenvektoren orthogonal (bezüglich des üblichen Skalarproduktes auf \mathbb{C}^4) wählen:

$$\begin{aligned} u^{(\alpha)*}(m, \mathbf{0}) \cdot u^{(\beta)}(m, \mathbf{0}) &= 2m \delta^{\alpha\beta} = v^{(\alpha)*}(m, \mathbf{0}) \cdot v^{(\beta)}(m, \mathbf{0}) \\ u^{(\alpha)*}(m, \mathbf{0}) \cdot v^{(\beta)}(m, \mathbf{0}) &= 0 = v^{(\alpha)*}(m, \mathbf{0}) \cdot u^{(\beta)}(m, \mathbf{0}). \end{aligned} \quad (8.1.14)$$

Sie bilden dann auch eine Basis der beiden Eigenräume

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1,2} u_\xi^{(\alpha)}(m, \mathbf{0}) u_\eta^{(\alpha)*}(m, \mathbf{0}) &= 2m \left(\frac{\mathbf{1} + \gamma^0}{2} \right)_{\xi\eta} \\ \sum_{\alpha=1,2} v_\xi^{(\alpha)}(m, \mathbf{0}) v_\eta^{(\alpha)*}(m, \mathbf{0}) &= 2m \left(\frac{\mathbf{1} - \gamma^0}{2} \right)_{\xi\eta}. \end{aligned} \quad (8.1.15)$$

Wegen (8.1.13) können wir (8.1.14) auch als

$$\bar{u}^{(\alpha)}(p) u^{(\beta)}(p) = 2m \delta^{\alpha\beta}, \quad \bar{v}^{(\alpha)}(p) v^{(\beta)}(p) = -2m \delta^{\alpha\beta}, \quad (8.1.16)$$

und

$$\bar{u}^{(\alpha)}(p) v^{(\beta)}(p) = 0 = \bar{v}^{(\alpha)}(p) u^{(\beta)}(p), \quad (8.1.17)$$

wobei $p = (m, \mathbf{0})$,

$$\bar{u} = (\gamma^0 u^*)^t \quad (8.1.18)$$

und entsprechend für \bar{v} . Die Gleichungen (8.1.15) sind dann in dieser Sprache

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1,2} u_\xi^{(\alpha)}(p) \bar{u}_\eta^{(\alpha)}(p) &= (\not{p} + m)_{\xi\eta} \\ \sum_{\alpha=1,2} v_\xi^{(\alpha)}(p) \bar{v}_\eta^{(\alpha)}(p) &= (\not{p} - m)_{\xi\eta}. \end{aligned} \quad (8.1.19)$$

Diese Beziehungen sind Lorentz-invariant im folgenden Sinn: sei Λ eine Lorentztransformation, die p auf p' abbildet, $p' = \Lambda p$. Dann folgt aus der Analyse von Kapitel 5.3, dass

$$S(\Lambda)(\not{p} - m) = S(\Lambda)(p_\nu \gamma^\nu - m) = (p_\nu \Lambda_\mu{}^\nu \gamma^\mu - m) S(\Lambda) = (\not{p}' - m) S(\Lambda). \quad (8.1.20)$$

Dies impliziert, dass wir $u^{(\alpha)}(p')$ durch

$$u^{(\alpha)}(\Lambda p) \equiv S(\Lambda) u^{(\alpha)}(p), \quad p = (m, \mathbf{0}), \quad (8.1.21)$$

definieren können, da dann

$$(\not{A}p - m) u^{(\alpha)}(\Lambda p) = (\not{A}p - m) S(\Lambda) u^{(\alpha)}(p) = S(\Lambda) (\not{p} - m) u^{(\alpha)}(p) = 0. \quad (8.1.22)$$

Entsprechendes gilt natürlich auch für $v^{(\alpha)}(p')$, d.h. wir definieren entsprechend

$$v^{(\alpha)}(\Lambda p) \equiv S(\Lambda) v^{(\alpha)}(p), \quad p = (m, \mathbf{0}). \quad (8.1.23)$$

Die Gleichungen (8.1.16), (8.1.17) und (8.1.19) gelten dann auch für allgemeines p . Zum Beispiel rechnet man leicht nach, dass

$$\bar{u}^{(\alpha)}(p') u^{(\beta)}(p') = \bar{u}^{(\alpha)}(p) \gamma^0 S(\Lambda)^* \gamma^0 S(\Lambda) u^{(\beta)}(p) = 2m \delta^{\alpha\beta}, \quad (8.1.24)$$

wobei wir benützt haben (vgl. die Diskussion in Kapitel 5.3.1), dass

$$\gamma^0 S(\Lambda)^* \gamma^0 = S(\Lambda)^{-1}. \quad (8.1.25)$$

Die anderen Identitäten können auf ähnliche Weise bewiesen werden. Ausserdem gilt

$$u^{(\alpha)*}(p) \cdot u^{(\beta)}(p) = 2p^0 \delta^{\alpha\beta} = v^{(\alpha)*}(p) \cdot v^{(\beta)}(p). \quad (8.1.26)$$

Um dies zu sehen beobachten wir, dass nach Konstruktion von $u^{(\alpha)}(p)$ gilt $\not{p} u^{(\beta)}(p) = m u^{(\beta)}(p)$, $\bar{u}^{(\alpha)}(p) \not{p} = m \bar{u}^{(\alpha)}(p)$. Daher ist der linke Ausdruck von (8.1.26)

$$u^{(\alpha)*}(p) \cdot u^{(\beta)}(p) = \bar{u}^{(\alpha)}(p) \gamma^0 u^{(\beta)}(p) = \frac{1}{2m} \bar{u}^{(\alpha)}(p) \{\gamma^0, \not{p}\} u^{(\beta)}(p) = 2p^0 \delta^{\alpha\beta}, \quad (8.1.27)$$

was damit (8.1.26) beweist.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun ψ nach diesen Lösungen entwickeln

$$\psi(x) = \sum_{\alpha=1,2} \int d\tilde{p} \left(b_{\alpha}(p) u^{(\alpha)}(p) e^{-ip \cdot x} + d_{\alpha}^{\dagger}(p) v^{(\alpha)}(p) e^{ip \cdot x} \right). \quad (8.1.28)$$

Hier ist $d\tilde{p}$ wie zuvor durch

$$d\tilde{p} = \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0}, \quad (8.1.29)$$

wobei $p = (p^0, \mathbf{p})$ und $p^0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$. Die Moden $b_{\alpha}(p)$ und $d_{\alpha}^{\dagger}(p)$ werden in der Quantentheorie wiederum zu Operatoren. Da die kanonische Quantisierung aus den oben erläuterten Gründen nicht möglich ist, wollen wir ihre Vertauschungsregeln aus der Bedingung (8.1.7) ableiten. Dazu müssen wir zunächst den Operator P^{ν} durch diese Moden ausdrücken. Für $x^0 = 0$ gilt

$$\psi(0, \mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1,2} \int d\tilde{p} \left(b_{\alpha}(p) u^{(\alpha)}(p) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + d_{\alpha}^{\dagger}(p) v^{(\alpha)}(p) e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \right). \quad (8.1.30)$$

Damit erhalten wir nach einer kleinen Rechnung für P^{ν}

$$P^{\nu} = \sum_{\alpha=1,2} \int d\tilde{p} p^{\nu} \left(b_{\alpha}^{\dagger}(p) b_{\alpha}(p) - d_{\alpha}(p) d_{\alpha}^{\dagger}(p) \right). \quad (8.1.31)$$

Dieser Ausdruck muss natürlich noch normalgeordnet werden. Wie zuvor wollen wir postulieren, dass das Vakuum $|0\rangle$ dadurch ausgezeichnet ist, dass

$$b_\alpha(p)|0\rangle = d_\alpha(p)|0\rangle = 0. \quad (8.1.32)$$

Um den obigen Ausdruck für P^ν normalzuordnen, müssen wir dann die Reihenfolge von $d_\alpha(p)$ und $d_\alpha^\dagger(p)$ vertauschen; falls diese Moden *Kommutatorregeln* erfüllen, dann würde dies (nach Abzug einer vermutlich unendlichen Normalordnungskonstanten) zu

$$P^\nu = \sum_{\alpha=1,2} \int d\tilde{p} p^\nu \left(b_\alpha^\dagger(p) b_\alpha(p) - d_\alpha^\dagger(p) d_\alpha(p) \right) \quad (8.1.33)$$

führen — für die Gesamtenergie P^0 würden dann die b -Teilchen und d -Teilchen mit unterschiedlichen Vorzeichen beitragen, und die Theorie wäre nicht stabil. [Diese Schlussfolgerung ist übrigens unabhängig davon, ob ich $d_\alpha(p)$ oder $d_\alpha^\dagger(p)$ zu Vernichtungsoperatoren deklariere; die obige Schwierigkeit hängt nur damit zusammen, dass ich angenommen habe, dass die d -Generatoren gewöhnlich Vertauschungsregeln besitzen!] Diese Beobachtung suggeriert daher, dass die d -Moden *Anti-Kommutatorregeln* erfüllen müssen. [Der Anti-Kommutator zweier Operatoren ist durch

$$\{A, B\} = (AB + BA) \quad (8.1.34)$$

definiert.] Falls also d und d^\dagger eine solche Anti-Kommutatorregel erfüllen, dann erhält man statt (8.1.33) nach Abzug der entsprechenden Normalordnungskonstanten den Ausdruck

$$P^\nu = \sum_{\alpha=1,2} \int d\tilde{p} p^\nu \left(b_\alpha^\dagger(p) b_\alpha(p) + d_\alpha^\dagger(p) d_\alpha(p) \right). \quad (8.1.35)$$

In diesem Fall ist dann das Spektrum des Energieoperators P^0 beschränkt!

Wir wollen nun zeigen, dass diese Idee das Stabilitätsproblem zu lösen tatsächlich mit unserer ursprünglichen Vorgehensweise verträglich ist. [Wir wollten ja die Vertauschungsregeln dadurch bestimmen, dass die Noether Generatoren P^ν die Translationen generieren.] Man rechnet leicht nach, dass die Bedingung (8.1.7) genau dann erfüllt ist, falls

$$\begin{aligned} \left[\sum_{\beta} \left(b_\beta^\dagger(q) b_\beta(q) + d_\beta^\dagger(q) d_\beta(q) \right), b_\alpha(p) \right] &= -(2\pi)^3 2 p^0 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) b_\alpha(p), \\ \left[\sum_{\beta} \left(b_\beta^\dagger(q) b_\beta(q) + d_\beta^\dagger(q) d_\beta(q) \right), d_\alpha^\dagger(p) \right] &= (2\pi)^3 2 p^0 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) d_\alpha^\dagger(p). \end{aligned} \quad (8.1.36)$$

Falls wir annehmen, dass

$$[d_\beta(q) d_\beta^\dagger(q), b_\alpha(p)] = [b_\beta^\dagger(q) b_\beta(q), d_\alpha^\dagger(p)] = 0 \quad (8.1.37)$$

dann kann man die Bedingung als

$$\sum_{\beta} \left(b_\beta^\dagger(q) \{b_\beta(q), b_\alpha(p)\} - \{b_\beta^\dagger(q), b_\alpha(p)\} b_\beta(q) \right) = -(2\pi)^3 2 p^0 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) b_\alpha(p) \quad (8.1.38)$$

schreiben, sowie einer entsprechenden Gleichung für $d_\alpha^\dagger(p)$,

$$\sum_\beta \left(d_\beta^\dagger(q) \{d_\beta(q), d_\alpha^\dagger(p)\} - \{d_\beta^\dagger(q), d_\alpha^\dagger(p)\} d_\beta(q) \right) = (2\pi)^3 2p^0 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) d_\alpha^\dagger(p). \quad (8.1.39)$$

[Natürlich hätte man diese Bedingungen auch als Kommutatoren umschreiben können; da wir aber bereits gesehen haben, dass Kommutatoren dazu führen, dass das Energiespektrum der Theorie nicht nach unten beschränkt ist, wollen wir nun versuchen, (8.1.7) durch Anti-Kommutatoren zu lösen.]

Dies suggeriert dann, dass die richtigen Vertauschungsregeln einfach

$$\{b_\alpha(p), b_\beta^\dagger(q)\} = (2\pi)^3 2p^0 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \delta_{\alpha\beta} = \{d_\alpha(p), d_\beta^\dagger(q)\} \quad (8.1.40)$$

sind. Die übrigen Anti-Kommutatoren, wie zum Beispiel

$$\{b_\alpha(p), b_\beta(q)\} = \{b_\alpha(p), d_\beta(q)\} = \{b_\alpha(p), d_\beta^\dagger(q)\} = 0 \quad (8.1.41)$$

usw. verschwinden. [Man beachte, dass dies dann mit (8.1.37) verträglich ist!] Die Vertauschungsregeln können kompakt durch die Felder ψ und $\bar{\psi}$ ausgedrückt werden: diese erfüllen nämlich

$$\{\psi_\xi(t, \mathbf{x}), \psi_\eta(t, \mathbf{x}')\} = 0 = \{\bar{\psi}_\xi(t, \mathbf{x}), \bar{\psi}_\eta(t, \mathbf{x}')\} \quad (8.1.42)$$

sowie

$$\{\psi_\xi(t, \mathbf{x}), \psi_\eta^\dagger(t, \mathbf{y})\} = \delta_{\xi\eta} \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \quad (8.1.43)$$

[Hier bezeichnen ξ und η die Komponenten der 4-er Vektoren ψ und $\bar{\psi}$.] Diese Relationen sind das natürliche Analogon der kanonischen Vertauschungsregeln im bosonischen Fall. Insbesondere können wir $i\psi^\dagger$ als das zu ψ konjugierte Feld betrachten, so wie man das auch aus der Lagrangedichte ableiten würde. Der wichtige Unterschied zu dem, was wir zuvor gemacht haben, besteht aber nun darin, dass die ‘kanonischen Vertauschungsregeln’ jetzt den Anti-Kommutator (und nicht den Kommutator) involvieren.

Die Normalordnung (oder Wick Ordnung) für fermionische Generatoren involviert nun ein Vorzeichen

$$: d_\alpha(p) d_\beta^\dagger(q) := -d_\beta^\dagger(q) d_\alpha(p). \quad (8.1.44)$$

Mit dieser Definition können wir dann die Impulsgeneratoren in der üblichen Weise als

$$P_\nu = \frac{i}{2} \int_{x^0=0} : \psi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_\nu \psi := \sum_{\alpha=1,2} \int d\tilde{p} p_\nu : \left(b_\alpha^\dagger(p) b_\alpha(p) - d_\alpha(p) d_\alpha^\dagger(p) \right) : \quad (8.1.45)$$

schreiben.

8.2 Der Fockraum

Der Fockraum der Theorie wird durch die Wirkung der Erzeugungsoperatoren $b_\alpha^\dagger(p)$ und $d_\alpha^\dagger(p)$ aus dem Vakuum erzeugt. Da $\alpha = 1, 2$, gibt es vier 1-Teilchenzustände

$$|1\rangle = b_1^\dagger(p)|0\rangle, \quad |2\rangle = b_2^\dagger(p)|0\rangle, \quad |3\rangle = d_1^\dagger(p)|0\rangle, \quad |4\rangle = d_2^\dagger(p)|0\rangle. \quad (8.2.1)$$

[Um normalisierbare Zustände zu erhalten, muss man diese Zustände im Impulsraum geeignet verschmieren; dies soll im folgenden ignoriert werden.] Diese Zustände haben Impulswert

$$P^\nu|a\rangle = p^\nu|a\rangle, \quad a = 1, 2, 3, 4. \quad (8.2.2)$$

Um diese Zustände weiter zu unterscheiden, betrachten wir den Ladungsoperator, d.h. das Integral der Null-Komponente des in Kapitel 4.1 eingeführten Stromes

$$\begin{aligned} Q &= \int_{x^0=0} d^3\mathbf{x} j^0 = \int_{x^0=0} d^3\mathbf{x} : \psi^\dagger(x) \psi(x) : \\ &= \int d\tilde{p} \sum_{\alpha=1,2} \left[b_\alpha^\dagger(p) b_\alpha(p) - d_\alpha^\dagger(p) d_\alpha(p) \right]. \end{aligned} \quad (8.2.3)$$

Da das Vakuum Ladung Null besitzt, und da

$$[Q, b_\alpha^\dagger(p)] = b_\alpha^\dagger(p), \quad [Q, d_\alpha^\dagger(p)] = -d_\alpha^\dagger(p), \quad (8.2.4)$$

gilt

$$Q|a\rangle = \begin{cases} +|a\rangle & a = 1, 2 \\ -|a\rangle & a = 3, 4. \end{cases} \quad (8.2.5)$$

Im Gegensatz zur vorigen klassischen Behandlung, wo die Ladung manifest positiv ist, gilt das in der Quantenfeldtheorie nicht mehr. Die Benützung von Anti-Kommutatoren hat die Situation nachhaltig geändert: die Energie ist nun positiv, aber die Ladung hat kein bestimmtes Vorzeichen mehr!

Die vier Einteilchenzustände $|a\rangle$ lassen sich daher paarweise unterscheiden: zwei der Zustände haben positive Einheitsladung ($a = 1, 2$), während die anderen beiden ($a = 3, 4$) negative Einheitsladung tragen. Dirac's Quantentheorie beschreibt daher Teilchen zweier Typen. In der Quantenelektrodynamik (in der die durch ψ und $\bar{\psi}$ beschriebenen Freiheitsgrade Elektronen und Positronen entsprechen) beschreibt Q die elektrische Ladung. Da $[Q, P^\nu] = 0$ ist diese Ladung zeitunabhängig. Weiterhin gilt $[Q, \psi(x)] = -\psi(x)$ und $[Q, \bar{\psi}(x)] = +\bar{\psi}(x)$; ψ erzeugt daher Elektronen oder vernichtet Positronen, wohingegen $\bar{\psi}$ Positronen erzeugt oder Elektronen vernichtet.

Die übrigen (Mehrteilchen) Zustände des Fockraums sind von der Form

$$a^\dagger(1) \cdots a^\dagger(n)|0\rangle, \quad (8.2.6)$$

wobei wir $a^\dagger(l)$ summarisch für $b_\alpha^\dagger(p)$ oder $d_\alpha^\dagger(p)$ steht. Da diese Erzeugungsoperatoren anti-kommutieren, haben die zugehörigen Zustände eine 'Wellenfunktion', die *antisymmetrisch* in den Argumenten ist. (Vgl. dazu die Diskussion in Kapitel 6.2.) Insbesondere verschwindet der obige Zustand, falls zwei der Erzeugungsoperatoren gleich sind. Dies reproduziert gerade das Pauliprinzip: die Quantisierung mit Anti-Kommutatoren führt natürlicherweise zur Fermi-Dirac Statistik.

8.3 Der Propagator und Spin-Statistik

Die Anti-Kommutatorrelationen implizieren sofort, dass

$$\{\psi(x), \psi(x')\} = 0, \quad \{\bar{\psi}(x), \bar{\psi}(x')\} = 0. \quad (8.3.1)$$

[Im Gegensatz zu (8.1.42) sind hier x und x' beliebige Raumzeitpunkte, die nicht notwendigerweise eine gleiche Nullkomponente besitzen.] Die Verallgemeinerung von (8.1.43) zu beliebigen Raumzeitpunkten führt dann zu

$$\{\psi_\xi(x), \bar{\psi}_\eta(y)\} = \int d\tilde{p} \sum_\alpha \left[e^{-ip \cdot (x-y)} u_\xi^{(\alpha)}(p) \bar{u}_\eta^{(\alpha)}(p) + e^{+ip \cdot (x-y)} v_\xi^{(\alpha)}(p) \bar{v}_\eta^{(\alpha)}(p) \right]. \quad (8.3.2)$$

Unter Benutzung von (8.1.19) findet man dann

$$\{\psi_\xi(x), \bar{\psi}_\eta(y)\} = (\not{\partial}_x + m)_{\xi\eta} i\Delta(x-y), \quad (8.3.3)$$

wobei $\Delta(x-y)$ die zuvor in (6.2.39) eingeführte Funktion ist. Diese Funktion verschwindet, falls x und y raumartig getrennt sind, und daher gilt auch das Gleiche für den Anti-Kommutator von ψ und $\bar{\psi}$. Falls wir $x^0 = y^0$ wählen reduziert sich (8.3.3) zu

$$\{\psi_\xi(t, \mathbf{x}), \bar{\psi}_\eta(t, \mathbf{y})\} = -\gamma_{\xi\eta}^0 \partial_0 \Delta(x^0 - y^0, \mathbf{x} - \mathbf{y})|_{x^0=y^0} = \gamma_{\xi\eta}^0 \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (8.3.4)$$

Dies reproduziert dann gerade (8.1.43).

Die Form der Kausalität, die durch (8.3.3) beschrieben wird, ist physikalisch sinnvoll. [Man würde ja zunächst denken, dass weiterhin der *Kommutator* der Felder geeignete Kausalitätseigenschaften besitzen müsse — schliesslich sollen ja physikalische Messungen, die sich nicht beeinflussen können, miteinander vertauschen!] Der Grund dafür besteht darin, dass die Felder ψ und $\bar{\psi}$ nicht direkt observabel sind. [Wie wir später sehen werden, beschreiben sie keine eich-invariante Grössen.] Die Observablen involvieren immer gerade Potenzen der Felder, und für jene impliziert dann die obige Form der Kausalität dass sie bei raumartigen Abständen vertauschen! (Dies ist im wesentlichen eine Folge davon, dass $[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, B\}C$.)

Man könnte sich auch fragen, was passiert wäre, wenn man die kanonische Kommutatorrelation (statt der Anti-Kommutatorrelation) für die Felder ψ und $i\psi^\dagger$ postuliert hätte. Wie wir schon zuvor gesehen haben, würde dann das Energiespektrum nach unten unbeschränkt sein. Die Ableitung des Energieoperators war jedoch ein wenig heuristisch, und wir könnten einfach (8.1.35) postulieren. Dann wäre jedoch der Kommutator von $\psi(x)$ und $\bar{\psi}(x')$ nicht durch (8.3.2) gegeben, sondern durch den Ausdruck, wo ein relatives Vorzeichen zwischen den beiden Termen auf der rechten Seite auftritt. [Damit (8.1.36) weiterhin gilt, muss man in der Kommutatorrelation für d ein Vorzeichen (relativ zu jener von b) einführen.] Der resultierende Ausdruck für den Kommutator von ψ und $\bar{\psi}$ würde dann nicht bei raum-artigen Abständen verschwinden; Lokalität wäre daher verletzt!

Dieser Zusammenhang zwischen Spin (das Dirac-Fermion hat halb-zahligen Spin) und Statistik (Lokalität und Stabilität verlangen, dass wir es durch Anti-Kommutatoren

quantisieren) gilt allgemeiner (*Spin-Statistik Theorem*): in einer lokalen relativistischen Quantenfeldtheorie müssen Felder mit halb-ganzen Spin nach der Fermi-Dirac Statistik (d.h. mittels Anti-Kommutatoren) und Felder mit ganzzahligem Spin nach der Bose-Statistik (d.h. mittels Kommutatoren) quantisiert werden. Dies kann allgemein in einer axiomatischen Formulierung (zum Beispiel durch die Wightman Axiome) bewiesen werden [Pauli (1940), Jost (1957)].

Zum Abschluss dieses Kapitels führen wir noch das *zeit-geordnete Produkt* von zwei Dirac-Feldern ein:

$$\mathcal{T}(\psi_\xi(x) \bar{\psi}_\eta(y)) = \theta(x^0 - y^0) \psi_\xi(x) \bar{\psi}_\eta(y) - \theta(y^0 - x^0) \bar{\psi}_\eta(y) \psi_\xi(x). \quad (8.3.5)$$

[Wie schon zuvor in der Definition des Fock-Produktes tritt hier ein relatives Vorzeichen auf — es reflektiert wiederum, dass diese Felder Antikommutationsrelationen erfüllen, und nicht Kommutationsrelationen.] Der Vakuumerwartungswert des zeitgeordneten Produktes liefert nun den sogenannten Feynman-Propagator (**Übungsaufgabe**)

$$\begin{aligned} iS_F(x-y)_{\xi\eta} &\equiv \langle 0 | \mathcal{T}(\psi_\xi(x) \bar{\psi}_\eta(y)) | 0 \rangle \\ &= i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} \left(\frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \right)_{\xi\eta}. \end{aligned} \quad (8.3.6)$$

Man rechnet leicht nach, dass man ihn durch den bosonischen Feynman Propagator $G_F(x)$, der zuvor in Kapitel 6.3 aufgetreten ist,

$$S_F(x) = -(i\not{\partial} + m) G_F(x) = (i\not{\partial} + m) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (8.3.7)$$

ausdrücken kann. Dieser Feynman Propagator wird später für die Beschreibung der Störungsrechnung eine wichtige Rolle spielen.

9 Streuprozesse

Die typischen Experimente der Hochenergiephysik sind Streuexperimente. Dabei lässt man zwei Teilchenstrahlen kollidieren, und beobachtet, welche Teilchen dabei produziert werden. Lange bevor die Teilchen zusammenstossen können wir die Teilchen im Teilchenstrahl als freie Teilchen behandeln; der zugehörige Zustandsraum kann daher durch einen Fockraum (so wie wir ihn oben in einigen Beispielen untersucht haben) beschrieben werden. Während der Wechselwirkung treten komplizierte Prozesse auf: die verschiedenen Teilchen streuen aneinander, sie annihilieren sich oder kreieren neue Teilchen, *usw.* Lange nach dem alle diese Wechselwirkungen stattgefunden haben, erscheinen dann wiederum Teilchen, die typischerweise in unterschiedliche Richtungen auseinanderfliegen, und deshalb einen grossen Abstand voneinander haben. Diese Teilchen können wir daher wieder als freie Teilchen behandeln, und wiederum durch Zustände in einem Fockraum beschreiben. Nach den Regeln der Quantenmechanik sollte dann die Amplitude

$$\text{aus} \langle b | a \rangle_{\text{ein}} \quad (9.0.1)$$

die Wahrscheinlichkeit bestimmen, mit der ein einlaufender Zustand a in den auslaufenden Zustand b übergeht.

Die auslaufenden Zustände könnten natürlich wiederum als inlaufende Zustände eines nachfolgenden Prozesses benützt werden. Daher muss der Fockraum der inlaufenden und der auslaufenden Zustände isomorph sein. Der unitäre Operator, der diesen Isomorphismus beschreibt wird *S-Matrix* genannt. Dies soll nun genauer diskutiert werden.

9.1 Kinematische Betrachtungen

Der Einfachheit halber betrachten wir den Fall, bei dem sich zwei unterschiedliche skalare Teilchen (von Spin Null) aneinander streuen. Der einlaufende Zustand ist von der Form

$$|i\rangle_{\text{ein}} = \int \frac{d^3 \mathbf{p}_1}{2p_1^0 (2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{p}_2}{2p_2^0 (2\pi)^3} g_1(\mathbf{p}_1) g_2(\mathbf{p}_2) |p_1, p_2\rangle_{\text{ein}}, \quad (9.1.1)$$

wobei $|p_1, p_2\rangle_{\text{in}}$ die Impulseigenzustände

$$|p_1, p_2\rangle = a_1^\dagger(p_1) a_2^\dagger(p_2) |0\rangle \quad (9.1.2)$$

sind. Hier bezeichnen $a_i^\dagger(p)$ die Einteilchen-Erzeugungsoperatoren, die zu den beiden Teilchensorten im freien Fockraum der einlaufenden Zustände gehören. Weiterhin sind g_1 und g_2 die zu den beiden Teilchen gehörenden Wellenpakete, und $p_i^0 = \sqrt{m_i^2 + \mathbf{p}_i^2}$. Im folgenden werden wir wiederum manchmal das Integrationsmass als $d\tilde{p} = d^3 \mathbf{p} / 2p^0 (2\pi)^3$ schreiben.

Zu diesen Wellenpaketen können wir Lösungen der Klein-Gordon Gleichung $\tilde{g}(x)$ mit positiver Energie assoziieren,

$$\tilde{g}(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{2p^0 (2\pi)^3} e^{-ip \cdot x} g(\mathbf{p}), \quad (9.1.3)$$

sowie den Fluss

$$i \int d^3\mathbf{x} \tilde{g}(x)^* \overleftrightarrow{\partial}_0 \tilde{g}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2p^0 (2\pi)^3} |g(\mathbf{p})|^2. \quad (9.1.4)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass diese Konfiguration in den auslaufenden Zustand f überzueht, ist dann

$$W = |\text{aus}\langle f | i \rangle_{\text{ein}}|^2. \quad (9.1.5)$$

Falls keine externen Quellen vorhanden sind, folgt aus der Translationsinvarianz, dass die obigen Matrixelement verschwinden, falls Energie und Impuls nicht erhalten sind. Weiterhin impliziert der Umstand, dass die ein- und aus-laufenden Fockräume isomorph sein müssen, dass es einen unitären Operator S gibt, so dass

$$\text{aus}\langle f | i \rangle_{\text{ein}} = \text{ein}\langle f | S | i \rangle_{\text{ein}}. \quad (9.1.6)$$

Dieser Operator wird üblicherweise die *S-Matrix* genannt. Die Unitarität von S ist eine Folge davon, dass Wahrscheinlichkeiten erhalten werden müssen — die Summe der Wahrscheinlichkeiten, einer gegebenen einlaufenden Konfiguration in irgendeine auslaufende Konfiguration überzugehen, muss 1 sein.

Die Amplituden, die uns interessieren sind daher die ‘Matrixelemente’ des Operators S im einlaufenden Fockraum. Im folgenden können wir uns daher also auf den einlaufenden Fockraum beschränken, und wir werden daher den Index ‘ein’ normalerweise weglassen. Es ist weiterhin bequem, S als

$$S = \mathbf{1} + iT \quad (9.1.7)$$

zu zerlegen, wobei T nun die Information über die Wechselwirkungen enthält. Falls wir den auslaufenden Zustand als ebene Welle idealisieren, können wir die Deltafunktion, die die Energie- Impulserhaltung beschreibt, ausfaktorisieren:

$$\langle f | T | p_1, p_2 \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - p_1 - p_2) \langle f | \mathcal{T} | p_1, p_2 \rangle. \quad (9.1.8)$$

Der ‘reduzierte’ Operator \mathcal{T} wirkt dann direkt auf der Massenschale. Falls wir die Zerlegung (9.1.7) in das Matrixelement (9.1.6) einsetzen, trägt die Identität nur zur Vorwärtsstreuung bei; sie repräsentiert den Teil des einfallenden Strahls, der durch die Wechselwirkungen nicht beeinflusst wird. In den meisten Experimenten sind wir jedoch nur an dem abgelenkten Teil des Strahls interessiert. Dies rechtfertigt, lediglich den \mathcal{T} -Beitrag für die Übergangswahrscheinlichkeit

$$W = \int d\tilde{p}_1 d\tilde{p}_2 d\tilde{p}'_1 d\tilde{p}'_2 g_1(\mathbf{p}_1)^* g_2(\mathbf{p}_2)^* g_1(\mathbf{p}'_1) g_2(\mathbf{p}'_2) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \\ \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - p_1 - p_2) \langle f | \mathcal{T} | p_1, p_2 \rangle^* \langle f | \mathcal{T} | p'_1, p'_2 \rangle \quad (9.1.9)$$

zu berücksichtigen. Falls der auslaufende Zustand kein Eigenzustand zu Impuls P_f ist, muss diese Formel in offensichtlicher Weise modifiziert werden. In den meisten Fällen präpariert man die einlaufenden Zustände so, dass sie genau vorgegebene Impulse (mit

nur kleinen Unschärfen) besitzen. Dies bedeutet, dass $g_i(p_i)$ einen ‘peak’ um \bar{p}_i mit einer Breite Δp_i besitzt, so dass

$$\langle f|\mathcal{T}|p'_1, p'_2\rangle \simeq \langle f|\mathcal{T}|\bar{p}_1, \bar{p}_2\rangle \simeq \langle f|\mathcal{T}|p_1, p_2\rangle. \quad (9.1.10)$$

Wenn wir ausserdem benützen, dass

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) = \int d^4x e^{-ix \cdot (p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2)} \quad (9.1.11)$$

erhalten wir dann in dieser Näherung

$$W = \int d^4x |\tilde{g}_1(x)|^2 |\tilde{g}_2(x)|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - \bar{p}_1 - \bar{p}_2) |\langle f|\mathcal{T}|\bar{p}_1, \bar{p}_2\rangle|^2. \quad (9.1.12)$$

Diese Formel kann nun vermöge der Übergangswahrscheinlichkeit pro Einheitszeit und Einheitsvolumen

$$\frac{dW}{dV dt} = |\tilde{g}_1(x)|^2 |\tilde{g}_2(x)|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - \bar{p}_1 - \bar{p}_2) |\langle f|\mathcal{T}|\bar{p}_1, \bar{p}_2\rangle|^2 \quad (9.1.13)$$

interpretiert werden. Da die Impluse der einfallenden Teilchen scharf ‘gepeakt’ sind, gilt

$$\tilde{g}_i(x) = e^{-i\bar{p}_i \cdot x} G_i(x), \quad (9.1.14)$$

wobei $G_i(x)$ eine nur langsam variierende Funktion von x ist. Ausserdem ist die Stromdichte

$$i \tilde{g}^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_\mu \tilde{g}(x) \simeq 2\bar{p}_\mu |\tilde{g}(x)|^2. \quad (9.1.15)$$

Zum Beispiel betrachten wir den Fall, wo die Teilchen des Typs 1 auf die in dem Laborsystem ruhenden Teilchen des Typs 2 geschossen werden. Die Anzahl der Teilchen des Typs 2 pro Einheitsvolumen ist

$$\frac{dn_2}{dV} = 2\bar{p}_2^0 |\tilde{g}_2(x)|^2 = 2m_2 |\tilde{g}_2(x)|^2. \quad (9.1.16)$$

Andererseits ist der Fluss der einfallenden Teilchen des Typs 1 gerade

$$\frac{|\bar{\mathbf{p}}_1|}{\bar{p}_1^0} \times 2\bar{p}_1^0 |\tilde{g}_1(x)|^2 = 2|\bar{\mathbf{p}}_1| |\tilde{g}_1(x)|^2. \quad (9.1.17)$$

Mit diesen Vorbereitungen können wir nun die Formel (9.1.13) interpretieren: die Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand i in den Zustand f pro Einheitszeit und Einheitsvolumen ist gerade die Anzahl der Teilchen des Typs 2 pro Einheitsvolumen, mal dem Fluss der einfallenden Teilchens des Typs 1, mal dem *Wirkungsquerschnitt*

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - \bar{p}_1 - \bar{p}_2) \frac{1}{4m_2 |\bar{\mathbf{p}}_1|} |\langle f|\mathcal{T}|\bar{p}_1, \bar{p}_2\rangle|^2. \quad (9.1.18)$$

Der Wirkungsquerschnitt ist dann die Übergangswahrscheinlichkeit pro Streuer des Targets, und pro Einheitsfluss der einfallenden Teilchen.

9.2 Asymptotische Zustände

Das Ziel ist es nun, den Wirkungsquerschnitt im Rahmen einer wechselwirkenden Quantenfeldtheorie zu berechnen. Im folgenden wollen wir dies für den Fall einer selbstwechselwirkenden skalaren Feldtheorie erklären.

Die wesentliche Grösse, die es zu bestimmen gilt, ist die S -Matrix, die die ein- und auslaufenden Zustände miteinander in Verbindung setzt. Der Fockraum der einlaufenden Zustände wird durch die Wirkung eines freien Feldes ϕ_{ein} auf das eindeutige Vakuum erzeugt. Dieses freie Feld kann jedoch nicht direkt mit dem wechselwirkenden Feld ϕ identifiziert werden; zumindest intuitiv besteht jedoch ihre Beziehung darin, dass in der unendlichen Vergangenheit ϕ_{ein} ein geeigneter Limes von ϕ ist. Dieser Limes wird jedoch im allgemeinen von dem betrachteten Prozess abhängen; ausserdem gilt diese Überlegung nur, falls die zugehörigen Teilchen in der unendlichen Vergangenheit weit voneinander entfernt sind. Dann sollte gelten (das ist die sogenannte Asymptotenbedingung von Lehmann, Symanzik und Zimmermann), dass

$$\phi(x) \rightarrow Z^{1/2} \phi_{\text{ein}}(x), \quad \text{für } x^0 \rightarrow -\infty. \quad (9.2.1)$$

Unter geeigneten Annahmen über das Spektrum des Impulsoperators (siehe unten) kann diese Asymptotenbedingung relativ allgemein (z.B. aus den Wightman Axiomen) abgeleitet werden. Hier wollen wir dies nicht beweisen; wir wollen aber genauer diskutieren, in welchem mathematischen Sinn dieser Limes verstanden werden soll, und was die Bedeutung des Faktors $Z^{1/2}$ ist.

Was die mathematische Bedeutung dieser Formel anbelangt, so soll sie im ‘schwachen Sinn’ gelten, d.h. als Identität die für jedes Matrixelement gelten. Insbesondere ist klar, dass die Identität nicht als (starke) Operatoridentität Sinn macht: andernfalls müssten ja beide Felder die gleichen Vertauschungsregeln erfüllen, und man könnte relativ einfach zeigen, dass ϕ notwendigerweise auch ein freies Feld sein muss. [Diese Bemerkung zeigt, dass die Definition dieser asymptotischen Relation ein wenig subtil ist.]

Der Faktor von Z reflektiert, dass die Felder ϕ_{ein} und ϕ durch ihre Vertauschungsregeln kanonisch normalisiert sind. Dabei erzeugt ϕ_{ein} nur Einteilchenzustände des freien Fockraumes, wohingegen im allgemeinen ϕ auch Mehrteilchenzustände produzieren wird. [Das Feld ϕ beschreibt ja eine wechselwirkende Theorie, wo Teilchen erzeugt und vernichtet werden können!] Die Amplituden $\langle 1|\phi_{\text{ein}}(x)|0\rangle$ und $\langle 1|\phi(x)|0\rangle$ haben dieselbe funktionale Abhängigkeit von x (die durch die Kinematik des Problems festgelegt wird). Der Normalisierungsfaktor beschreibt deshalb einfach, dass der Zustand $\phi(x)|0\rangle$ nicht nur 1-Teilchenzustände enthält; die Konstante $Z^{1/2}$ sollte daher zwischen null und eins liegen.

In der Tat kann man die Konstante Z durch die sogenannte Källen-Lehmann Darstellung aus dem Kommutator der wechselwirkenden Felder berechnen. Dazu beobachten wir (für den Fall eines hermiteschen Feldes ϕ), dass

$$\langle 0|[\phi(x), \phi(y)]|0\rangle = \sum_{\alpha} \left[\langle 0|\phi(0)|\alpha\rangle e^{-ip_{\alpha}\cdot(x-y)} \langle \alpha|\phi(0)|0\rangle - (x \leftrightarrow y) \right] \quad (9.2.2)$$

wobei die Summe über eine vollständige Basis der Zustände mit positiver Energie läuft, und p_α der Impuls des Zustandes α ist. [Typischerweise sollte man die Summe hier durch ein geeignetes Integral ersetzen!] Andererseits ist der Kommutator der freien Felder mit Masse m (vgl. (6.2.39))

$$i\Delta(x-y; m) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \epsilon(q^0) \delta(q^2 - m^2) e^{-iq \cdot (x-y)}. \quad (9.2.3)$$

Um (9.2.2) damit zu vergleichen, setzen wir

$$1 = \int d^4q \delta^{(4)}(q - p_\alpha) \quad (9.2.4)$$

in (9.2.2) ein, und erhalten daraus

$$\langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \rho(q) \left(e^{-iq \cdot (x-y)} - e^{iq \cdot (x-y)} \right), \quad (9.2.5)$$

wobei

$$\rho(q) = (2\pi)^3 \sum_\alpha \delta^{(4)}(q - p_\alpha) |\langle 0 | \phi(0) | \alpha \rangle|^2. \quad (9.2.6)$$

Diese Grösse ist offensichtlich positiv, und sie verschwindet, falls q nicht auf dem Vorwärts-Lichtkegel liegt. Weiterhin ist sie Lorentz-invariant (damit der Kommutator Lorentz-invariant ist — natürlich folgt das auch direkt aus der Definition von ρ). Wir können ρ deshalb als

$$\rho(q) = \sigma(q^2) \theta(q^0) \quad (9.2.7)$$

schreiben, wobei $\sigma(q^2) = 0$ falls $q^2 < 0$. Unter Benützung der Formel für den Kommutator der freien Felder (9.2.3), gilt deshalb

$$\langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle = i \int_0^\infty dm'^2 \sigma(m'^2) \Delta(x-y; m'). \quad (9.2.8)$$

[Auf entsprechende Weise kann man auch zeigen, dass das entsprechende Resultat (mit derselben Spektralfunktion ρ) für das zeit-geordneten Produkt zweier Felder gilt.]

In (9.2.8) können wir explizit den Beitrag der 1-Teilchenzustände separieren

$$\langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle = i Z \Delta(x-y; m) + i \int_{m_1^2}^\infty dm'^2 \sigma(m'^2) \Delta(x-y; m'), \quad (9.2.9)$$

wobei m hier die Masse der elementaren Teilchen ist, und $m_1 > m$ die niedrigste Vielteilchenmasse beschreibt. [Wir haben hier also angenommen, dass die Theorie einen sogenannten ‘mass gap’ besitzt, der die Einteilchenzustände von den Mehrteilchenzuständen trennt.] Falls die Lagrangedichte keine Feldableitungen enthält (so wie zum Beispiel für den Fall der Klein-Gordon Theorie), dann ist $\dot{\phi}$ das zu ϕ konjugierte Feld. Falls ϕ die kanonischen Vertauschungsregeln erfüllt, folgt dann aus (9.2.9) durch Ableiten nach x^0

$$1 = Z + \int_{m_1^2}^\infty dm'^2 \sigma(m'^2), \quad (9.2.10)$$

wobei wir (6.2.42) benützt haben. Die Positivität von σ impliziert daher, dass

$$0 \leq Z < 1. \quad (9.2.11)$$

Der Wert $Z = 1$ ist ausgeschlossen, falls ϕ irgendeinen Mehrteilchenzustand erzeugt; falls $Z = 1$ ist, dann ist einfach $\phi = \phi_{\text{ein}}$.

Die obige Analyse gilt natürlich gleichermassen für die auslaufenden Felder,

$$\phi(x) \rightarrow Z^{1/2} \phi_{\text{aus}}(x), \quad \text{für } x^0 \rightarrow \infty. \quad (9.2.12)$$

Hier ist ϕ_{aus} ein freies Feld mit der gleichen Masse wie ϕ_{ein} , und die Konstante Z ist die gleiche wie zuvor. Die Eindeutigkeit des Vakuums (die üblicherweise angenommen wird) impliziert, dass $|0, \text{ein}\rangle = |0, \text{aus}\rangle$. [Eine allfällig auftretende Phase kann in die Definition der Vakuumzustände absorbiert werden.] Weiterhin nehmen wir an, dass die 1-Teilchenzustände stabil sind (zum Beispiel, weil sie eine nicht-triviale erhaltene Ladung tragen, so wie zum Beispiel im Fall der komplexen Klein-Gordon Theorie). Unter diesen Annahmen gilt dann $|1, \text{ein}\rangle = |1, \text{aus}\rangle$. Da $\langle 0|\phi(x)|1\rangle$ dieselbe funktionale Abhängigkeit von x wie die zugehörigen Matrixelemente von ϕ_{ein} und ϕ_{aus} hat, gilt daher dann

$$\langle 0|\phi(x)|1\rangle = Z^{1/2} \text{ein} \langle 0|\phi_{\text{ein}}(x)|1\rangle_{\text{ein}} = Z^{1/2} \text{aus} \langle 0|\phi_{\text{aus}}(x)|1\rangle_{\text{aus}}. \quad (9.2.13)$$

Andererseits induziert die S -Matrix einen Isomorphismus zwischen ein- und auslaufenden Zuständen, und es gilt daher

$$\begin{aligned} \phi_{\text{ein}}(x) &= S \phi_{\text{aus}}(x) S^{-1} \\ |i\rangle_{\text{ein}} &= S |i\rangle_{\text{aus}} \\ \text{ein} \langle f|S|i\rangle_{\text{ein}} &= \text{aus} \langle f|S|i\rangle_{\text{aus}}, \end{aligned} \quad (9.2.14)$$

wobei die letzte Identität direkt aus (9.1.6) folgt. Weiterhin gilt

$$\langle 0|S|0\rangle = \langle 0|0\rangle = 1, \quad \langle 1|S|1'\rangle = \langle 1|1'\rangle, \quad (9.2.15)$$

wobei 1 und 1' beliebige 1-Teilchenzustände bezeichnen, und wir die Stabilität dieser Zustände benützt haben. Schliesslich muss die S -Matrix mit Poincaré-Transformationen vertauschen,

$$U(a, \Lambda) S U(a, \Lambda)^{-1} = S. \quad (9.2.16)$$

9.3 Die LSZ Reduktionsformel

Unter der Annahme, dass die Felder sich asymptotisch wie (9.2.1) bzw. (9.2.12) verhalten, wollen wir nun die S -Matrix Elemente durch die Green'schen Funktionen der wechselwirkenden Theorie ausdrücken. Betrachte die Amplitude (aus der man die Übergangswahrscheinlichkeit berechnen kann)

$$\text{aus} \langle p_1, \dots | q_1, \dots \rangle_{\text{ein}}, \quad (9.3.1)$$

wobei wir (der Einfachheit halber) die Verschmierungsfunktionen weggelassen haben, die zur Normalisierung notwendig sind. Wir wollen dieses Matrixelement rekursiv berechnen. Dazu beobachten wir, dass

$$\begin{aligned} \text{aus}\langle p_1, \dots | q_1, \dots \rangle_{\text{ein}} &= \text{aus}\langle p_1, \dots | a_{\text{ein}}^\dagger(q_1) | q_2, \dots \rangle_{\text{ein}} \\ &= \int_t d^3\mathbf{x} e^{-iq_1 \cdot x} \frac{1}{i} \overleftrightarrow{\partial}_0 \text{aus}\langle p_1, \dots | \phi_{\text{ein}}(x) | q_2, \dots \rangle_{\text{ein}}, \end{aligned} \quad (9.3.2)$$

wobei wir (6.2.10) benützt haben. Das Raumintegral kann zu beliebigen Zeiten ausgewertet werden; insbesondere können wir daher den Limes $t \rightarrow -\infty$ betrachten, wo wir das freie einlaufende Feld ϕ_{ein} durch das wechselwirkende Feld $Z^{-1/2}\phi(x)$ ersetzen können,

$$\text{aus}\langle p_1, \dots | q_1, \dots \rangle_{\text{ein}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} Z^{-1/2} \int_t d^3\mathbf{x} e^{-iq_1 \cdot x} \frac{1}{i} \overleftrightarrow{\partial}_0 \text{aus}\langle p_1, \dots | \phi(x) | q_2, \dots \rangle_{\text{ein}}. \quad (9.3.3)$$

Nun gilt für jedes beliebige Integral

$$\left(\lim_{t \rightarrow \infty} - \lim_{t \rightarrow -\infty} \right) \int d^3\mathbf{x} \psi(\mathbf{x}, t) = \lim_{t_f \rightarrow \infty, t_i \rightarrow -\infty} \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{\partial}{\partial t} \int d^3\mathbf{x} \psi(\mathbf{x}, t). \quad (9.3.4)$$

Mit der asymptotischen Formel für $t \rightarrow \infty$ erhalten wir daher also

$$\begin{aligned} \text{aus}\langle p_1, \dots | q_1, \dots \rangle_{\text{ein}} &= \text{aus}\langle p_1, \dots | a_{\text{aus}}^\dagger(q_1) | q_2, \dots \rangle_{\text{ein}} \\ &\quad + iZ^{-1/2} \int d^4x \partial_0 \left[e^{-iq_1 \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \text{aus}\langle p_1, \dots | \phi(x) | q_2, \dots \rangle_{\text{ein}} \right], \end{aligned} \quad (9.3.5)$$

wobei sich nun das letzte Integral über die gesamte Raumzeit erstreckt. Der erste Term auf der rechten Seite trägt nur dann bei, falls zumindest ein Teilchen nicht in den Streuprozess verwickelt ist,

$$\text{aus}\langle p_1, \dots | a_{\text{aus}}^\dagger(q_1) | q_2, \dots \rangle_{\text{ein}} = \sum_{k=1}^n 2p_k^0 (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_k - \mathbf{q}_1) \text{aus}\langle p_1, \dots | \widehat{p}_k \dots | q_2, \dots \rangle_{\text{ein}}, \quad (9.3.6)$$

da $a_{\text{aus}}^\dagger(q_1)$ nach links wie ein Vernichtungsoperator wirkt, und den auslaufenden Zustand $\text{aus}\langle p_1, \dots |$ vernichtet, falls nicht gerade $\mathbf{q}_1 = \mathbf{p}_k$ für ein k — solche Beiträge nennt man *nicht-zusammenhängend*. [Wir haben hier der Einfachheit halber angenommen, dass alle Teilchen von derselben Sorte sind; es ist offensichtlich wie sich diese Formel im allgemeinen Fall modifiziert.]

Wir betrachten nun den zweiten Term in (9.3.5) genauer. Da wir die Amplituden nicht mit den Testfunktionen verschmiert haben, sollten wir den Ausdruck als Integralkern auffassen; es ist dann legitim, partielle Integration bezüglich der raumartigen Variablen durchzuführen (und dabei die Randterme wegzulassen) — aber natürlich gilt das nicht für die zeit-artige Richtung (da ja sonst der gesamte Ausdruck verschwände!). Da $q_1^2 = m^2$ gilt dann

$$\int d^4x \partial_0 \left[e^{-iq_1 \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \text{aus}\langle \beta | \phi(x) | \alpha \rangle_{\text{ein}} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \int d^4x \left[\left((-\Delta + m^2) e^{-iq_1 \cdot x} \right)_{\text{aus}} \langle \beta | \phi(x) | \alpha \rangle_{\text{ein}} + e^{-iq_1 \cdot x} \partial_0^2 \text{aus} \langle \beta | \phi(x) | \alpha \rangle_{\text{ein}} \right] \\
&= \int d^4x e^{-iq_1 \cdot x} (\square + m^2)_{\text{aus}} \langle \beta | \phi(x) | \alpha \rangle_{\text{ein}}, \tag{9.3.7}
\end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Zeile Δ partiell integriert haben. Der erste Schritt der Rekursionsformel ist daher

$$\begin{aligned}
&_{\text{aus}} \langle p_1, \dots \mid q_1, \dots \rangle_{\text{ein}} \\
&= \sum_{k=1}^n 2p_k^0 (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_k - \mathbf{q}_1)_{\text{aus}} \langle p_1, \dots, \widehat{p}_k \dots \mid q_2, \dots \rangle_{\text{ein}} \\
&\quad + iZ^{-1/2} \int d^4x e^{-iq_1 \cdot x} (\square + m^2)_{\text{aus}} \langle p_1, \dots, p_n | \phi(x) | q_2, \dots, q_l \rangle_{\text{ein}}. \tag{9.3.8}
\end{aligned}$$

Dieser Schritt kann nun immer wieder wiederholt werden; um genauer zu verstehen, was dabei passiert, schreiben wir den nächsten Schritt noch explizit aus. Dabei betrachten wir nun den Beitrag von $a_{\text{aus}}(p_1)$. Was die nicht-zusammenhängenden Terme anbelangt, so geschieht dabei nichts Neues, und wir wollen im folgenden diese Beiträge nicht mehr explizit ausschreiben. Zunächst haben wir wie zuvor

$$\begin{aligned}
_{\text{aus}} \langle p_1, \dots | \phi(x) | q_2, \dots \rangle_{\text{ein}} &=_{\text{aus}} \langle p_2, \dots | a_{\text{aus}}(p_1) \phi(x) | q_2, \dots \rangle_{\text{ein}} \\
&= \lim_{y_1^0 \rightarrow \infty} iZ^{-1/2} \int d^3\mathbf{y}_1 e^{ip_1 \cdot y_1} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{y_1^0} \times \\
&\quad \times_{\text{aus}} \langle p_2, \dots | \phi(y_1) \phi(x) | q_2, \dots \rangle_{\text{ein}}. \tag{9.3.9}
\end{aligned}$$

Wir würden nun gerne das letzte Integral wiederum durch ein 4-dimensionales Integral wie zuvor ersetzen. Dabei benötigen wir jedoch einen kleinen Trick, damit der Operator $a_{\text{ein}}(p_1)$ für $t \rightarrow -\infty$ direkt auf den ein-laufenden Zustand $|q_2, \dots\rangle_{\text{ein}}$ wirkt. Dies wird genau durch das zeit-geordnete Produkt von Feldern erreicht

$$\mathcal{T}(\phi(y_1) \phi(x_1)) = \begin{cases} \phi(y_1) \phi(x_1) & \text{falls } y_1^0 > x_1^0 \\ \phi(x_1) \phi(y_1) & \text{falls } y_1^0 < x_1^0. \end{cases} \tag{9.3.10}$$

Wir ersetzen nun in (9.3.9) das Produkt der beiden Felder durch das zeit-geordnete Produkt (ohne natürlich dabei irgendetwas zu ändern, da in (9.3.9) nur der Limes $y_1^0 \rightarrow \infty$ auftritt). Dann benützen wir dieselbe Identität (9.3.4) wie zuvor und erhalten mit denselben Argumenten

$$\begin{aligned}
_{\text{aus}} \langle p_1, \dots \mid \phi(x_1) | q_2, \dots \rangle_{\text{ein}} &=_{\text{aus}} \langle p_2, \dots | \phi(x_1) a_{\text{ein}}(p_1) | q_2, \dots \rangle_{\text{ein}} \\
&\quad + iZ^{-1/2} \int d^4y_1 e^{ip_1 \cdot y_1} (\square_{y_1} + m^2)_{\text{aus}} \langle p_2, \dots | \mathcal{T}(\phi(y_1) \phi(x_1)) | q_2, \dots \rangle_{\text{ein}}. \tag{9.3.11}
\end{aligned}$$

Der erste Term auf der rechten Seite führt wiederum zu einem nicht-zusammenhängenden Term. Nach der Reduktion von zwei Teilchen erhalten wir also die Formel

$$\begin{aligned}
_{\text{aus}} \langle p_1, \dots \mid q_1, \dots \rangle_{\text{ein}} &=_{\text{ein}} \langle p_1, \dots | S | q_1, \dots \rangle_{\text{ein}} \\
&= \text{nicht-zusammenhängende Terme} \\
&\quad + (iZ^{-1/2})^2 \int d^4y_1 d^4x_1 e^{ip_1 \cdot y_1 - iq_1 \cdot x_1} (\square_{y_1} + m^2) (\square_{x_1} + m^2) \times \\
&\quad \times_{\text{aus}} \langle p_2, \dots | \mathcal{T}(\phi(y_1) \phi(x_1)) | q_1, \dots \rangle_{\text{ein}}. \tag{9.3.12}
\end{aligned}$$

Es ist nun klar, wie dieser Schritt iteriert werden kann, und man erhält schliesslich

$$\begin{aligned}
& \text{aus} \langle p_1, \dots, p_n \mid q_1, \dots, q_l \rangle_{\text{ein}} = \text{ein} \langle p_1, \dots, p_n \mid S \mid q_1, \dots, q_l \rangle_{\text{ein}} \\
& = \text{nicht-zusammenhängende Terme} \\
& \quad + (iZ^{-1/2})^{n+l} \int d^4 y_1 \cdots d^4 x_l \exp \left(i \sum_{k=1}^n p_k \cdot y_k - i \sum_{r=1}^l q_r \cdot x_r \right) \times \\
& \quad \times (\square_{y_1} + m^2) \cdots (\square_{x_l} + m^2)_{\text{aus}} \langle 0 \mid \mathcal{T} (\phi(y_1) \cdots \phi(x_l)) \mid 0 \rangle_{\text{ein}} .
\end{aligned}$$

Dies ist die sogenannte *LSZ Reduktionsformel*, die von Lehmann, Symanzik und Zimmermann gefunden wurde. Sie etabliert eine Beziehung zwischen on-shell Übergangsamplituden (die p_i und die q_j liegen alle auf der Masseschale) und den Vakuumerwartungswerten der zeit-geordneten Produkten der wechselwirkenden Theorie. Insbesondere impliziert diese Formel, dass diese Green'schen Funktionen Pole in den Variablen p_i^2 besitzen, wobei p_i die zu x_i konjugierte Variable ist. Bis auf Normierung ist das S -Matrix Element gerade das Residuum dieser multiplen Pole.

Eine andere bemerkenswerte Eigenschaft dieser Formel besteht in der Symmetrie zwischen den ein- und auslaufenden Teilchen. Falls wir die auslaufenden Impulse (p_1, \dots) durch einlaufende Impulse $(-p_1, \dots)$ ersetzt, tauchen alle Impulse in gleicher Weise auf. Diese Eigenschaft ist eine Manifestation der sogenannten PCT Symmetrie, die für allgemeine lokale Lorentz-invariante Feldtheorien gilt.

10 Störungstheorie und Feynman Diagramme

Mit Hilfe der LSZ Reduktionsformel können wir die Berechnung der Streuamplituden auf die der Vakuumerwartungswerte von zeitgeordneten Produkten zurückführen. Wir wollen nun studieren, wie man jene für eine wechselwirkende Theorie ausrechnen kann. Im folgenden werden wir uns (der Einfachheit halber) auf den Fall eines reellen Skalarfeldes $\phi(x)$, also auf die Green'schen Funktionen

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle 0 | \mathcal{T}(\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)) | 0 \rangle \quad (10.0.1)$$

beschränken. (Die Quantenelektrodynamik wird später behandelt werden.) Diese Funktionen sollen *perturbativ* berechnet werden, wobei unser Vorgehen zunächst heuristisch ist. Die wechselwirkende Theorie habe die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(\phi, \partial\phi) = \mathcal{L}_0(\phi, \partial\phi) + \mathcal{L}_W(\phi), \quad (10.0.2)$$

wobei $\mathcal{L}_0(\phi, \partial\phi)$ die Lagrangedichte der freien Theorie

$$\mathcal{L}_0(\phi, \partial\phi) = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 \quad (10.0.3)$$

ist, und der Wechselwirkungsterm $\mathcal{L}_W(\phi)$ nur von ϕ (nicht aber von $\partial\phi$) abhängen soll. Dann ist

$$H = H_0 + H_W = \int d^3\mathbf{x} : \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_W :, \quad (10.0.4)$$

wobei

$$\mathcal{H}_0 = (\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2), \quad \mathcal{H}_W = -\mathcal{L}_W(\phi). \quad (10.0.5)$$

Das einfachste Beispiel ist die sogenannte ϕ^4 -Theorie, für die

$$\mathcal{L}_W(\phi) = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4. \quad (10.0.6)$$

Dann ist

$$H_W = \frac{\lambda}{4!} \int d^3\mathbf{x} : \phi(0, \mathbf{x})^4 : . \quad (10.0.7)$$

10.1 Die Dyson Reihe

Die Zeitentwicklung des freien Feldes $\phi_{\text{ein}}(x)$ wird durch den Hamiltonoperator H_0 bestimmt; es gilt daher insbesondere

$$\phi_{\text{ein}}(t, \mathbf{x}) = e^{iH_0(t-t_0)} \phi_{\text{ein}}(t_0, \mathbf{x}) e^{-iH_0(t-t_0)}. \quad (10.1.1)$$

Falls λ klein ist, beschreibt H_0 auch gut die Zeitentwicklung des wechselwirkenden Feldes ϕ . Im sogenannten *Wechselwirkungsbild* (das bezüglich eines festen t_0 definiert ist) ist das Feld ϕ_W durch

$$\phi_W(t, \mathbf{x}) = e^{iH_0(t-t_0)} \phi(t_0, \mathbf{x}) e^{-iH_0(t-t_0)} \quad (10.1.2)$$

festgelegt. Schlussendlich werden wir $t_0 = -\infty$ setzen. Ausserdem wollen wir annehmen, dass die Wechselwirkung für $t \rightarrow -\infty$ adiabatisch abgeschaltet wird; dann stimmen für $t \rightarrow -\infty$, ϕ und ϕ_{ein} gerade überein. Für diese Wahl von t_0 gilt daher einfach $\phi_W = \phi_{\text{ein}}$.

Die Beziehung zwischen ϕ_W und dem tatsächlichen Feld ϕ ist einfach

$$\begin{aligned}\phi(t, \mathbf{x}) &= e^{iH(t-t_0)} e^{-iH_0(t-t_0)} \phi_W(t, \mathbf{x}) e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} \\ &= U^\dagger(t, t_0) \phi_W(t, \mathbf{x}) U(t, t_0),\end{aligned}$$

wobei wir den unitären Operator

$$U(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} \quad (10.1.3)$$

definiert haben. Für den speziellen Fall $t_0 = -\infty$ können wir das auch als

$$\phi(t, \mathbf{x}) = U^{-1}(t) \phi_{\text{ein}}(t, \mathbf{x}) U(t), \quad U(t) \equiv U(t, -\infty) \quad (10.1.4)$$

schreiben. Der Operator $U(t, t_0)$ ist der Propagator im Wechselwirkungsbild. Wir wollen nun diesen Propagator durch ϕ_W ausdrücken. Dazu beobachten wir, dass $U(t, t_0)$ eindeutig durch die Randbedingung $U(t_0, t_0) = \mathbf{1}$, sowie die Differentialgleichung (Schrödinger Gleichung)

$$\begin{aligned}i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) &= e^{iH_0(t-t_0)} (H - H_0) e^{-iH(t-t_0)} \\ &= e^{iH_0(t-t_0)} H_W e^{-iH(t-t_0)} \\ &= e^{iH_0(t-t_0)} H_W e^{-iH_0(t-t_0)} e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} \\ &= H_W(t) U(t, t_0)\end{aligned} \quad (10.1.5)$$

bestimmt ist, wobei $H_W(t)$

$$H_W(t) = e^{iH_0(t-t_0)} H_W e^{-iH_0(t-t_0)} = H_W(\phi_W(t)) \quad (10.1.6)$$

der wechselwirkende Anteil des Hamiltonoperators (im Wechselwirkungsbild) ist. [Zum Beispiel ist für die obige ϕ^4 Theorie $H_W(t)$ durch

$$H_W(t) = \int d^3\mathbf{x} \frac{\lambda}{4!} : \phi_W^4(t) : \quad (10.1.7)$$

gegeben.]

Der Operator $U(t, t_0)$ kann nun nach Potenzen von H_W in der sogenannten Dyson-Reihe entwickelt werden (**Übungsaufgabe**)

$$\begin{aligned}U(t, t_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^t dt_n \mathcal{T}(H_W(t_n) \cdots H_W(t_1)) \\ &= \mathcal{T} \exp\left(-i \int_{t_0}^t d\tau H_W(\tau)\right).\end{aligned} \quad (10.1.8)$$

Diese Definition kann natürlicherweise zu

$$U(t, s) = \mathcal{T} \exp\left(-i \int_s^t d\tau H_W(\tau)\right) \quad (10.1.9)$$

verallgemeinert werden. Es ist klar, dass dieser Operator immer noch die Differentialgleichung (10.1.5) erfüllt, also

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t, s) = H_W(t) U(t, s). \quad (10.1.10)$$

Ausserdem erfüllt er die Randbedingung $U(t, t) = \mathbf{1}$. Da der Operator $U(t, s)$ durch diese beiden Eigenschaften eindeutig festgelegt ist, kann man ihn auch als

$$U(t, s) = e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-s)} e^{-iH_0(s-t_0)} \quad (10.1.11)$$

schreiben; insbesondere zeigt dies, dass $U(t, s)$ unitär ist. Weiterhin gilt für $t_1 \geq t_2 \geq t_3$

$$\begin{aligned} U(t_1, t_2) U(t_2, t_3) &= U(t_1, t_3) \\ U(t_1, t_3) U^\dagger(t_2, t_3) &= U(t_1, t_2). \end{aligned} \quad (10.1.12)$$

Wir nehmen nun an, dass die Wechselwirkung für $t \rightarrow -\infty$ adiabatisch abgeschaltet wird. Dann gilt (für $t_0 = -\infty$)

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} U(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} U(t, -\infty) = \mathbf{1}. \quad (10.1.13)$$

Nun schreiben wir den Vakuumerwartungswert des zeit-geordnete Produktes der wechselwirkenden Felder für $x_1^0 > x_2^0 > \dots > x_n^0$ als

$$\begin{aligned} \langle 0 | \mathcal{T}(\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)) | 0 \rangle &= \langle 0 | \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | U^{-1}(t_1) \phi_{\text{ein}}(x_1) U(t_1, t_2) \phi_{\text{ein}}(x_2) \cdots \\ &\quad \times \cdots U(t_{n-1}, t_n) \phi_{\text{ein}}(x_n) U(t_n) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Nun betrachte T so dass $T \gg t_1, -T \ll t_n$. Dann gilt

$$U(t_n) = U(t_n, -T) U(-T), \quad U^{-1}(t_1) = U^{-1}(T) U(T, t_1), \quad (10.1.14)$$

und daher ist

$$\begin{aligned} \langle 0 | \mathcal{T}(\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)) | 0 \rangle \\ = \langle 0 | U^{-1}(T) \mathcal{T} \left(\phi_{\text{ein}}(x_1) \cdots \phi_{\text{ein}}(x_n) \exp \left[-i \int_{-T}^T d\tau H_W(\tau) \right] \right) U(-T) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Diese letzte Formel gilt nun auch, falls die x_i^0 nicht in der obigen Ordnung sind (solange sie alle im Intervall $[-T, T]$ liegen). Nun nehmen wir den Limes $T \rightarrow \infty$. Dann gilt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} U(-T) | 0 \rangle = | 0 \rangle. \quad (10.1.15)$$

Ausserdem ist in diesem Limes $\langle 0|U^{-1}(T)$ proportional zum Vakuum $\langle 0|$; die Proportionalitätskonstante kann durch

$$\begin{aligned}\lim_{T \rightarrow \infty} \langle 0|U^{-1}(T) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \langle 0|U^{-1}(T)|0\rangle \langle 0| \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\langle 0|U(T)|0\rangle} \langle 0|\end{aligned}\quad (10.1.16)$$

bestimmt werden. Einsetzen in die obige Gleichung liefert dann

$$\begin{aligned}G(x_1, \dots, x_n) &= \langle 0|\mathcal{T}(\phi(x_1) \cdots \phi(x_n))|0\rangle \\ &= \frac{\langle 0|\mathcal{T}(\phi_{\text{ein}}(x_1) \cdots \phi_{\text{ein}}(x_n) \exp[i \int d^4x \mathcal{L}_W(\phi_{\text{ein}})])|0\rangle}{\langle 0|\mathcal{T} \exp[i \int d^4x \mathcal{L}_W(\phi_{\text{ein}})]|0\rangle},\end{aligned}\quad (10.1.17)$$

wobei wir benützt haben, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau H_W(\tau) = - \int d^4x \mathcal{L}_W(\phi_{\text{ein}}). \quad (10.1.18)$$

Diese Ableitung ist heuristisch (und keineswegs rigoros); wir sollten daher die resultierende Formel (10.1.17) in gewissem Sinn als Definition der Vakuumerwartungswerte der zeitgeordneten Produkte der wechselwirkenden Theorie auffassen. Es ist wert darauf hinzuweisen, dass diese Formel manifesterweise Lorentz-kovariant ist!

Wir können diese Formel noch ein wenig kompakter schreiben, wenn wir die *erzeugende Funktion* der Vakuumerwartungswerte der zeitgeordneten Produkte

$$\begin{aligned}Z[j] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n j(x_1) \cdots j(x_n) \langle 0|\mathcal{T}(\phi(x_1) \cdots \phi(x_n))|0\rangle \\ &= \langle 0|\mathcal{T} \exp\left[i \int d^4x j(x) \phi(x)\right]|0\rangle\end{aligned}\quad (10.1.19)$$

einführen. Dann ist nämlich einfach

$$G(x_1, \dots, x_n) = \langle 0|\mathcal{T}(\phi(x_1) \cdots \phi(x_n))|0\rangle = (-i)^n \frac{\delta}{\delta j(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta j(x_n)} Z[j] \Big|_{j=0}. \quad (10.1.20)$$

Die obige Formel kann man dann einfach kompakt als

$$Z[j] = \frac{\langle 0|\mathcal{T} \exp\left[i \int d^4x (\mathcal{L}_W(\phi_{\text{ein}}) + j(x) \phi_{\text{ein}}(x))\right]|0\rangle}{\langle 0|\mathcal{T} \exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}_W(\phi_{\text{ein}})\right]|0\rangle} \quad (10.1.21)$$

schreiben. Die Formel (10.1.17) bildet die Grundlage der kovarianten Störungsrechnung: sie drückt die zeitgeordneten Produkte der wechselwirkenden Theorie durch Erwartungswerte freier Felder aus, und dies auf manifest Lorentz kovariante Weise. Die Entwicklung

des Zählers von (10.1.17) nach Potenzen von \mathcal{H}_W ist

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-i)^p}{p!} \int d^4 y_1 \cdots d^4 y_p \times \langle 0 | \mathcal{T} [\phi_{\text{ein}}(x_1) \cdots \phi_{\text{ein}}(x_n) : \mathcal{H}_W(\phi_{\text{ein}}(y_1)) : \cdots : \mathcal{H}_W(\phi_{\text{ein}}(y_p)) :] | 0 \rangle .$$

Die einzelnen Term können dann nach dem Wick'schen Theorem berechnet werden; dies kann am einfachsten diagrammatisch beschrieben werden, was gerade zu den Feynman Regeln führt.

10.2 Die Feynman Diagramme für die ϕ^4 Theorie

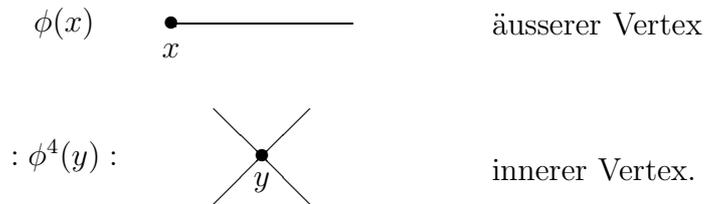
Zur Illustration betrachten wir nun den Fall der ϕ^4 Theorie, für die $\mathcal{H}_W(\phi_{\text{ein}})$ durch

$$\mathcal{H}_W(\phi_{\text{ein}}(y)) = \frac{\lambda}{4!} : \phi_{\text{ein}}^4(y) \quad (10.2.1)$$

gegeben ist. Im folgenden werden wir den Index 'ein' weglassen. Der p -te Term in der obigen Störungsreihe ist dann

$$\frac{1}{p!} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^p \int d^4 y_1 \cdots d^4 y_p \langle 0 | \mathcal{T} [\phi(x_1) \cdots \phi(x_n) : \phi(y_1)^4 : \cdots : \phi(y_p)^4 :] | 0 \rangle . \quad (10.2.2)$$

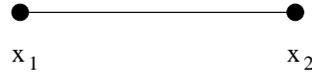
Jeder dieser Terme kann nun mit Hilfe des Wick'schen Theorems ausgewertet werden, wobei die Normalordnung $: \phi(y_l)^4 :$ lediglich dazu führt, dass die Kontraktionen zwischen den vier Feldern an dem selben Raumzeitpunkt y_l weggelassen werden. Die verschiedenen Paarungen können graphisch dargestellt werden. Dazu ordnen wir jedem externen Feld $\phi(x)$ einen 'äusseren Vertex', und jedem Term $: \phi^4(y) :$ einen 'inneren Vertex' zu:



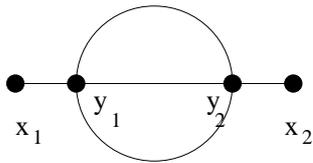
Weitherhin entspricht jeder Kontraktion eine nicht-orientierte Linie,



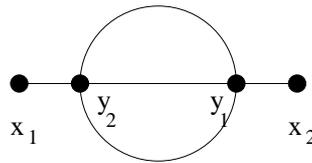
Jeder Kontraktionskombination aus dem Wick'schen Theorem entspricht daher einem Graphen (*Feynman-Diagramm*), bei welchem alle Valenzen der Vertizes durch Linien verbunden werden. Dabei darf keine Linie einen Vertex mit sich selbst verbinden. Zum Beispiel sind die möglichen Diagramme für $n = 2$ und $p = 0$ gerade



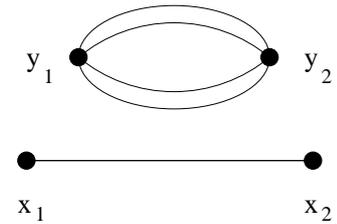
und für $n = 2$ und $p = 2$ (für $n = 2$ und $p = 1$ verschwindet (10.2.2), da keine Kontraktionen zwischen den vier Feldern $\phi^4(y)$ erlaubt sind)



D_1



D_2



D_3

Den Ausdruck (10.2.2) erhält man dann durch die folgenden *Feynman Regeln* (Ortsraumregeln):

- (i) Man zeichne alle (topologisch) verschiedenen Diagramme mit numerierten äusseren Vertizes x_1, \dots, x_n und inneren Vertizes y_1, \dots, y_p .
- (ii) Jeder innere Vertex liefert einen Faktor $-i\lambda$.
- (iii) Jede Linie zwischen z_i und z_j liefert einen Faktor

$$\langle 0 | \mathcal{T}(\phi(z_i) \phi(z_j)) | 0 \rangle = D_F(z_i - z_j). \quad (10.2.3)$$

- (iv) Schliesslich integriere man über die Positionen der inneren Vertizes,

$$\int d^4 y_1 \cdots \int d^4 y_p.$$

Die Valenzen eines inneren Vertex y_j wurden hierbei nicht numeriert, was eigentlich erforderlich gewesen wäre, um die verschiedenen Terme des Wick'schen Theorems zu berücksichtigen. Jedes der obigen Diagramme steht daher für mehrere Kontraktionen des Wick'schen Theorems. Insbesondere können die Linien, die in einem inneren Vertex enden, auf $4!$ verschiedene Weisen numeriert werden, ohne dass sich das Diagramm ändert — dieser Faktor ist in der Vorschrift (ii) absorbiert worden (wo man eigentlich $-i\lambda/4!$ hätte schreiben müssen). Dadurch hat man jedoch noch nicht alle kombinatorischen Faktoren richtig abgegolten, falls es innere Linien gibt, die zwischen zwei internen Vertizes verlaufen. Um dies zu korrigieren muss man

- (v) Jedes Diagramm wird mit dem Faktor $1/(p!S)$ gewichtet, wobei S genau die Ordnung der Gruppe der Permutationen der inneren Linien ist, die das Diagramm nicht ändern. Der Faktor $1/S$ ist gerade

$$\frac{1}{S} = \left(\frac{1}{4!}\right)^p m, \quad (10.2.4)$$

wobei m die Anzahl der unterschiedlichen Kontraktionen ist, die durch das gegebene Diagramm beschrieben werden.

- (vi) Der Ausdruck (10.2.2) ist dann schliesslich die Summe der Terme, die zu den verschiedenen Diagrammen assoziiert werden.

Um diese Regeln genauer zu verstehen, betrachten wir nun das obige Beispiel. Für $n = 2$ und $p = 0$ ist (10.2.2) gerade

$$\mathcal{A}^{(p=0)}(x_1, x_2) = D_F(x_1, x_2). \quad (10.2.5)$$

Für $p = 2$ haben wir drei Beiträge, die zu den drei Diagrammen D_1 , D_2 und D_3 gehören. Für D_1 und D_2 ist der Symmetriefaktor S gerade $S = 3!$ da es drei innere Linien gibt, die miteinander vertauscht werden können. Das stimmt gerade mit (10.2.4) überein, da es vier verschiedene Möglichkeiten gibt, x_1 mit einem der vier Felder von y_1 zu verbinden, vier Möglichkeiten x_2 mit einem der vier Felder von y_2 zu verbinden, und schliesslich $3!$ Möglichkeiten gibt, die verbleibenden drei Felder von y_1 und y_2 miteinander zu verbinden, d.h.

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{(4!)^2} 4 \cdot 4 \cdot 3! = \frac{1}{3!}. \quad (10.2.6)$$

Für D_3 ist der Symmetriefaktor hingegen $S = 4!$ (da es vier interne Linien gibt, die man vertauschen kann); dies ist auch das Resultat der Formel (10.2.4), da in diesem Fall $m = 4!$. Die Diagramme D_1 oder D_2 führen daher zu dem Beitrag

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{(p=2, D_1)}(x_1, x_2) &= \mathcal{A}^{(p=2, D_2)}(x_1, x_2) \\ &= \frac{1}{2!} \frac{1}{3!} (-i\lambda)^2 \int d^4 y_1 \int d^4 y_2 D_F(x_1, y_1) D_F(x_2, y_2) [D_F(y_1, y_2)]^4, \end{aligned} \quad (10.2.7)$$

während das Diagramm D_3 zu

$$\mathcal{A}^{(p=2, D_3)}(x_1, x_2) = \frac{1}{2!} \frac{1}{4!} (-i\lambda)^2 \int d^4 y_1 \int d^4 y_2 D_F(x_1, x_2) [D_F(y_1, y_2)]^4 \quad (10.2.8)$$

führt. Der totale Beitrag mit $n = 2$ und $p = 2$ ist daher

$$\mathcal{A}^{(p=2)}(x_1, x_2) = 2 \mathcal{A}^{(p=2, D_1)}(x_1, x_2) + \mathcal{A}^{(p=2, D_3)}(x_1, x_2). \quad (10.2.9)$$

An dieser Stelle ist es nützlich, ein paar allgemeine Bemerkungen zu machen:

(1) Alle Diagramme mit n ungerade verschwinden, da die Vakuumerwartungswerte einer ungeraden Anzahl von ϕ -Feldern verschwinden.

(2) Nach Integration gemäss Regel (iv) liefern Diagramme mit vertauschten inneren Vertizes y_1, \dots, y_p denselben Beitrag (so wie D_1 und D_2 in dem obigen Beispiel). Man könnte daher den Begriff ‘verschiedener Diagramme’ in Regel (i) abändern:

(i') Man zeichne alle (topologisch) verschiedenen Diagramme mit numerierten äusseren Vertizes x_1, \dots, x_n . Dann assoziiert man zu den p inneren Vertizes in beliebiger Weise die Koordinaten y_1, \dots, y_p .

Die Regeln (ii) - (iv) sowie (vi) bleiben unverändert; lediglich die kombinatorische Gewichtung des zugehörigen Beitrages ist dann

(v') Jedes Diagramm wird mit dem Faktor

$$\frac{1}{p!} \left(\frac{1}{4!} \right)^p m_1 m_2 = \frac{1}{SS'} \quad (10.2.10)$$

gewichtet, wobei m_1 die Anzahl der Möglichkeiten beschreibt, die äusseren Vertizes mit beliebigen Vertizes zu verbinden, und m_2 die anschliessende Möglichkeit, die inneren Vertizes untereinander zu verbinden. Der Symmetriefaktor S' ist dabei einfach die Ordnung der Permutationsgruppe der inneren Vertizes, die im Sinn von Regel (i) das Diagramm nicht ändern.

Zum Beispiel ist der Symmetriefaktor (10.2.10) für $D_1 \equiv D_2$ nun einfach [$m_1 = 4 \cdot 4 \cdot 2$ und $m_2 = 3!$]

$$\frac{1}{2!} \left(\frac{1}{4!} \right)^2 (4 \cdot 4 \cdot 2) (3!) = \frac{1}{3!}, \quad (10.2.11)$$

was damit übereinstimmt, dass $S' = 1$ in diesem Fall. Andererseits ist der Symmetriefaktor für D_3 nun [$m_1 = 1, m_2 = 4!$]

$$\frac{1}{2!} \left(\frac{1}{4!} \right)^2 (4!) = \frac{1}{2 \cdot 4!}, \quad (10.2.12)$$

was gerade mit $S' = 2$ kompatibel ist. Diese kombinatorischen Faktoren führen natürlich gerade zu denselben Faktoren wie in (10.2.9).

10.3 Verkettete Diagramme

Der Nenner in (10.1.17) hat eine Entwicklung nach Diagrammen mit $n = 0$, d.h. solchen ohne äusseren Vertizes. Man nennt sie *Vakuumdigramme*. (Dabei entspricht der Term $p = 0$ dem leeren Diagramm, dessen Beitrag gerade 1 ist.)

Die Diagramme des Zählers von (10.1.17), die zu (10.2.2) beitragen, sind von zwei Sorten: jene Diagramme, die Vakuumdigramme als Zusammenhangskomponenten enthalten (z.B. D_3); und die sogenannten *verketteten Diagramme*, die keine Vakuumdigramme als Zusammenhangskomponenten erhalten (z.B. D_1 und D_2).

Wir wollen nun zeigen, dass der Nenner in (10.1.17) gerade die Beiträge der Vakuumbdiagramme herausschneidet. Dazu beobachten wir, dass jedes Diagramm mit p inneren Vertizes y_1, \dots, y_p dadurch erhalten werden kann, dass man

- (i) k von den p inneren Vertizes auswählt — dabei gibt es $\binom{p}{k}$ Möglichkeiten.
- (ii) ein beliebiges verkettetes Diagramm mit diesen k Vertizes mit einem Vakuumbdiagramm der restlichen $p-k$ Vertizes kombiniert. Dabei sind die Beiträge der beiden Diagramme natürlich multiplikativ.

Der Zähler von (10.1.17) ist daher

$$\begin{aligned} & \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-i\lambda)^p}{p!} \int d^4 y_1 \cdots \int d^4 y_p \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \\ & \quad \times \langle 0 | \mathcal{T} [\phi_{\text{ein}}(x_1) \cdots \phi_{\text{ein}}(x_n) : \mathcal{H}_W(\phi_{\text{ein}}(y_1)) : \cdots : \mathcal{H}_W(\phi_{\text{ein}}(y_k)) :] | 0 \rangle_0 \\ & \quad \times \langle 0 | \mathcal{T} [: \mathcal{H}_W(\phi_{\text{ein}}(y_{k+1})) : \cdots : \mathcal{H}_W(\phi_{\text{ein}}(y_p)) :] | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (10.3.1)$$

wobei $\langle 0 | \mathcal{T}[\cdots] | 0 \rangle_0$ dadurch definiert ist, dass bei der Berechnung von $\langle 0 | \mathcal{T}[\cdots] | 0 \rangle$ nur die Beiträge der verketteten Diagramme behalten werden. Nun benützen wir, dass

$$\frac{1}{p!} \binom{p}{k} = \frac{1}{k! (p-k)!}, \quad \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=0}^p = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty}, \quad \text{wobei } j = p - k. \quad (10.3.2)$$

In (10.3.1) lassen sich die beiden Summen also faktorisieren; die Summe über j entspricht daher gerade dem Nenner von (10.1.17). Damit haben wir gezeigt, dass

$$\begin{aligned} G(x_1, \dots, x_n) &= \langle 0 | \mathcal{T}(\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)) | 0 \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\lambda)^k}{k!} \int d^4 y_1 \cdots \int d^4 y_k \\ & \quad \times \langle 0 | \mathcal{T} [\phi_{\text{ein}}(x_1) \cdots \phi_{\text{ein}}(x_n) : \mathcal{H}_W(\phi_{\text{ein}}(y_1)) : \cdots : \mathcal{H}_W(\phi_{\text{ein}}(y_k)) :] | 0 \rangle_0. \end{aligned} \quad (10.3.3)$$

Um dieses Resultat durch die erzeugende Funktion $Z[j]$, die wir in (10.1.19) eingeführt haben, auszudrücken, müssen wir nun die *zusammenhängenden* (trunkierten) Greensfunktionen $G_c(x_1, \dots, x_n)$ definieren: sei \mathcal{P} eine Partition der Menge $I = \{1, \dots, n\}$, d.h. $\mathcal{P} = \{I_1, \dots, I_m\}$, wobei

$$I = \bigcup_{\alpha=1}^m I_{\alpha}, \quad I_{\alpha} \cap I_{\beta} = \emptyset \quad \text{falls } \alpha \neq \beta. \quad (10.3.4)$$

Dann definieren wir $G_c(x_1, \dots, x_n)$ rekursiv durch die Formel

$$G(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\mathcal{P}=\{I_{\alpha}\}} \prod_{\alpha} G_c(\{x_i\}_{i \in I_{\alpha}}). \quad (10.3.5)$$

Falls wir die Formel nach G_c auflösen, ergibt sie einfach

$$G_c(x_1, \dots, x_n) = G(x_1, \dots, x_n) - \sum_{\mathcal{P}=\{I_\alpha\}}' \prod_{\alpha} G_c(\{x_i\}_{i \in I_\alpha}), \quad (10.3.6)$$

wobei \sum' ausdrückt, dass die Summe nicht die triviale Partition $\mathcal{P} = \{I\}$ enthält. Durch eine analoge Überlegung wie oben (Zerlegung eines Diagrammes nach Zusammenhangskomponenten) folgt, dass $G_c(x_1, \dots, x_n)$ gerade durch die Summe über *alle zusammenhängenden* Diagramme (d.h. aller Diagramme, die sich nicht als Produkt zweier kleinerer Diagramme schreiben lassen) gegeben ist. Für die erzeugende Funktion $Z[j]$ bedeutet dies dann, dass

$$\begin{aligned} Z[j] &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_k j(x_1) \cdots j(x_k) G_c(x_1, \dots, x_k) \right)^m \\ &= \exp(Z_c[j]), \end{aligned} \quad (10.3.7)$$

wobei der Faktor $1/m!$ berücksichtigt, dass Permutation der m Teilmengen einer Partition keine neue Partition liefert. Die Grösse

$$Z_c[j] = \log Z[j] \quad (10.3.8)$$

ist daher die erzeugende Funktion der zusammenhängenden Greensfunktionen [Kettentheorem].

10.4 Feynman Regeln im Impulsraum

Für die Bedürfnisse der Streutheorie (vgl. Kapitel 9), ist es besser, die Fouriertransformierte

$$G(p_1, \dots, p_n) = \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n e^{-i \sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i} G(x_1, \dots, x_n) \quad (10.4.1)$$

als Greensfunktionen diagrammatisch darzustellen. Dazu setzen wir rechts die Entwicklung (10.3.3) ein und schreiben den Propagator im Impulsraum (siehe (6.3.36) und (6.3.26)),

$$D_F(z_i - z_j) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik \cdot (z_i - z_j)}. \quad (10.4.2)$$

Dann kann man leicht die Integrationen über x_i und y_l durchführen. Die äussere Linie des Vertex x_i verbindet dabei diesen entweder mit einem inneren Vertex y_j , oder mit einem anderen äusseren Vertex x_j (kurzgeschlossene Linie). Im ersten Fall liefert der x_i -abhängige Teil der Integration

$$\int d^4x_i e^{-ip_i \cdot x_i} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik \cdot (x_i - y_j)} = \frac{i}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip_i \cdot y_j}. \quad (10.4.3)$$

Im zweiten Fall erhält man stattdessen (von der Integration über x_i und x_j)

$$\begin{aligned} & \int d^4x_i \int d^4x_j e^{-ip_i \cdot x_i} e^{-ip_j \cdot x_j} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik \cdot (x_i - x_j)} \\ &= \frac{i}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i + p_j). \end{aligned} \quad (10.4.4)$$

Für einen inneren Vertex y_i gibt jede der 4 Linien vermöge (10.4.2) eine y_i -Abhängigkeit der Form $e^{-i\sigma_l k_l \cdot y_i}$, wobei $\sigma_l = \pm 1$, $l = 1, \dots, 4$. Dabei ist $\sigma_l = +1$ für die äusseren Linien, und hängt sonst von der (unwesentlichen) Wahl der Orientierung der inneren Linie ab. Die y_i -Integration ergibt daher

$$\int d^4y_i e^{-i\sum_{l=1}^4 \sigma_l k_l \cdot y_i} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_{l=1}^4 \sigma_l k_l\right). \quad (10.4.5)$$

Damit erhält man die folgenden *Feynmann-Regeln* (Impulsraumregeln):

- (i) Man zeichne alle (topologisch) verschiedenen verketteten Diagramme mit n nummerierten äusseren Vertizes mit Impulsen p_1, \dots, p_n . Dann wählen wir eine beliebige Numerierung (und Orientierung) der inneren Linien, d.h. wir assoziieren Impulse k_1, \dots, k_m .
- (ii) Die i -te äussere Linie liefert einen Faktor

$$\frac{i}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (\text{nicht kurzgeschlossen}) \quad (10.4.6)$$

falls sie nicht kurzgeschlossen ist, d.h. falls sie nicht mit einem anderen äusseren Vertex verbunden ist. Falls sie mit dem Vertex x_j verbunden ist, erhält man stattdessen

$$\frac{i}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i + p_j) \quad (\text{kurzgeschlossen}). \quad (10.4.7)$$

- (iii) Die l -te innere Linie ergibt

$$\frac{i}{k_l^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (10.4.8)$$

- (iv) Jeder innere Vertex liefert den Faktor

$$-i\lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_{l=1}^4 \sigma_l k_l\right), \quad (10.4.9)$$

wobei die Summe über die vier Linien läuft, die an dem Vertex beginnen oder enden.

(v) Dann integriere man über die inneren Impulse,

$$\int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \cdots \int \frac{d^4 k_m}{(2\pi)^4}. \quad (10.4.10)$$

(vi) Schliesslich wichte man jedes Diagramm mit dem Faktor $1/(S \cdot S')$ und summiere über alle Diagramme.

Um Kontakt mit den Streurechnungen von Kapitel 9 zu machen, beobachten wir nun, dass die LSZ-Formel in der Impulsdarstellung die Form (**Übungsaufgabe**)

$$\begin{aligned} \text{aus} \langle p_1, \dots, p_k | q_1, \dots, q_n \rangle_{\text{ein}} &= \text{ein} \langle p_1, \dots, p_k | S | q_1, \dots, q_n \rangle_{\text{ein}} \\ &+ \left(-i Z^{-1/2} \right)^{k+n} \prod_{i=1}^k (p_i^2 - m^2) \prod_{j=1}^n (q_j^2 - m^2) G(-p_1, \dots, -p_k, q_1, \dots, q_n) \end{aligned} \quad (10.4.11)$$

annimmt, wobei alle p_i und q_j auf der Massenschale liegen ($p_i^2 = q_j^2 = m^2$), und wir angenommen haben, dass es keine nicht-zusammenhängenden Terme gibt, d.h. dass alle p_i und q_j unterschiedlich sind. Die Faktoren aus Regel (ii) (wegen der Annahme des vorigen Satzes tragen hier keine kurzgeschlossenen Linien bei) kürzen daher einfach gerade die Terme $(p_i^2 - m^2)$ [amputierte Diagramme]. Die Entwicklung der Streuamplitude ist dann einfach durch die obigen Feynman Regeln gegeben, wobei lediglich Regel (ii) durch

(ii') Jede äussere Linie liefert einen Faktor $Z^{-1/2}$.

ersetzt wird.

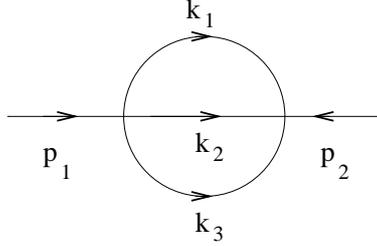
Weiterhin beobachten wir, dass wegen der δ -Funktionen in Regel (iv) die obige Fouriertransformierte tatsächlich einen Faktor

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_{i=1}^n p_i \right) \quad (10.4.12)$$

enthält, der wie in Kapitel 9.1 abgespalten werden kann, um zu dem reduzierten Matrixelement überzugehen, das dann direkt in der Formel für den Wirkungsquerschnitt auftaucht.

Als Beispiel betrachten wir nun das Diagramm $D_1 = D_2$ der obigen ϕ^4 -Theorie. Der Beitrag dieses Diagramms zur Streurechnung (10.4.11) ist

$$\begin{aligned} &\frac{1}{S S'} (-i\lambda)^2 Z^{-1} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \left(\prod_{l=1}^3 \frac{i}{k_l^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \\ &\quad \times (2\pi)^8 \delta^{(4)}(p_1 - k_1 - k_2 - k_3) \delta^{(4)}(p_2 + k_1 + k_2 + k_3) \\ &= \frac{1}{3!} (-i\lambda)^2 Z^{-1} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2) \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \\ &\quad \times \frac{i}{k_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{k_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p_1 - k_1 - k_2)^2 - m^2 + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (10.4.13)$$



Wie erwartet, erhält der Ausdruck tatsächlich den Faktor (10.4.12), der die Energie-Impulserhaltung beschreibt. In der Tat ist das Integral jedoch für $k_1, k_2 \rightarrow \infty$ divergent; mit diesem Problem werden wir uns in Kürze beschäftigen müssen.

10.5 Feynman Regeln für die QED

Wir haben in den vorigen Kapiteln im Detail erklärt, wie man die Feynman Regeln für die ϕ^4 Theorie ableiten kann. Es sollte nun klar sein, wie man diese Vorgehensweise im Prinzip auf jede andere Feldtheorie anwenden kann. Im folgenden wollen wir dieses Programm für die Quantenelektrodynamik (QED) durchführen; da die Schritte im wesentlichen identisch sind, werden wir uns kurz halten.

Die Lagrangedichte der QED ist die Summe der Lagrangedichte des freien elektromagnetischen Feldes (mit dem eichfixierenden Term $\lambda = 1$ — siehe (4.2.33)) und eines freien masselosen komplexen Fermions (8.1.1)

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + \frac{i}{2} [\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi], \quad (10.5.1)$$

mit der Eichbedingung ($\partial_\mu A^\mu = 0$), sowie des wechselwirkenden Terms

$$\mathcal{L}_W = -e \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi. \quad (10.5.2)$$

Der wechselwirkende Term folgt aus der ‘minimalen Kopplung’, bei der $i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - e A_\mu$ in der Lagrangedichte für das freie Fermion (Elektron). Dieser Wechselwirkungsterm erhält dann die Eichinvarianz:

$$A^\mu \mapsto A^\mu + \partial^\mu \chi, \quad \psi \mapsto e^{-ie\chi} \psi. \quad (10.5.3)$$

Hierbei ist $\psi \mapsto e^{-ie\chi} \psi$ die Eichsymmetrie der freien Fermionentheorie, die analog zu jener des komplexen Bosons definiert werden kann.

Die Störung des freien Hamiltonoperators ist daher von der Form

$$H_W = e \int d^3 \mathbf{x} : \bar{\psi}(x) A_\mu(x) \gamma^\mu \psi(x) :, \quad (10.5.4)$$

wobei wir die Störung normal geordnet haben. Die Greensfunktionen sind

$$\begin{aligned} G(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_{2n}; y_1, \dots, y_p) \\ = \langle 0 | \mathcal{T} [\psi_{a_1}(x_1) \cdots \psi_{a_n}(x_n) \bar{\psi}_{b_1}(x_{n+1}) \cdots \bar{\psi}_{b_n}(x_{2n}) A_{\mu_1}(y_1) \cdots A_{\mu_p}(y_p)] | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (10.5.5)$$

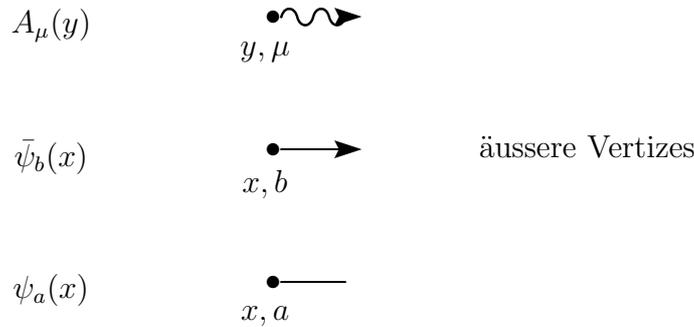
wobei wir links die Komponenten a_i, b_j von $\psi(x_i)$ und $\bar{\psi}(x_j)$ und $\mu_i = 0, \dots, 3$ von $A_{\mu_i}(y_i)$ unterdrückt haben. Wegen Ladungserhaltung (siehe Kapitel 8.2) verschwinden lediglich die Greensfunktionen nicht, für die die Anzahl der Felder ψ und $\bar{\psi}$ übereinstimmen.

Wie zuvor für den Fall der ϕ^4 Theorie kann man dann zeigen, dass sich diese Greensfunktion als

$$G(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_{2n}; y_1, \dots, y_p) \quad (10.5.6)$$

$$= \frac{\langle 0 | \mathcal{T} \left[\psi_{a_1}^{\text{ein}}(x_1) \cdots \bar{\psi}_{b_n}^{\text{ein}}(x_{2n}) A_{\mu_1}^{\text{ein}}(y_1) \cdots A_{\mu_p}^{\text{ein}}(y_p) \exp \left(i \int d^4 z \mathcal{L}_W(z) \right) \right] | 0 \rangle}{\langle 0 | \mathcal{T} \exp \left(i \int d^4 z \mathcal{L}_W(z) \right) | 0 \rangle},$$

wobei $\mathcal{L}_W(z) \equiv \mathcal{L}_W(\psi^{\text{ein}}(z), \bar{\psi}^{\text{ein}}(z), A^{\text{ein}}(z))$ normalgeordnet ist. Wie zuvor werden wir im folgenden den 'ein'-Index weglassen. Wir können dann das Exponential in Potenzen von e entwickeln, und erhalten damit (wie zuvor) eine diagrammatische Entwicklung für die Greensfunktion (10.5.5). Die Diagramme setzen sich zusammen aus



sowie dem inneren Vertex



Diese Vertizes werde mit Photonlinien oder Fermionlinien kontrahiert. Der Elektron-Positronpropagator (Fermionlinie) ist (siehe Kapitel 8.3)

$$\langle 0 | \mathcal{T} (\psi_a(z_1) \bar{\psi}_b(z_2)) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (z_1 - z_2)} \left(\frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \right)_{ab}. \quad (10.5.7)$$

Der Pfeil geht von rechts nach links; die Orientierung spiegelt die unterschiedliche Ladung von ψ und $\bar{\psi}$ wider.

Der Photonenpropagator wird durch eine geschlängelte Linie dargestellt, wobei (siehe Kapitel 7.2)

$$\langle 0 | \mathcal{T}(A_\mu(z_1) A_\nu(z_2)) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (z_1 - z_2)} \frac{-i g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}. \quad (10.5.8)$$

Kontraktionen $\psi\psi$ oder $\bar{\psi}\bar{\psi}$ verschwinden (siehe Kapitel 8.1), ebenso natürlich ψA oder $\bar{\psi} A$.

$$\langle 0 | \mathcal{T}(A_\mu(z_1) A_\nu(z_2)) | 0 \rangle \quad \begin{array}{c} \bullet \text{---} \text{wavy} \text{---} \bullet \\ z_{1,\mu} \quad z_{2,\nu} \end{array} \quad \text{Photonenlinie}$$

$$\langle 0 | \mathcal{T}(\psi_a(z_1) \bar{\psi}_b(z_2)) | 0 \rangle \quad \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ z_{1,\mu} \quad z_{2,\nu} \end{array} \quad \text{Fermionenlinie}$$

Wie zuvor im Fall der skalaren Feldtheorie sorgt der Nenner in (10.5.6) dafür, dass nur verkettete Diagramme berücksichtigt werden müssen. Wegen Ladungserhaltung ist die Orientierung der Fermionenlinien immer so, dass an jedem Vertex eine Fermionenlinie einläuft, und eine ausläuft.

Die Wick-Kontraktionen der Fermionen produzieren Vorzeichen, die wir nun genauer verstehen wollen. Wegen Ladungserhaltung (siehe Kapitel 8.1) gibt es in jedem Diagramm nur zwei Arten von Fermionenlinien: entweder (i) geschlossene Schleifen (der Länge l); oder (ii) eine offene Linie, die einen einlaufenden Vertex $\bar{\psi}(x_{n+j})$ über Vertizes z_1, \dots, z_l schlussendlich mit einem auslaufenden Vertex $\psi(x_i)$ verbindet.

Geschlossene Schleifen (d.h. Fall (i)) bestehen aus einer Folge von Fermionenpropagatoren

$$\overbrace{\bar{\psi}(z_l) \psi(z_{l-1}) \bar{\psi}(z_{l-1}) \psi(z_{l-1}) \cdots \bar{\psi}(z_2) \psi(z_2) \bar{\psi}(z_1) \psi(z_1)} \quad (10.5.9)$$

wobei zwischendrin Felder der Wechselwirkungslagrangedichte auftreten. Da der Wechselwirkungsterm zwei Fermionen enthält, vertauscht er (unter der Zeitordnung) mit allen anderen Feldern; wir können daher den relevanten Term wie oben schreiben. Um das Produkt der Fermionpropagatoren auszuwerten müssen wir dann $\bar{\psi}(z_l)$ ganz nach rechts bringt; die relevante Permutation ist ungerade, und daher treten geschlossene Fermionenschleifen immer mit einem Minuszeichen auf.

Für eine offene Linie (ii) bezeichne $\sigma \in S_n$ die durch alle offenen Linien definierte Permutation, d.h. $j = \sigma(i)$, falls die offene Linie $\psi(x_i)$ mit $\bar{\psi}(x_{j+n})$ verbindet. Das Vorzeichen ist dann die Parität der Permutation in S_{2n}

$$(1, 2, \dots, 2n) \mapsto (1, n + \sigma(1), 2, n + \sigma(2), \dots, n, n + \sigma(n)), \quad (10.5.10)$$

und ist daher gerade

$$(-1)^{n(n-1)/2} \text{sgn } \sigma. \quad (10.5.11)$$

Das Vorzeichen kommt hier einfach daher, dass man die externen Vertizes so umsortiert, dass $\psi(x_i)$ neben $\bar{\psi}(x_{n+\sigma(i)})$ steht. Die zugehörige Kontraktion ist dann nämlich

$$\overbrace{\psi(x_i) \bar{\psi}(x_{n+\sigma(i)}) \bar{\psi}(z_l) \psi(z_l) \cdots \bar{\psi}(z_1) \psi(z_1)}, \quad (10.5.12)$$

und diese führt dann nicht zu einem weiteren Vorzeichen.

Schliesslich sind die Symmetriefaktoren $S = 1$ trivial, da alle Valenzen eines Vertex unterschiedlich sind. Für verkettete Diagramme ist auch $S' = 1$, denn jeder innere Vertex hat über seine Verbindungen zu den äusseren Vertizes eine nicht vertauschbare Rolle.

Die *Feynman Regeln* für die Fouriertransformierte der Greensfunktion

$$\begin{aligned} G(p_1, \dots, p_n; p_{n+1}, \dots, p_{2n}; q_1, \dots, q_p) & \quad (10.5.13) \\ = \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_{2n} \int d^4y_1 \cdots \int d^4y_p e^{-i \sum_i x_i \cdot p_i - i \sum_j y_j \cdot q_j} \\ & \quad \times G(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_{2n}; y_1, \dots, y_p), \end{aligned}$$

lauten dann:

- (i) Man zeichne alle (topologisch) verschiedenen verketteten Diagramme mit nummerierten n auslaufenden und n einlaufenden Fermionenlinien (Impulse p_1, \dots, p_n bzw. p_{n+1}, \dots, p_{2n}), sowie p Photonlinien (q_1, \dots, q_p). [Impulse werden stets als einlaufend gezählt.]
- (ii) Für jeden Photonpropagator erhält man den Faktor

$$\frac{-i}{k^2 + i\epsilon} g_{\mu\nu}, \quad (10.5.14)$$

und für jede Fermionlinie den Faktor

$$i \left(\frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \right)_{ab}. \quad (10.5.15)$$

Schliesslich produziert der innere Vertex den Faktor

$$-i e (\gamma_\mu)_{ba} (2\pi)^4 \delta(q), \quad (10.5.16)$$

wobei q die Summe der im Vertex einlaufenden Impulse ist. [Natürlich muss an jedem Vertex über die Indizes a, b und μ summiert werden!]

- (iii) Integriere über alle inneren Impulse,

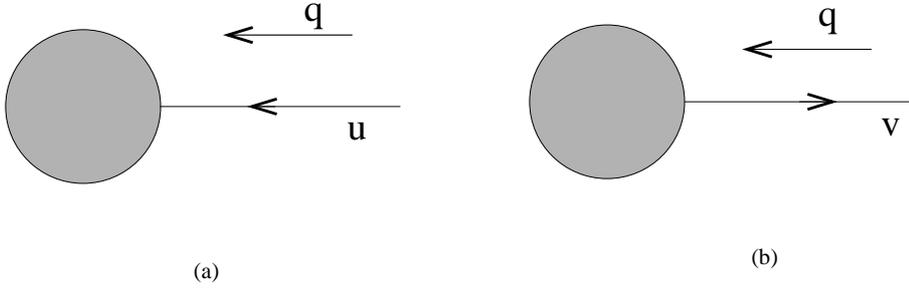
$$\prod_l \int \frac{d^4k_l}{(2\pi)^4}. \quad (10.5.17)$$

(iv) Multipliziere mit -1 für jede geschlossene Fermionenschleife, und mit der Parität von (10.5.10) für jede offene Fermionenschleife und summiere über alle Diagramme.

Unter Benützung der LSZ Reduktionsformel kann man nun daraus wieder direkt daraus Streuamplituden bestimmen; dazu muss man lediglich die äusseren Linien amputieren, d.h. mit den relevanten Faktoren, die in der LSZ Formel auftreten, multiplizieren. [Wir hatten oben diese Formel lediglich für den Fall eines skalaren Feldes berechnet — für Fermionen und Vektorfelder treten kleine (offensichtliche) Änderungen auf.] Für ein externes Photon mit Polarisation ϵ führt dies zu

$$\frac{-i}{k^2 + i\epsilon} g_{\mu\nu} (-iZ_3^{-1/2}) (-k^2)\epsilon^\nu = Z_3^{-1/2} \epsilon_\mu, \quad (10.5.18)$$

wobei Z_3 der Skalierungsfaktor für das A -Feld ist. Für äussere Fermionen hat man stattdessen im ersten Fall (a)

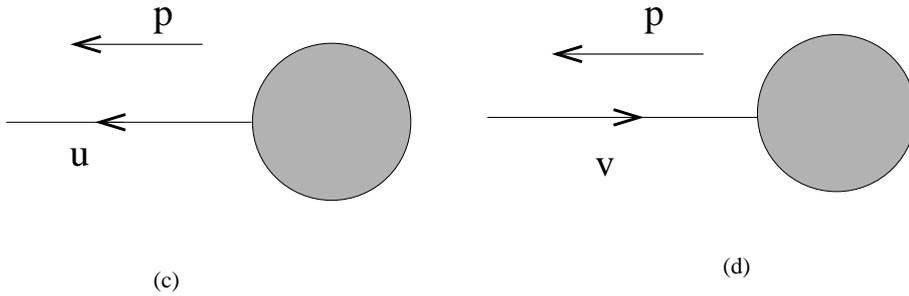


$$i \left(\frac{q + m}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \right)_{ab} (-iZ_2^{-1/2}) ((q - m)u)_b = Z_2^{-1/2} u_a,$$

und im zweiten Fall (b)

$$-Z_2^{-1/2} \bar{v}_a.$$

In den anderen beiden Fällen erhält man stattdessen



Fall (c) $Z_2^{-1/2} \bar{u}_a,$

Fall (d) $-Z_2^{-1/2} v_a.$

Einlaufende Fermionen haben hier den Impuls q , und auslaufende Fermionen den Impuls p .

Schliesslich ist wiederum klar (aus Regel (ii)), dass jedes Diagramm einen Faktor

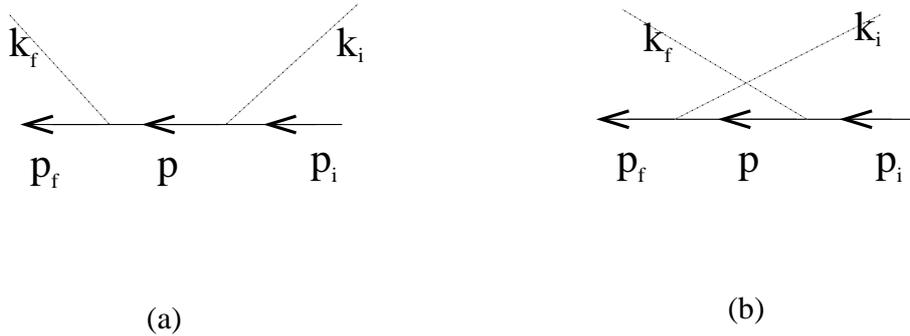
$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_i p_i - \sum_j q_j\right) \quad (10.5.19)$$

enthält; dieser muss wiederum weggelassen werden, um die reduzierten Matrixelemente zu erhalten (die dann in der Streuformel auftreten).

Für die tatsächliche Berechnung von solchen Amplituden ist ausserdem manchmal *Furry's Lemma* nützlich: zwei Diagramme, die sich bloss in der Orientierung einer geschlossenen Fermionenschleife *ungerader Länge* unterscheiden geben entgegengesetzt gleiche Beträge. Also kann man solche Paare von Diagrammen weglassen.

10.6 Compton Streuung

Wir wollen nun die oben beschriebenen Techniken auf die Berechnung der Compton-Streuung anwenden, bei der ein Elektron an einem Photon gestreut wird. Das reduzierte Matrixelement ist durch die Summe aller verketteten Diagramme gegeben; zu niedrigster Ordnung in e tragen nur die *Baumdiagramme* bei (Diagramme ohne Schleifen jeglicher Art): [Hier haben wir die Photonenlinien (aus typographischen Gründen) gepunktet]



dargestellt. Wir haben ausserdem die Polarisierungen der externen Fermionen und Photonen nicht explizit angegeben; wir bezeichnen diese mit $u^{(i)}$, $u^{(f)}$ und $\epsilon^{(i)}$, $\epsilon^{(f)}$.]

Diese Baumdiagramme sind proportional zu $Z_2^{-1} Z_3^{-1} e^2$. Da wir zu führender Ordnung in e arbeiten, können wir Z_2 und Z_3 durch ihren Wert $Z_2 = Z_3 = 1$ bei $e = 0$ ersetzen. Wegen der δ -Funktion in dem inneren Vertex ist die Integration über p trivial, und lediglich der Wert $p = p_i + k_i$ (a) bzw. $p = p_i - k_f$ (b) trägt bei. Der linke Vertex in (a) liefert dann

$$(-ie) \bar{u}_b^{(f)} (\gamma_\mu)_{ba} \epsilon^{(f)\mu} = (-ie) \left(\bar{u}^{(f)} \not{\epsilon}^{(f)} \right)_a, \quad (10.6.1)$$

und entsprechendes gilt für die anderen Vertizes. Daher ist also das reduzierte Matrixelement (wir haben also den Faktor $i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_f + p_f - k_i - p_i)$ abgespalten)

$$T(p_f, k_f, p_i, k_i) = (-ie)^2 \bar{u}^{(f)} \left(\not{\epsilon}^{(f)} \frac{\not{p}_i + \not{k}_i + m}{2 p_i \cdot k_i} \not{\epsilon}^{(i)} + \not{\epsilon}^{(i)} \frac{\not{p}_i - \not{k}_f + m}{-2 p_i \cdot k_f} \not{\epsilon}^{(f)} \right) u^{(i)}, \quad (10.6.2)$$

wobei wir den Nenner der Fermionenlinie direkt ausgewertet haben. [Zum Beispiel ist für (a)

$$(p_i + k_i)^2 - m^2 = 2p_i \cdot k_i, \quad (10.6.3)$$

da $p_i^2 = m^2$ und $k_i^2 = 0$; die Rechnung im Fall (b) ist identisch. Da diese Grösse nicht verschwindet, kann man die $i\epsilon$ Vorschrift weglassen.] Es ist nun klar, dass die Beiträge von (a) und (b) durch die Ersetzung

$$(k_i, \epsilon^{(i)}) \leftrightarrow (-k_f, \epsilon^{(f)}) \quad (10.6.4)$$

auseinander hervorgehen; dies spiegelt einfach die ‘crossing Symmetrie’ wider.

Wir wollen den Streuquerschnitt für die Streuung von Photonen an nicht-polarisierten Elektronen berechnen, falls die Polarisation des Elektrons im Endzustand nicht gemessen wird. Wir müssen daher die Wahrscheinlichkeit über die Polarisationszustände des einlaufenden Elektrons mitteln, und über die Polarisationszustände des auslaufenden Elektrons summieren. Bis auf kinematische Faktoren müssen wir daher

$$\frac{1}{2} \frac{1}{(2m)^2} \sum_{\alpha, \beta=1,2} |T|^2 \quad (10.6.5)$$

berechnen. Unter Berücksichtigung der relevanten kinematischen Faktoren [Fluss des einfallenden Photons: $(2/m)p_i \cdot k_i$; Phasenraumfaktor des auslaufenden Elektrons und Photons $m d^3 p_f / p_f^0 (2\pi)^3$ bzw. $d^3 k_f / 2 k_f^0 (2\pi)^3$] ist dann das Analogon von (9.1.18)

$$d\sigma = \frac{1}{2(2m)^2} \sum_{\alpha, \beta=1,2} |T|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f + k_f - p_i - k_i) \frac{m}{2 p_i \cdot k_i} \frac{d^3 k_f}{2 k_f^0 (2\pi)^3} \frac{m d^3 p_f}{p_f^0 (2\pi)^3}. \quad (10.6.6)$$

Wir messen das auslaufende Photon in dem Laborsystem, in dem das einlaufende Elektron ruht, $p_i = (m, \mathbf{0})$, und zwar relativ zu der Achse, die durch das einlaufende Photon definiert wird; dann ist der Wirkungsquerschnitt pro Winkelelement $d\Omega$

$$\int d^3 p_f d^3 k_f \delta^{(4)}(p_f + k_f - p_i - k_i) = (k_f^0)^2 \left| \frac{dk_f^0}{d(p_f^0 + k_f^0)} \right| d\Omega. \quad (10.6.7)$$

Wir berechnen

$$\frac{dp_f^0 + dk_f^0}{dk_f^0} = 1 + \frac{1}{2p_f^0} \frac{d(p_f^0)^2}{dk_f^0} = 1 + \frac{1}{2p_f^0} \frac{d}{dk_f^0} [m^2 + (\mathbf{k}_f - \mathbf{k})^2] = \frac{p_f \cdot k_f}{p_f^0 k_f^0}. \quad (10.6.8)$$

Daher erhalten wir

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{2(2m)^2} \sum_{\alpha, \beta=1,2} |T|^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{(k_f^0 m)^2}{(p_i \cdot k_i) (p_f \cdot k_f)} d\Omega \\ &= \frac{1}{2(2m)^2} \sum_{\alpha, \beta=1,2} |T|^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{k_f^0}{k_i^0} \right)^2 d\Omega, \end{aligned} \quad (10.6.9)$$

wobei wir benützt haben, dass wegen Impulserhaltung

$$(p_i + k_i)^2 = (p_f + k_f)^2, \quad p_i \cdot k_i = p_f \cdot k_f = m k_i^0. \quad (10.6.10)$$

Zunächst berechnen wir (10.6.5):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 |T|^2 &\equiv \frac{1}{2} e^4 \sum_{\alpha, \beta=1}^2 |\bar{u}^{(\beta)}(p_f) M u^{(\alpha)}(p_i)|^2 \\ &= \frac{1}{2} e^4 \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \left(\bar{u}^{(\beta)}(p_f) M u^{(\alpha)}(p_i) \right) \left(\bar{u}^{(\alpha)}(p_i) \bar{M} u^{(\beta)}(p_f) \right), \end{aligned} \quad (10.6.11)$$

wobei M die Matrix

$$M = \not{\epsilon}^{(f)} \frac{\not{p}_i + \not{k}_i + m}{2 p_i \cdot k_i} \not{\epsilon}^{(i)} + \not{\epsilon}^{(i)} \frac{\not{p}_i - \not{k}_f + m}{-2 p_i \cdot k_f} \not{\epsilon}^{(f)} \quad (10.6.12)$$

ist, und

$$\bar{M} = \gamma^0 M^\dagger \gamma^0 = \not{\epsilon}^{(i)} \frac{\not{p}_i + \not{k}_i + m}{2 p_i \cdot k_i} \not{\epsilon}^{(f)} + \not{\epsilon}^{(f)} \frac{\not{p}_i - \not{k}_f + m}{-2 p_i \cdot k_f} \not{\epsilon}^{(i)}. \quad (10.6.13)$$

[Hier haben wir benützt, dass $\gamma^0 (\gamma^\mu)^* \gamma^0 = \gamma^\mu$.] Zusammen mit (8.1.19) kann man dies dann auch als

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 |T|^2 = \frac{1}{2} e^4 \text{Sp} \left((\not{p}_f + m) M (\not{p}_i + m) \bar{M} \right) \quad (10.6.14)$$

schreiben. Diese Spur ist tatsächlich Lorentz-invariant, aber wir interessieren uns nur für das Laborsystem ($p_i = (m, \mathbf{0})$), in dem die Berechnung sich ein wenig vereinfacht. Dann gilt nämlich zusätzlich zu den allgemeinen Beziehungen

$$\epsilon^{(i)} \cdot \epsilon^{(i)} = \epsilon^{(f)} \cdot \epsilon^{(f)} = -1, \quad \epsilon^{(i)} \cdot k_i = 0 = \epsilon^{(f)} \cdot k_f \quad (10.6.15)$$

auch

$$\epsilon^{(i)} \cdot p_i = 0 = \epsilon^{(f)} \cdot p_i \quad (10.6.16)$$

da p_i die Rolle von n spielt. Wegen $\{\not{a}, \not{b}\} = 2a \cdot b$ gibt dies die Umformung

$$M = \not{\epsilon}^{(f)} \not{\epsilon}^{(i)} \frac{\not{p}_i + \not{k}_i - m}{-2 p_i \cdot k_i} + \not{\epsilon}^{(i)} \not{\epsilon}^{(f)} \frac{\not{p}_i - \not{k}_f - m}{2 p_i \cdot k_f} \quad (10.6.17)$$

$$\bar{M} = \frac{\not{p}_i + \not{k}_i - m}{-2 p_i \cdot k_i} \not{\epsilon}^{(i)} \not{\epsilon}^{(f)} + \frac{\not{p}_i - \not{k}_f - m}{2 p_i \cdot k_f} \not{\epsilon}^{(f)} \not{\epsilon}^{(i)}. \quad (10.6.18)$$

Weiterhin gilt

$$(\not{p}_i \mp m)(\not{p}_i \pm m) = p_i^2 - m^2 = 0, \quad (10.6.19)$$

und daher findet man

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 |T|^2 \tag{10.6.20} \\
&= \frac{e^4}{8} \text{Sp} \left[(\not{p}_f + m) \left(\frac{\not{\epsilon}^{(f)} \not{\epsilon}^{(i)} \not{k}_i}{p_i \cdot k_i} + \frac{\not{\epsilon}^{(i)} \not{\epsilon}^{(f)} \not{k}_f}{p_i \cdot k_f} \right) (\not{p}_i + m) \left(\frac{\not{k}_i \not{\epsilon}^{(i)} \not{\epsilon}^{(f)}}{p_i \cdot k_i} + \frac{\not{k}_f \not{\epsilon}^{(f)} \not{\epsilon}^{(i)}}{p_i \cdot k_f} \right) \right] \\
&= \frac{e^4}{8} \left(\frac{S_{aa}}{(p_i \cdot k_i)^2} + \frac{S_{bb}}{(p_i \cdot k_f)^2} + \frac{S_{ab} + S_{ba}}{(p_i \cdot k_i)(p_i \cdot k_f)} \right),
\end{aligned}$$

wobei S_{aa} , usw. in der offensichtlichen Weise definiert worden sind. Die weitere Rechnung ist eine Anwendung der bereits verwendeten Identität

$$\not{a} \not{b} = -\not{b} \not{a} + 2a \cdot b. \tag{10.6.21}$$

Wir wollen sie nur für S_{aa} durchführen; die Methode für die anderen Terme ist ähnlich:

$$\begin{aligned}
S_{aa} &= \text{Sp} \left((\not{p}_f + m) \not{\epsilon}^{(f)} \not{\epsilon}^{(i)} \not{k}_i (\not{p}_i + m) \not{k}_i \not{\epsilon}^{(i)} \not{\epsilon}^{(f)} \right) \\
&= \text{Sp} \left(\not{p}_f \not{\epsilon}^{(f)} \not{\epsilon}^{(i)} \not{k}_i \not{p}_i \not{k}_i \not{\epsilon}^{(i)} \not{\epsilon}^{(f)} \right),
\end{aligned}$$

wobei wir benützt haben, dass

$$\not{k}_i m \not{k}_i = m \not{k}_i \not{k}_i = m k_i^2 = 0$$

sowie

$$\not{k}_i \not{\epsilon}^{(i)} \not{\epsilon}^{(f)} m \not{\epsilon}^{(f)} \not{\epsilon}^{(i)} \not{k}_i = (\epsilon^{(f)} \cdot \epsilon^{(f)}) (\epsilon^{(i)} \cdot \epsilon^{(i)}) \not{k}_i m \not{k}_i = 0.$$

Weiterhin ist $\not{k}_i \not{p}_i \not{k}_i = 2(k_i \cdot p_i) \not{k}_i$ und daher

$$\begin{aligned}
S_{aa} &= 2(k_i \cdot p_i) \text{Sp} \left(\not{p}_f \not{\epsilon}^{(f)} \not{\epsilon}^{(i)} \not{k}_i \not{\epsilon}^{(i)} \not{\epsilon}^{(f)} \right) \\
&= 2(k_i \cdot p_i) \text{Sp} \left(\not{p}_f \not{\epsilon}^{(f)} \not{k}_i \not{\epsilon}^{(f)} \right) \\
&= 2(k_i \cdot p_i) \left[2(\epsilon^{(f)} \cdot k_i) \text{Sp}(\not{p}_f \not{\epsilon}^{(f)}) + \text{Sp}(\not{p}_f \not{k}_i) \right] \\
&= 8(k_i \cdot p_i) \left[2(\epsilon^{(f)} \cdot k_i) (p_f \cdot \epsilon^{(f)}) + (p_f \cdot k_i) \right] \\
&= 8(k_i \cdot p_i) \left[2(\epsilon^{(f)} \cdot k_i)^2 + (p_i \cdot k_f) \right] \tag{10.6.22}
\end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Zeile benützt haben, dass $k_i \cdot \epsilon^{(i)} = 0$ sowie $(\epsilon^{(i)})^2 = -1$, und in der letzten Zeile Impulserhaltung $p_f - k_i = p_i - k_f$, die zusammen mit (10.6.15) und (10.6.16) impliziert, dass

$$p_f \cdot k_i = p_i \cdot k_f \quad \epsilon^{(f)} \cdot (p_f - k_i) = 0. \tag{10.6.23}$$

Eine Formel für S_{bb} erhält man daraus mit Hilfe der Ersetzung (10.6.4), und das Resultat für $S_{ab} = S_{ba}$ ist

$$S_{ab} = 8 \left[(k_i \cdot p_i) (k_f \cdot p_i) (2(\epsilon^{(f)} \cdot \epsilon^{(i)})^2 - 1) + (k_f \cdot \epsilon^{(i)})^2 (k_i \cdot p_i) - (k_i \cdot \epsilon^{(f)})^2 (k_f \cdot p_i) \right]. \tag{10.6.24}$$

Insgesamt erhalten wir daher also

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 |T|^2 = e^4 \left(\frac{p_i \cdot k_f}{p_i \cdot k_i} + \frac{p_i \cdot k_i}{p_i \cdot k_f} + 4(\epsilon^{(i)} \cdot \epsilon^{(f)})^2 - 2 \right). \quad (10.6.25)$$

Einsetzen in (10.6.9) ergibt dann für den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{4(4\pi m)^2} \left(\frac{|\mathbf{k}_f|}{|\mathbf{k}_i|} \right)^2 \left(\frac{|\mathbf{k}_f|}{|\mathbf{k}_i|} + \frac{|\mathbf{k}_i|}{|\mathbf{k}_f|} + 4(\epsilon^{(i)} \cdot \epsilon^{(f)})^2 - 2 \right), \quad (10.6.26)$$

wobei wir benützt haben, dass $p_i \cdot k_i = m k_i^0$, $p_i \cdot k_f = m k_f^0$, sowie dass $k_i^0 = |\mathbf{k}_i|$ und $k_f^0 = |\mathbf{k}_f|$. Dies ist die Formel von *Klein-Nishina* (1929). Der Vorfaktor kann auch als

$$\frac{e^4}{4(4\pi m)^2} = \frac{r_0^2}{4}, \quad r_0 = \frac{e^2}{4\pi m} \quad (10.6.27)$$

geschrieben werden, wobei r_0 der klassische Elektronenradius ist. Weiterhin können wir $|\mathbf{k}_f|$ durch $|\mathbf{k}_i|$ und den Streuwinkel $\cos \theta = \mathbf{e}_f \cdot \mathbf{e}_i$ unter Benützung der 4-er Impulserhaltung ausdrücken: wegen $k_f - k_i = p_i - p_f$ ist das Quadrat

$$-k_i \cdot k_f = m^2 - p_i \cdot p_f, \quad (10.6.28)$$

wobei $k_i \cdot k_f = |\mathbf{k}_i||\mathbf{k}_f|(1 - \cos \theta)$ und $p_i \cdot p_f = mp_f^0 = m(m - |\mathbf{k}_f| + |\mathbf{k}_i|)$, also

$$|\mathbf{k}_f| = \frac{|\mathbf{k}_i|}{1 + (|\mathbf{k}_i|/m)(1 - \cos \theta)}. \quad (10.6.29)$$

Im Grenzfall Photonen niedriger Energie, $|\mathbf{k}_i|/m \rightarrow 0$, wird daher der differentielle Wirkungsquerschnitt (10.6.26)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \frac{|\mathbf{k}_f|^2}{|\mathbf{k}_i|^2} (\epsilon^{(i)} \cdot \epsilon^{(f)})^2, \quad (10.6.30)$$

was gerade die klassische Thomson Formel reproduziert (die im Rahmen der klassischen Elektrodynamik abgeleitet werden kann).

Falls die einfallenden Photonen unpolarisiert sind, und auch die Polarisation der gestreuten Photonen nicht gemessen wird, muss man über $\epsilon^{(i)}$ mitteln und dann über alle möglichen Werte für $\epsilon^{(f)}$ summieren

$$\overline{\frac{d\sigma}{d\Omega}} = \frac{1}{2} \sum_{\epsilon^{(i)}, \epsilon^{(f)}} \frac{d\sigma}{d\Omega}. \quad (10.6.31)$$

Man rechnet leicht nach, dass [beachte, dass nur die zwei zu k_i und k_f transversalen Polarisationen beitragen!]

$$4 \sum_{\epsilon^{(i)}, \epsilon^{(f)}} (\epsilon^{(i)} \cdot \epsilon^{(f)})^2 = 1 + \cos^2 \theta. \quad (10.6.32)$$

Damit erhält man

$$\overline{\frac{d\sigma}{d\Omega}} = \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{|\mathbf{k}_f|}{|\mathbf{k}_i|} \right)^2 \left(\frac{|\mathbf{k}_f|}{|\mathbf{k}_i|} + \frac{|\mathbf{k}_i|}{|\mathbf{k}_f|} - \sin^2 \theta \right). \quad (10.6.33)$$

11 Renormierung

Wie wir bereits zuvor (in Kapitel 10.4) gesehen haben, sind die Integrale, die in der Auswertung der Feynman Graphen auftreten, häufig divergent. Wir wollen nun verstehen, wie man diese Divergenzen regularisieren und renormalisieren kann. Dazu wollen wir ein einfaches Beispiel betrachten, an dem sich die wesentlichen Dinge bereits gut zeigen lassen.

11.1 Die 2-Punkt Funktion der ϕ^3 Theorie

Als ein einfaches Beispiel betrachten wir die ϕ^3 Theorie, deren Lagrangedichte durch

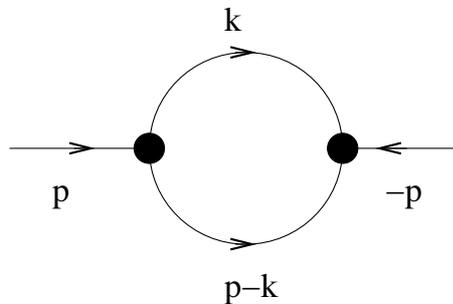
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{m_0}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{3!}\phi^3 \quad (11.1.1)$$

gegeben ist. Die Feynman Regeln dieser Theorie sind denen, der ϕ^4 -Theorie sehr ähnlich: der einzige Unterschied besteht nun darin, dass der innere Vertex drei (statt vier) Linien hat.

Wir können dann die zeit-geordnete 2-Punktfunction perturbativ berechnen. In der freien Theorie entspricht diese 2-Punktfunction gerade dem Propagator, der im Impulsraum durch

$$G^{(0)}(p) = \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \quad (11.1.2)$$

dargestellt wird. Der erste Korrekturterm tritt zu Ordnung λ^2 auf, und er kommt von dem Feynman Diagramm



Im Impulsraum ist dieser Ausdruck

$$\frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \left(-i\lambda^2 \Sigma_2(p^2, m_0^2) \right) \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}, \quad (11.1.3)$$

wobei

$$-i\lambda^2 \Sigma_2(p^2, m_0^2) = \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m_0^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p-k)^2 - m_0^2 + i\epsilon}. \quad (11.1.4)$$

[Der Faktor 1/2 kommt daher, dass $S = 2$ und $S' = 1$.] Zu dieser Ordnung ist daher die Fouriertransformierte der 2-Punktfunktion

$$\begin{aligned} G(p^2) &= \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \left(1 - \lambda^2 \frac{\Sigma_2(p^2, m_0^2)}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \right)^{-1} \\ &= \frac{i}{p^2 - m_0^2 - \lambda^2 \Sigma_2(p^2, m_0^2) + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (11.1.5)$$

Die Entwicklung der geometrischen Reihe $(1 - q)^{-1}$ zeigt, dass sich (11.1.5) von (11.1.3) um die Diagramme unterscheidet, die einen Teil der Diagramme höherer Ordnung aus-



machen.

Das Problem liegt jedoch nun darin, dass das Integral (11.1.4) der Selbstenergie $\lambda^2 \Sigma_2$ *logarithmisch divergent* ist, da der Grad in k des Nenners gleich der Dimension der Integration ist. Die Differenz des Integranden für verschiedene Werte des äusseren Impulses p ist konvergent (wie wir gleich explizit zeigen werden)

$$\begin{aligned} \Sigma_2'(p^2, m_0^2) &= \Sigma_2(p^2, m_0^2) - \Sigma_2(0, m_0^2) \\ &= \frac{i}{32 \pi^4} \left[\int d^4 k \left(\frac{1}{(k^2 - m_0^2 + i\epsilon)((p-k)^2 - m_0^2 + i\epsilon)} - \frac{1}{(k^2 - m_0^2 + i\epsilon)^2} \right) \right] \end{aligned}$$

aber die Selbstenergie für $p = 0$ divergiert natürlich weiterhin

$$\Sigma_2(0, m_0^2) = \frac{i}{32 \pi^4} \int d^4 k \frac{1}{(k^2 - m_0^2 + i\epsilon)^2}. \quad (11.1.6)$$

Um die Feynman Diagramme endlich zu machen, führen wir nun eine *Regularisierung* ein. Es gibt natürlich verschiedene Methoden, dies zu erreichen, aber eine bequeme Art (im gegenwärtigen Kontext) ist die sogenannte *Pauli-Villars* Methode. Dazu ersetzen wir einfach jeden Propagator durch

$$\frac{i}{k^2 - m_0^2 + i\epsilon} \mapsto \frac{i}{k^2 - m_0^2 + i\epsilon} - \frac{i}{k^2 - M^2 + i\epsilon} = \frac{-i(M^2 - m_0^2)}{(k^2 - m_0^2 + i\epsilon)(k^2 - M^2 + i\epsilon)}. \quad (11.1.7)$$

Der modifizierte Propagator geht dann wie

$$\begin{aligned} \rightarrow & \frac{i}{k^2 - m_0^2 + i\epsilon} && \text{falls } M^2 \rightarrow \infty \text{ für } k^2 \text{ fest} \\ = & \mathcal{O}((k^2)^{-2}) && \text{falls } k^2 \rightarrow \infty \text{ für } M^2 \text{ fest.} \end{aligned}$$

Der Parameter M^2 spielt daher die Rolle eines *cutoff*, der das Abschneiden des Propagators (bei $k^2 \approx M^2$) beschreibt. Für die Differenz Σ' ist diese Ersetzung für $M^2 \rightarrow \infty$ natürlich unwesentlich, da das Integral ja bereits ohne diese Modifikation konvergiert; hingegen ist nun

$$\Sigma_2(0, m_0^2) = \frac{i}{32\pi^4} (M^2 - m_0^2)^2 \int d^4k \frac{1}{(k^2 - m_0^2 + i\epsilon)^2 (k^2 - M^2 + i\epsilon)^2}. \quad (11.1.8)$$

erst für $M^2 \rightarrow \infty$ divergent.

Wir wollen nun $\Sigma'_2(p^2, m_0^2)$ direkt ausrechnen. Dazu beobachten wir, dass $\Sigma'_2(p^2, m_0^2)$ durch die beiden Bedingungen

$$\frac{\partial \Sigma'_2}{\partial p^2} = \frac{\partial \Sigma}{\partial p^2} \quad \text{und} \quad \Sigma'_2(p^2 = 0, m_0^2) = 0 \quad (11.1.9)$$

bestimmt ist. Wegen

$$\frac{\partial}{\partial p^\mu} = 2p_\mu \frac{\partial}{\partial p^2} \quad (11.1.10)$$

ist dann

$$\frac{\partial \Sigma'_2}{\partial p^2} = \frac{p^\mu}{2p^2} \frac{\partial \Sigma'_2}{\partial p^\mu} = \frac{-i}{32\pi^4 p^2} \int d^4k \frac{p \cdot (p - k)}{((p - k)^2 - m_0^2 + i\epsilon)^2 (k^2 - m_0^2 + i\epsilon)}. \quad (11.1.11)$$

Unter Verwendung der Feynman Parametrisierung

$$\frac{1}{A^2 B} = 2 \int_0^1 dx x (Ax + B(1-x))^{-3}, \quad (11.1.12)$$

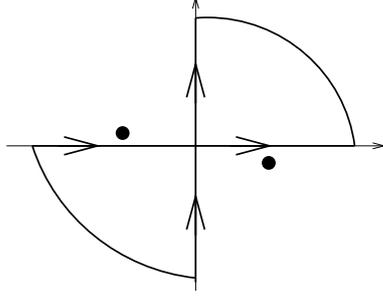
von

$$\begin{aligned} ((p - k)^2 - m_0^2 + i\epsilon) x + (k^2 - m_0^2 + i\epsilon) (1 - x) &= (p^2 - 2p \cdot k) x + k^2 - m_0^2 + i\epsilon \\ &= (k - px)^2 + p^2 x (1 - x) - m_0^2 + i\epsilon \end{aligned}$$

sowie der Substitution $k - px \mapsto k$ ist dann

$$\begin{aligned} 32\pi^4 p^2 \frac{\partial \Sigma'_2}{\partial p^2} &= 2i \int_0^1 dx x \int d^4k \frac{p \cdot (p - (k + px))}{(m_0^2 - p^2 x (1 - x) - k^2 - i\epsilon)^3} \\ &= -2p^2 \int_0^1 dx x (1 - x) \int d^4k \frac{-i}{(m_0^2 - p^2 x (1 - x) - k^2 - i\epsilon)^3}, \end{aligned} \quad (11.1.13)$$

da der Term mit k im Zähler einen ungeraden Integranden liefert, der verschwindet. Das Integral über $k^0 \in \mathbb{R}$ in $d^4k = dk^0 d^3\mathbf{k}$ kann durch eine *Wick Rotation* entlang der imaginären Achse ausgeführt werden $k^0 =: ik^4 \in i\mathbb{R}$; damit wird das 4-dimensionale Integral euklidisch. [Hierbei ist darauf zu achten, dass $K := m_0^2 - p^2 x(1-x) > 0$ so dass es keinen Beitrag von den Polen bei $\pm[K + \mathbf{k}^2 - i\epsilon]^{1/2}$ gibt — siehe Diagramm.]



Das 4-dimensional euklidische Integral ist von der Form (mit $d = 4, \alpha = 3$)

$$\int d^d k \left(\frac{1}{K + k^2} \right)^\alpha = \pi^{d/2} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} K^{d/2-\alpha}, \quad (11.1.14)$$

wobei $k = (\mathbf{k}, k^d)$ mit $k^2 = \sum_{i=1}^d (k^i)^2$. Die Γ -Funktion ist durch

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{z-1} \quad (11.1.15)$$

definiert; sie ist dadurch ausgezeichnet, dass $\Gamma(z + 1) = z \Gamma(z)$ und $\Gamma(1) = 1$. [Sie ist deshalb die analytische Erweiterung der Fakultätsfunktion!] Damit wird die rechte Seite von (11.1.13)

$$-\pi^2 p^2 \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{m_0^2 - p^2 x(1-x)} = \pi^2 p^2 \frac{\partial}{\partial p^2} \left[\int_0^1 dx \log(m_0^2 - p^2 x(1-x)) \right]. \quad (11.1.16)$$

Zusammen mit (11.1.9) findet man dann

$$\Sigma'_2(p^2, m_0^2) = \frac{1}{32 \pi^2} \int_0^1 dx \log \left(\frac{m_0^2 - p^2 x(1-x)}{m_0^2} \right). \quad (11.1.17)$$

Mit Hilfe der Pauli-Villars Regularisierung kann man auch auf ähnliche Weise $\Sigma_2(0, m_0^2)$ ausrechnen, und man erhält

$$\Sigma_2(0, m_0^2) = -\frac{1}{16 \pi^2} \log \frac{M}{m_0} + \text{konvergent}. \quad (11.1.18)$$

Wie schon zuvor gesehen divergiert $\Sigma_2(0, m_0^2)$ für $M \rightarrow \infty$.

Diese Divergenz kann nun auf verschiedene (aber äquivalente) Weisen interpretiert werden.

11.1.1 Unrenormierte Störungstheorie

Der Masseparameter m_0 , der in die Formulierung der Theorie eingeht, ist nicht direkt messbar, da man die Selbstwechselwirkungen des Teilchens nicht abschalten kann. Die zugehörige Masse wird deshalb üblicherweise die 'nackte Masse' genannt. Die

tatsächliche (messbare) Masse m des Teilchens ist hingegen jene, die sich als Pol in der Fouriertransformierten der (zeit-geordneten) 2-Punktfunktion zeigt,

$$p^2 - m_0^2 - \lambda^2 \Sigma_2(p^2, m_0^2) \Big|_{p^2=m^2} = 0. \quad (11.1.19)$$

Die Idee der Renormierung besteht nun darin, dass man die nackte Masse m_0 so wählt, dass die physikalische Masse m den ‘richtigen’ Wert hat, also, dass m gerade mit der Masse des Teilchens übereinstimmt, das wir beschreiben wollen. Die nackte Masse wird dann im allgemeinen eine Funktion von λ und M^2 sein

$$m_0 \equiv m_0(\lambda, M^2) = m_0^{(0)}(M^2) + m_0^{(2)}(M^2)\lambda^2 + \dots, \quad (11.1.20)$$

und wir wollen sie so wählen, dass (zu Ordnung λ^2)

$$m_0^2(\lambda, M^2) + \lambda^2 \Sigma_2(p^2, m_0^2(\lambda, M^2)) \rightarrow m^2 + \lambda^2 \Sigma_2^R(p^2), \quad M^2 \rightarrow \infty \quad (11.1.21)$$

einen endlichen Grenzwert hat (für ein p , und damit für alle); dies legt die *renormierte Selbstenergie* $\Sigma_2^R(p^2)$ nur bis auf eine additive Konstante fest. Diese wird dadurch festgelegt, dass

$$\Sigma_2^R(m^2) = 0. \quad (11.1.22)$$

Für

$$m_0^2(\lambda, M^2) = m^2 + \lambda^2 \text{konst} + \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \log \frac{M}{m} + \mathcal{O}(\lambda^4) \quad (11.1.23)$$

ist dann

$$\Sigma_2^R(p^2) = \frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dx \log \left(\frac{m^2 - p^2 x(1-x)}{m^2(1-x-x^2)} \right). \quad (11.1.24)$$

[Der Nenner im Logarithmus ergibt sich aus der Bedingung, dass $\Sigma_2^R(m^2) = 0$.]

Die Fouriertransformierte der 2-Punktfunktion ist nun

$$G(p^2) = \frac{i}{p^2 - m^2 - \lambda^2 \Sigma_2^R(p^2) + i\epsilon}, \quad (11.1.25)$$

und besitzt daher den richtigen Massepol. Das Residuum des Pols bei $p^2 = m^2$ ist gerade (nach der Diskussion von Kapitel 9.2) mit Z zu identifizieren,

$$G(p^2) = \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \int_{m_1^2}^{\infty} dm'^2 \sigma(m'^2) \frac{i}{p^2 - m'^2 + i\epsilon}. \quad (11.1.26)$$

Z kann durch die obige Analyse (zu niedrigster Ordnung in λ) bestimmt werden:

$$\frac{1}{Z} = \frac{d}{dp^2} (p^2 - m^2 - \lambda^2 \Sigma_2^R(p^2)) \Big|_{p^2=m^2} = 1 + \frac{1}{32\pi^2} \frac{\lambda^2}{m^2} \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{1-x+x^2}. \quad (11.1.27)$$

Das letzte Integral ist gerade $2\pi/(3\sqrt{3})$, und daher ist

$$Z = 1 - \frac{1}{48\sqrt{3}\pi} \frac{\lambda^2}{m^2}. \quad (11.1.28)$$

Insbesondere ist daher $0 \leq Z < 1$.

11.1.2 Renormierte Störungsrechnung

Eine andere Art, diese Divergenzen zu interpretieren, besteht darin, die Zerlegung der Lagrangedichte in den freien Teil \mathcal{L}_0 und den Wechselwirkungsteil \mathcal{L}_W zu modifizieren. Sei $m_0^2 = m_R^2 + \delta m^2$ mit festem *Masseparameter* m_R^2 und *Gegenterm* $\delta m^2 = \lambda^2(\Delta m^2)$, so dass $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_W$ mit

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m_R^2}{2}\phi^2, \quad \mathcal{L}_W = -\frac{\lambda}{3!}\phi^3 - \frac{\lambda^2}{2}(\Delta m^2). \quad (11.1.29)$$

In der Störungsrechnung (die wie zuvor funktioniert!) ist m_0 durch m_R zu ersetzen; ausserdem kommt noch ein weiterer innerer Vertex der Ordnung 2 (mit Koeffizient $-i\lambda^2(\Delta m^2)$) dazu, und damit noch ein Diagramm der Ordnung λ^2 . Die Rechnung führt nun zu

$$G(p^2) = \frac{i}{p^2 - m_R^2 - \lambda^2 \Sigma_2(p^2, m_R^2; M^2)}, \quad (11.1.30)$$

wobei nun

$$\Sigma_2(p^2, m_R^2; M^2) = \tilde{\Sigma}_2(p^2, m_R^2; M^2) + (\Delta m^2)(M^2), \quad (11.1.31)$$

und $\tilde{\Sigma}_2$ mit der vorigen Funktion Σ_2 übereinstimmt. Die Idee besteht nun darin, $(\Delta m^2)_2(M^2)$ so zu wählen, dass

$$\Sigma_2(p^2, m_R^2; M^2) \longrightarrow \Sigma_2^R(p^2, m_R^2), \quad \text{für } M^2 \rightarrow \infty \quad (11.1.32)$$

endlich ist (für ein p^2 , und daher für alle); diese Vorgehensweise spezifiziert wiederum Σ_2^R nur bis auf eine additive Konstante. Diese Freiheit kann durch einen weiteren Parameter μ^2 , den *Renormierungspunkt*, beschrieben werden:

$$\Sigma_2^R(p^2, m_R^2 | \mu^2) = 0 \quad \text{falls } p^2 = \mu^2. \quad (11.1.33)$$

Dann ist

$$\Sigma_2^R(p^2, m_R^2 | \mu^2) = \frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dx \log \left(\frac{m_R^2 - p^2 x(1-x)}{m_R^2 - \mu^2 x(1-x)} \right). \quad (11.1.34)$$

Die physikalische Masse m^2 ist dann (bei festem λ) durch m_R^2 und μ^2 als Lösung von

$$m_R^2 + \lambda^2 \Sigma_2^R(m^2, m_R^2 | \mu^2) = m^2 \quad (11.1.35)$$

bestimmt. Umgekehrt liefern verschiedene Werte von (m_R^2, μ^2) die selbe vorgegebene Masse m^2 , falls sie (11.1.35) erfüllen. Die Fouriertransformierte der (zeit-geordneten) 2-Punktfunktion ist dann

$$\begin{aligned} G(p^2) &= \frac{i}{p^2 - m_R^2 - \lambda^2 \Sigma_2^R(p^2, m_R^2 | \mu^2)} \\ &= \frac{i}{p^2 - m^2 + \lambda^2 (\Sigma_2^R(m^2, m_R^2 | \mu^2) - \Sigma_2^R(p^2, m_R^2 | \mu^2))}, \end{aligned} \quad (11.1.36)$$

unabhängig von μ^2 , da die Differenz der Σ_2^R von dem Renormierungspunkt μ (der ja lediglich die additive Konstante von Σ_2^R parametrisiert) unabhängig ist.

Durch die zwei Parameter m_R^2 und μ^2 wird also nur eine 1-dimensionale Schar von QFTs parametrisiert. Äquivalente Punkte (m_R^2, μ^2) bilden je eine Kurve $m_R^2 \equiv m_R^2(\mu^2)$. Die Transformationen, die äquivalente Punkte ineinander abbilden, bilden die *Renormierungsgruppe*. Aus der Differenz von (11.1.35) für $\mu^2 = \mu_2^2$ und $\mu^2 = \mu_1^2$ folgt

$$m_R^2(\mu_2^2) = m_R^2(\mu_1^2) + \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \log \left(\frac{m_R^2(\mu_1^2) - \mu_2^2 x(1-x)}{m_R^2(\mu_1^2) - \mu_1^2 x(1-x)} \right) + \mathcal{O}(\lambda^4), \quad (11.1.37)$$

wobei unter dem Logarithmus $m_R^2(\mu_2^2) = m_R^2(\mu_1^2) + \mathcal{O}(\lambda^2)$ benützt wurde. Die Interpretation dieser Gleichung ist, dass $m_R^2(\mu_2^2)$ durch eine *endliche Renormierung* aus $m_R^2(\mu_1^2)$ entsteht. Die infinitesimale Version dieser Gleichung und damit die Differentialgleichung für $m_R^2(\mu^2)$ ist [*Renormierungsgruppengleichung*]

$$\frac{d \log m_R^2}{d \log \mu^2} = \frac{\mu^2}{m_R^2} \frac{d m_R^2}{d \mu^2} = \frac{-1}{32\pi^2} \left(\frac{\lambda}{m_R} \right)^2 \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{(m_R/\mu)^2 - x(1-x)}. \quad (11.1.38)$$

[Diese Gleichung gilt natürlich wiederum nur bis auf Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\lambda^4)$.]

Falls $p^2 \approx \mu^2$, dann gilt wegen (11.1.30)

$$G(p^2) \approx \frac{i}{p^2 - m_R^2}. \quad (11.1.39)$$

Deshalb nennt man üblicherweise $m_R^2(\mu^2)$ die *laufende Masse* bei der Energieskala μ^2 .

Natürlich kann man immer $m_R^2 = m^2$ wählen; das entsprechende μ^2 folgt aus (11.1.35), und ist durch die Bedingung

$$\Sigma_2^R(m^2, m^2|\mu^2) = 0 \quad (11.1.40)$$

bestimmt. Die Lösung ist dann einfach $\mu^2 = m^2$, und (11.1.34) reduziert sich zu (11.1.24).

Alternativ zu (11.1.33) kann man die additive Konstante in Σ_2^R auch so parametrisieren, dass [*minimale Subtraktion*]

$$\Sigma_2^R(p^2, m_R^2|\mu^2) = \frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dx \log \left(\frac{m_R^2 - p^2 x(1-x)}{\mu^2} \right). \quad (11.1.41)$$

Hier hat μ^2 natürlich dann eine andere Bedeutung als in (11.1.33). Durch Ableitung von (11.1.35) bei festem m^2 folgt dann statt (11.1.38)

$$\frac{d \log m_R^2}{d \log \mu^2} = \frac{1}{32\pi^2} \left(\frac{\lambda}{m_R} \right)^2. \quad (11.1.42)$$

Es sollte nun zumindest im Prinzip klar sein, wie sich diese Ideen auch auf den Fall der QED übertragen lassen. [Dort benützt man statt Pauli-Villars geschickterweise dimensionelle Regularisierung.] Leider haben wir nicht mehr die Zeit, dies an einem Beispiel zu demonstrieren. Dem Leser ist daher empfohlen, die entsprechenden Rechnungen in der Literatur, zum Beispiel in [PS, Kapitel 7.5] nachzulesen. Wir wollen stattdessen diese Vorlesung mit einer Diskussion der Renormierung in höherer Ordnung beenden.

11.2 Renormierung in höherer Ordnung

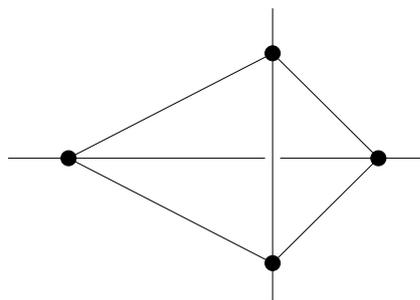
Im vorigen Kapitel haben wir gesehen, wie man die ϕ^3 Theorie zumindest zu niedrigster Ordnung renormieren kann. Natürlich stellt sich sofort die Frage, ob dieses Verfahren auch für Divergenzen, die bei höherer Ordnung auftreten, funktioniert, d.h. ob auch diese Divergenzen in eine Redefinition eines der Parameter der Theorie absorbiert werden kann.

Wir wollen nun diese Frage für eine allgemeine Quantenfeldtheorie mit bosonischen Spin 0 oder 1 Feldern (deren Propagatoren sich wie $\sim k^{-2}$ für grosses k verhalten) und/oder fermionischen Spin 1/2 Feldern (deren Propagatoren wie $\sim k^{-1}$ gehen) diskutieren. Divergenzen können anhand der *1-Teilchen irreduziblen Diagramme* untersucht werden; diese Diagramme sind dadurch charakterisiert, dass sie beim Durchtrennen einer beliebigen Linie zusammenhängend bleiben.

Sei G nun ein solches Diagramm. Dann definieren wir:

- V ist die Anzahl der Vertizes.
- n_B (n_F) bezeichnet die Anzahl der innerern bosonischen (fermionischen) Linien.
- m_B (m_F) bezeichnet die Anzahl der äusseren bosonischen (fermionischen) Linien.
- L bezeichnet die Anzahl unabhängiger Schleifen, d.h. die Anzahl von frei wählbaren Schleifenimpulsen $(k_1, \dots, k_L) := \mathbf{k}$, wobei wir die Impulserhaltung an den Vertizes berücksichtigen.

Zum Beispiel hat das Diagramm der ϕ^4 Theorie $L = 3$, obgleich es 4 Schleifen aufweist.



Wir wollen nun verstehen, wie sich das zugehörige Integral für grosse innere Impulse verhält; dazu ersetzen wir $k \mapsto \lambda k$, und betrachten die Faktoren von λ für $\lambda \rightarrow \infty$. Jede

innere fermionische Linie gibt einen Faktor proportional zu λ^{-1} , wohingegen jede innere bosonische Linie zu λ^{-2} proportional ist. Andererseits gibt es für jeden frei wählbaren Schleifenimpuls einen Massfaktor d^4k_i , der zu λ^4 proportional ist. Der *oberflächliche Divergenzgrad* eines Diagramms G ist daher

$$\omega(G) = 4L - 2n_B - n_F. \quad (11.2.1)$$

Falls $\omega(G) \geq 0$ dann ist das Diagramm ohne Regularisierung divergent (falls $L > 0$). Andererseits ist $\omega(G) < 0$ nur eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für die Konvergenz der k_i - Integrale (ohne Regularisierung). [In der obigen Betrachtung haben wir ja nur den gemeinsamen gross- k_i Limes untersucht, aber es kann passieren, dass das Diagramm trotzdem divergente Teildiagramme enthält.] Insofern ist $\omega(G)$ lediglich ein grobes Kriterium dafür, ob ein Diagramm tatsächlich konvergieren wird oder nicht.

Unter den oben definierten Zahlen liegen Beziehungen vor:

$$L = n_B + n_F - (V - 1), \quad (11.2.2)$$

da jeder Vertex eine $\delta^{(4)}$ -Funktion liefert, die die Anzahl der unabhängigen Impulse $n_B + n_F$ um je 1 verringert. [In der obigen Formel tritt $V - 1$ statt V auf, da diese δ -Funktionen auch die Gesamtimpulserhaltung der einlaufenden Impulse implizieren, die natürlich nicht die Anzahl der unabhängigen Integrale reduziert.]

Damit ist

$$\omega(G) - 4 = 2n_B + 3n_F - 4V. \quad (11.2.3)$$

Führt man die *Dimension* eines Vertex durch

$$\omega = \#(\text{B-Valenzen}) + \frac{3}{2} \#(\text{F-Valenzen}) \quad (11.2.4)$$

ein, so ist, falls alle Vertizes von der gleichen Art sind,

$$\begin{aligned} V \cdot \omega &= 2n_B + m_B + \frac{3}{2}(2n_F + m_F) \\ &= 2n_B + 3n_F + m_B + \frac{3}{2}m_F, \end{aligned} \quad (11.2.5)$$

wobei wir benützt haben, dass jede innere Linie zwei Vertizes verbindet, wohingegen eine äussere Linie nur an einem Vertex endet. Daher gilt also

$$\omega(G) - 4 = V(\omega - 4) - m_B - \frac{3}{2}m_F, \quad (11.2.6)$$

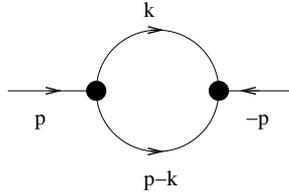
und wir haben den oberflächlichen Divergenzgrad durch die Ordnung V der Störungsrechnung und die Art der Greensfunktion (m_B, m_F) , zu welcher das Diagramm G beiträgt, ausgedrückt.

Zum Beispiel ist für den inneren Vertex der ϕ^3 Theorie $\omega = 3$, und von daher gilt

$$\omega(G) = 4 - V - m_B. \quad (11.2.7)$$

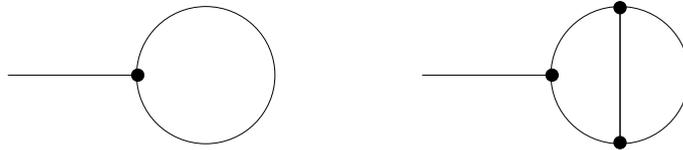
Daher hat diese Theorie lediglich endlich viele oberflächlich divergente Diagramme. Diese sind (das Diagramm mit $m_B = 3$ und $V = 1$ hat $L = 0$ und ist daher offensichtlich konvergent!)

- $m_B = 2$ und $V \leq 2$: Die Divergenz dieses Diagramms wurde durch eine Redefini-



tion der nackten Masse absorbiert.

- $m_B = 1$ und $V \leq 3$: Das erste Diagramm kommt wegen der Normalordnung



nicht vor; das zweite erfordert, dass der Parameter der linearen Kopplung von ϕ modifiziert wird.

Die Renormierung der Theorie verlangt daher, dass die Lagrangedichte (durch nackte Größen ausgedrückt) einen Zusatzterm

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - m_0^2 \phi^2 - \frac{\lambda^3}{3!} \phi^3 - \lambda' \phi \quad (11.2.8)$$

besitzt, der den divergenten Beitrag des letzten Diagramms absorbieren kann.

Die Situation ist ein wenig anders für die QED, für die der innere Vertex

$$\omega = 1 + 2 \cdot \frac{3}{2} = 4 \quad (11.2.9)$$

ist. Dann ist nämlich

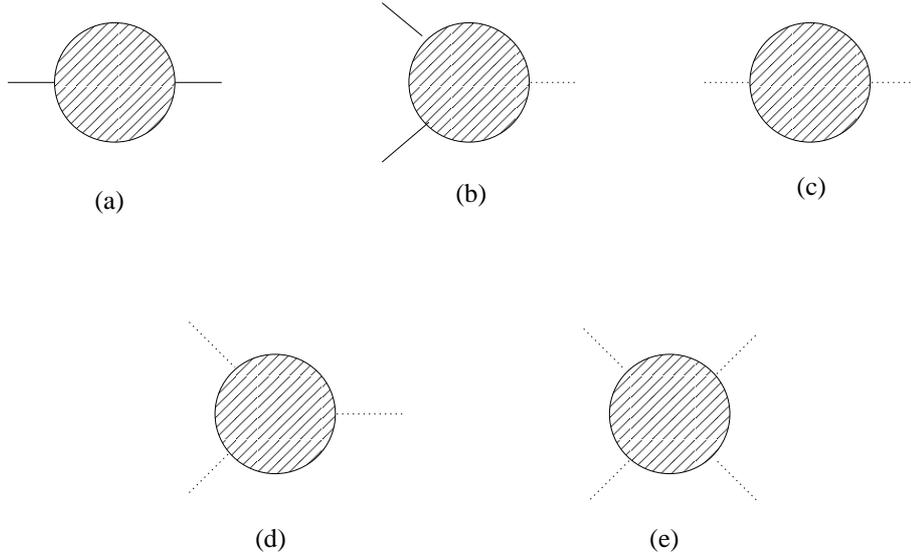
$$\omega(G) = 4 - \frac{3}{2} m_F - m_B, \quad (11.2.10)$$

und von daher gibt es unendlich viele oberflächlich divergente Diagramme (da $\omega(G)$ nicht mit V abnimmt), aber nur endlich viele divergente Greensfunktionen. Diese sind

- (a) $m_B = 0, m_F = 2$: $\omega(G) = 1$. Nach Regularisierung erweisen sich diese Diagramme als nur logarithmisch divergent, da die führende lineare Divergenz

$$\int d^4 k \frac{k'}{k^4} \quad (11.2.11)$$

ungerade ist und daher verschwindet.



- (b) $m_B = 1, m_F = 2$: $\omega(G) = 0$. Das Diagramm ist logarithmisch divergent.
- (c) $m_B = 2, m_F = 0$: $\omega(G) = 2$. Nach Regularisierung erweist sich dieses Diagramm jedoch wiederum lediglich als logarithmisch divergent. [In diesem Fall ist das im wesentlichen eine Folge der Eichinvarianz.]
- (d) $m_B = 3, m_F = 0$: $\omega(G) = 1$. Jedes Diagramm enthält mindestens eine fermionische Schleife ungerader Länge; sie kompensieren sich nach Furry's Lemma.
- (e) $m_B = 4, m_F = 0$: $\omega(G) = 0$. Diese Diagramme erweisen sich tatsächlich als konvergent.

Nach Regularisierung weisen daher lediglich die ersten drei Greensfunktionen Divergenzen auf, die kompensiert werden müssen. Man kann zeigen, dass diese drei Divergenzen sich wiederum absorbieren lassen: dazu betrachten wir die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}Z_3(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + Z_2\bar{\psi}\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu)\psi - Z_0m\bar{\psi}\psi, \quad (11.2.12)$$

die aus der ursprünglichen Lagrangedichte durch die Ersetzung

$$A^\mu \mapsto Z_3^{1/2} A_\mu, \quad \psi \mapsto Z_2^{1/2} \psi, \quad (11.2.13)$$

mit

$$m \mapsto Z_0 Z_2^{-1} m, \quad e \mapsto Z_3^{-1/2} e \quad (11.2.14)$$

hervorgeht. Wir können dann die drei Parameter Z_0, Z_2 und Z_3 so wählen, dass sie gerade die divergenten Beiträge absorbieren.

[Man könnte sich fragen, warum nicht der Koeffizient von e separat renormiert werden kann. Dies ist nicht möglich, falls man verlangt, dass die Eichsymmetrie der Theorie

$$A^\mu \mapsto A^\mu + \partial^\mu \chi, \quad \psi \mapsto e^{-ie\chi}\psi \quad (11.2.15)$$

durch die Renormierung unangetastet bleibt: dies verlangt insbesondere, dass eA^μ unter den obigen Ersetzungen invariant ist!]

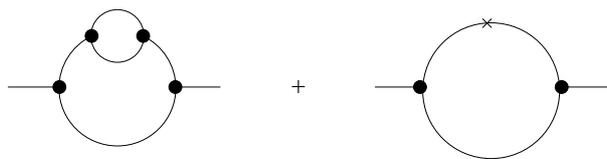
Diese Schlussfolgerungen lassen sich relativ einfach mit Hilfe der allgemeinen Formel (11.2.7) verallgemeinern:

- $\omega < 4$: **superrenormierbare QFT**. Dann nimmt der Divergenzgrad eines Diagramms mit der Ordnung V der Störungstheorie ab (so wie im Fall der ϕ^3 Theorie). Es gibt dann nur endlich viele oberflächlich divergente Diagramme, die durch Redefinition von endlich vielen Parametern absorbiert werden können.
- $\omega = 4$: **renormierbare QFT**. Es gibt nur endlich viele divergente Greensfunktionen, aber die Beiträge beliebig hoher Ordnung sind divergent (so wie im Fall der QED). In diesem Fall kann die Theorie wieder durch Redefinition von endlich vielen Parametern renormiert werden; diese Parameter müssen jetzt jedoch in allen Ordnungen der Störungstheorie redefiniert werden.
- $\omega > 4$: **Nicht-renormierbare QFT**. In diesem Fall kann die Theorie nur durch die Einführung unendlich vieler Parameter (die in allen Ordnungen der Störungstheorie redefiniert werden müssen) endlich gemacht werden. Dadurch verliert die Theorie jegliche Aussagekraft.

Bisher haben wir lediglich die oberflächliche Konvergenz gewährleistet. Es gilt aber der Satz von Weinberg:

Ist ein Diagramm G samt aller seiner Teildiagramme (Teilmenge von Schleifen) oberflächlich konvergent, so ist G konvergent.

Die Anwendung des Satzes auf ein Diagramm geschieht zusammen mit seinen ‘Gegendiagrammen’, d.h. mit den Diagrammen, die Beiträge enthalten, die von den Gegentermen herkommen. Zum Beispiel, müssen wir für die ϕ^3 Theorie die beiden Diagramme betrachten:



Da die Summe der Schlaufe und des Gegenterm-Vertex konvergent ist (nach Konstruktion des Gegenterms), und da weiterhin jedes der beiden Diagramme oberflächlich konvergent ist, so ist die Summe tatsächlich konvergent. Analoges gilt für andere superrenormierbare QFTs.

Die allgemeine hierarchische Renormierungsvorschrift eines Diagramms und seiner Teildiagramme ist im allgemeinen kompliziert; sie wurde durch Bogoliubov, Parasiuk, Hepp und Zimmermann ausgearbeitet.

A Konventionen

In dieser Vorlesung benützen wir die Konvention, dass die Minkowski-Metrik gerade durch

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

References

- [IZ] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill , Singapore (1985), ISBN 0-07-Y66353-X.
- [PS] M.E. Peskin, D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Perseus Books, Reading MA (1995), ISBN 0-201-50397-2.
- [W] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields I*, Cambridge University Press, Cambridge (1995), ISBN 0-521-55001-7. [Gutes Nachschlagewerk für später.]
- [SW] R.F. Streater, A.S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics, and All That*, W.A. Benjamin, New York (1964), ISBN 0-201-09410-X. [Spezialliteratur für mathematische Aspekte der Quantenfeldtheorie.]