KONFORME FELDTHEORIE

Wintersemester 2003/04

Matthias R. Gaberdiel

Institut für Theoretische Physik
ETH-Hönggerberg
CH-8093 Zürich
Email: gaberdiel@itp.phys.ethz.ch

Contents

1 Einleitung

Diese Vorlesung soll eine Einführung in die konforme Feldtheorie geben. Wie werden uns hauptsächlich mit zwei-dimensionalen konformen Feldtheorien beschäftigen. Zwei-dimensionale konforme Feldtheorien haben in den letzten zwanzig Jahren eine zentrale Rolle gespielt, da sie für drei verschiedene Bereich der modernen Theoretischen Physik von Relevanz sind: konforme Feldtheorien beschreiben einfache (lösbare) Modelle von wechelswirkenden Quantenfeldtheorien; sie spielen für die Beschreibung zwei-dimensionaler kritischer Phenomene in der Theorie der kondensierten Materie eine wichtige Rolle; und sie beschreiben die Weltflächentheorie von Stringtheorie, gegenwärtig der aussichtsreichste Kandidat einer vereinheitlichenden Theorie aller fundamentalen Kräfte. Ausserdem sind zwei-dimensionale konforme Feldtheorien auch von einem konzeptionellen Standpunkt aus interessant, da die konforme Symmetrie in zwei Dimensionen viel grösser als in höheren Dimensionen ist. Insbesondere haben zwei-dimensionale konforme Feldtheorien eine sehr reiche mathematische Struktur: sie besitzen (in gewissem Sinn) eine mathematisch rigorose Formulierung als *Vertex Operator Algebren*, und die Theorie dieser Algebren hat tiefe Zusammenhänge mit der Theorie unendlich dimensionaler Lie Algebren (Kac-Moody Algebren), endlicher Gruppen (Monstergruppe), als auch modularer Formen (Charaktere von konformen Darstellungen).

Unser Zugang zu konformer Feldtheorie ist durch die Stringtheorie motiviert, aber wir werden versuchen die Theorie ohne direkten Bezug auf Stringtheorie zu formulieren. (Insbesondere ist es daher für das Verständnis dieses Kurses nicht notwendig, den Stringtheorie Kurs besucht zu haben. Andererseits sollte dem informierten Hörer manches vertraut vorkommen.) Wir werden hauptsächlich Euklidische konforme Feldtheorien besprechen; dies sind einfach Euklidische Quantenfeldtheorien, die unter konformen Transformationen, d.h. Transformationen, die Winkel aber nicht notwendigerweise Längen erhalten, invariant sind. Die lokale konforme Symmetrie ist von besonderer Bedeutung in zwei Dimensionen, da die zugehörige Symmetriealgebra in diesem Fall unendlich dimensional ist. Dies führt dazu, dass konform invariante Quantenfeldtheorien in zwei Dimensionen im wesentlichen vermöge ihrer Symmetrie lösbar sind.

Wir werden damit beginnen, die Gruppe lokaler konformer Transformationen in verschiedenen Dimensionen zu beschreiben. Insbesondere wollen wir zeigen, dass diese Gruppe in zwei Dimensionen, im Gegensatz zu höheren Dimensionen, unendlich dimensional ist.

In Kapitel 3 analysieren wir (zwei-dimensionale) konforme Feldtheorien, die durch eine Lagrange Dichte beschrieben werden; insbesondere diskutieren wir das freie Boson und das freie Fermion. Die unendliche lokale konforme Symmetrie wird durch die Virasoro Algebra beschrieben, deren Struktur wir im Detail analysieren. (Insbesondere berechnen wir die zentrale Ladung für diese beiden Theorien.)

In Kapitel 4 beschreiben wir die Konsequenzen der konformen Symmetrie auf die Struktur der Vakuumerwartungswerte. Diese Analyse ist unabhängig davon, ob die Theorie in der Tat durch eine Lagrange Dichte beschrieben wird. Wir erklären, wie man konforme Feldtheorien allgemein beschreiben kann; dazu führen wir das Konzept der chiralen Felder ein und beschreiben die meromorphe konforme Feldtheorie, die sie generieren. (Die resultierende Struktur ist im wesentlichen zu der einer Vertex Operator Algebra äquivalent.) Zur Illustration beschreiben wir einige meromorphe konforme Feldtheorien (die U(1) Theorie, die Gittertheorie und affine Theorien), im Detail.

In Kapitel 5 erklären wir, inwieweit die Kenntnis der meromorphen Untertheorie die gesamte konforme Theorie bestimmt. Dazu führen wir das Konzept einer 'Darstellung' einer meromorphen konformen Feldtheorie ein. Wir diskutieren die Darstellungstheorie in einfachen Beispielen, und beschreiben die Struktur der resultierenden konformen Feldtheorien. Wir berechnen die Zustandssumme der Theorie, und diskutieren ihre modularen Eigenschaften. Schliesslich beschreiben wir die Verlinde Formel und diskutieren die Konstruktion von D-branen.

2 Konforme Transformationen

2.1 Die konforme Gruppe in $\mathbb{R}^{m,n}$

Konforme Transformationen sind dadurch ausgezeichnet, dass sie *Winkel* erhalten. Im folgenden betrachten wir diese Transformationen für den Fall des Raumes $\mathbb{R}^{m,n}$. Wir wollen zunächst nur verlangen, dass diese Abbildungen lokal definiert (und lokal invertierbar) sind. [Der Vektorraum $\mathbb{R}^{m+n}$ hat die Metrik

$$\eta = \begin{pmatrix} -\mathbf{1}_m & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_n \end{pmatrix} . \qquad (2.1.1)$$

Die Vektoren von $\mathbb{R}^{m,n}$ bezeichnen wir durch $\mathbf{x}$, mit Komponenten x^μ, $\mu = 1, \ldots, n+m$.]

Sei also $\mathbf{x}$ ein Punkt in $\mathbb{R}^{m,n}$, und sei $g : \mathbb{R}^{m,n} \to \mathbb{R}^{m,n}$ eine konforme Transformation, die $\mathbf{x}$ auf $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$ abbildet. Lokal kann diese Abbildung durch eine lineare Transformation beschrieben werden $d\mathbf{x} \mapsto d\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{M}d\mathbf{x}$, wobei

$$d\tilde{x}^\mu = M^\mu{}_\nu \, dx^\nu \, , \qquad M^\mu{}_\nu = \left.\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu}\right|_{\mathbf{x}} . \qquad (2.1.2)$$

Die lineare Abbildung $\mathbf{M}$ soll Winkel erhalten, und muss daher eine Ähnlichkeitsabbildung für jedes Dreieck definieren. Betrachte also die Richtungsvektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$. Dann muss gelten, dass

$$\tilde{\mathbf{u}}^2 = \lambda^2 \mathbf{u}^2 \, , \qquad \tilde{\mathbf{v}}^2 = \lambda^2 \mathbf{v}^2 \, , \qquad (\tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{v}})^2 = \lambda^2 (\mathbf{u} - \mathbf{v})^2 \, , \qquad (2.1.3)$$

wobei λ ein Skalenfaktor ist (der natürlich von $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ unabhängig ist, aber von dem betrachteten Punkt $\mathbf{x}$ abhängen kann). Ausmultiplizieren der letzten Gleichung ergibt

$$\tilde{\mathbf{u}}^2 + \tilde{\mathbf{v}}^2 - 2\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} = \lambda^2 \mathbf{u}^2 + \lambda^2 \mathbf{v}^2 - 2\lambda^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, , \qquad (2.1.4)$$

und daher folgt, zusammen mit den anderen beiden Identitäten, dass

$$\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} = \lambda^2 \, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, . \qquad (2.1.5)$$

Das innere Produkt ist hier durch die Metrik (2.1.1) definiert, d.h.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u^\mu \, \eta_{\mu\nu} \, v^\nu \qquad (2.1.6)$$

und entsprechend für $\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}$. Nach der Definition von $\mathbf{M}$ ist $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{M}\mathbf{u}$ und entsprechend für $\tilde{\mathbf{v}}$; die letzte Gleichung liefert daher

$$\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} = M^\mu{}_\sigma \, u^\sigma \, \eta_{\mu\nu} \, M^\nu{}_\rho \, v^\rho = u^\sigma \, \lambda^2 \, \eta_{\sigma\rho} \, v^\rho \, , \qquad (2.1.7)$$

was impliziert, dass

$$M^\mu{}_\sigma \, \eta_{\mu\nu} \, M^\nu{}_\rho = \lambda^2 \eta_{\sigma\rho} \, . \qquad (2.1.8)$$

[In Matrixnotation ist das einfach die Gleichung $\mathbf{M}^t \boldsymbol{\eta} \mathbf{M} = \lambda^2 \boldsymbol{\eta}$.] Da die Matrix $\mathbf{M}$ durch die partiellen Ableitungen wie in (2.1.2) bestimmt ist, wird diese Gleichung einfach

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\rho} = \lambda^2(\mathbf{x})\, \eta_{\sigma\rho} \,, \tag{2.1.9}$$

wobei wir explizit deutlich gemacht haben, dass der Skalenfaktor λ von $\mathbf{x}$ abhängen kann. Jede Abbildung, die (2.1.9) erfüllt, definiert eine konforme Transformation. Die Menge der konformen Transformationen bildet offensichtlich eine Gruppe, da die Hintereinanderausführung zweier winkel-erhaltender Abbildungen wieder eine winkel-erhaltende Abbildung definiert. [Wir ignorieren hier eventuelle Schwierigkeiten, die bei der Definition der Komposition zweier solcher (nur lokal definierter) Abbildungen auftreten könnten.]

2.2 Endliche konforme Abbildungen für $\mathbb{R}^{m,n}$

Um ein Gefühl für die konforme Gruppe zu erhalten, wollen wir nun die (endlichen) konformen Transformationen von $\mathbb{R}^{m,n}$ beschreiben. Wir suchen zunächst Abbildungen, die (2.1.9) erfüllen; im nächsten Abschnitt wollen wir dann untersuchen, ob die so gefundenen Transformationen bereits die gesamte Gruppe der (infinitesimalen) konformen Transformationen generieren.

Die einfachsten konformen Transformationen sind natürlich die Poincaré Transformationen, für die $\lambda(\mathbf{x}) = 1$. Die Poincaré Gruppe wird durch Translationen und Rotationen erzeugt; eine Translation ist eine Abbildung der Form

$$[\mathbf{T}] \qquad \text{Translation} \qquad x^\mu \mapsto \tilde{x}^\mu = x^\mu + a^\mu \,, \tag{2.2.1}$$

und eine Rotation ist eine Abbildung der Form

$$[\mathbf{R}] \qquad \text{Rotation} \qquad x^\mu \mapsto \tilde{x}^\mu = R^\mu{}_\nu x^\nu \,. \tag{2.2.2}$$

Die Rotationsmatrix $R^\mu{}_\nu$ muss die Matrixgleichung

$$\mathbf{R}^t \boldsymbol{\eta} \mathbf{R} = \boldsymbol{\eta} \tag{2.2.3}$$

erfüllen. In $d = m + n$ Dimensionen gibt es d Translationen und $\frac{1}{2}d(d-1)$ Rotationen; zusammen ist die Dimension der Poincarégruppe daher $\frac{1}{2}d(d+1)$.

Die Poincarégruppe ist das *semidirekte* Produkt der Rotationsgruppe und der Translationsgruppe: eine allgemeine Poincarétransformation $(\mathbf{R}, \mathbf{a})$ wirkt durch

$$(\mathbf{R}, \mathbf{a})\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{a} \,, \tag{2.2.4}$$

und die Komposition zweier solcher Transformationen ergibt

$$(\mathbf{R}_1, \mathbf{a}_1)\, (\mathbf{R}_2, \mathbf{a}_2) = (\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1) \,. \tag{2.2.5}$$

Die Rotationsgruppe enthält Transformationen mit $\det \mathbf{R} = \pm 1$. Die Untergruppe, für die $\det \mathbf{R} = +1$ wird auch als SO(m,n) bezeichnet. Im euklidischen Fall (d.h. für $n = 0$

oder $m = 0$) und falls sowohl $m > 1$ als auch $n > 1$, beschreiben $\det \mathbf{R} = +1$ und $\det \mathbf{R} = -1$ zwei wegzusammenhängende Komponenten der Rotationsgruppe. [Dies bedeutet, dass zwei beliebige Rotationen in einer Komponente durch einen Weg von Rotationen miteinander verbunden werden können, aber dass dies für zwei Rotationen aus unterschiedlichen Komponenten nicht möglich ist.] Andernfalls, d.h. für $\mathbb{R}^{m,1}$ mit $m \geq 1$ gibt es vier wegzusammenhängende Komponenten. Zusammen mit der Bedingung $\det \mathbf{R} = \pm 1$ werden diese dadurch charakterisiert, ob sie die 'Zeitrichtung' invertieren oder nicht. Die Komponente, die die Identität enthält ist dadurch charakterisiert, dass $\det \mathbf{R} = +1$ gilt, und dass die Zeitrichtung erhalten wird; sie wird als SO(m,1)$^\uparrow$ bezeichnet und *orthochrone Lorentzgruppe* genannt. Im folgenden werden wir immer nur die Komponente der Rotationsgruppe betrachten, die die Identität enthält.

Die einfachste konforme Transformation, die nicht eine Poincarétransformation ist, ist die *Dilatation*; eine Dilatation ist eine Abbildung der Form

$$[\mathbf{D}] \qquad \text{Dilatation} \qquad x^\mu \mapsto \tilde{x}^\mu = \lambda x^\mu \,, \tag{2.2.6}$$

wobei $\lambda \neq 0$ eine reelle Zahl ist. In diesem Fall ist $\lambda(\mathbf{x}) = \lambda$, unabhängig von $\mathbf{x}$.

Eine interessantere konforme Transformation ist die *Inversion*: sie ist durch

$$[\mathbf{I}] \qquad \text{Inversion} \qquad x^\mu \mapsto \tilde{x}^\mu = \frac{x^\mu}{\mathbf{x}^2} \tag{2.2.7}$$

definiert. Diese Abbildung ist nur für solche $\mathbf{x}$ definiert, für die $\mathbf{x}^2 \neq 0$ ist; im euklidischen Fall beschreibt die Gleichung $\mathbf{x}^2 = 0$ lediglich den Ursprung, aber für $\mathbb{R}^{m,n}$ ist das ein Kegel. Da wir in der Definition von konformen Transformationen nicht angenommen haben, dass diese global definiert sind, ist das jedoch in keinem Fall ein Problem.

Um zu sehen, dass die Inversion tatsächlich eine konforme Transformation ist, berechnen wir

$$\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\sigma} = \frac{1}{\mathbf{x}^2}\delta^\mu{}_\sigma - \frac{2x^\mu \eta_{\sigma\tau} x^\tau}{\mathbf{x}^4} \,. \tag{2.2.8}$$

Es gilt dann, dass

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu}\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\sigma}\frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\rho} &= \eta_{\mu\nu}\left(\frac{1}{\mathbf{x}^2}\delta^\mu{}_\sigma - \frac{2x^\mu\eta_{\sigma\tau}x^\tau}{\mathbf{x}^4}\right)\left(\frac{1}{\mathbf{x}^2}\delta^\nu{}_\rho - \frac{2x^\nu\eta_{\rho\pi}x^\pi}{\mathbf{x}^4}\right) \\ &= \frac{1}{\mathbf{x}^4}\eta_{\sigma\rho} - \frac{2}{\mathbf{x}^6}\Big[\eta_{\mu\rho}x^\mu\eta_{\sigma\tau}x^\tau + \eta_{\sigma\nu}x^\nu\eta_{\rho\pi}x^\pi\Big] + \frac{4}{\mathbf{x}^8}(\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu)\eta_{\sigma\tau}x^\tau\eta_{\rho\pi}x^\pi \,. \end{aligned}$$

Die letzten drei Terme addieren sich zu null, und die obige Inversionsabbildung ist daher eine konforme Transformation mit

$$\lambda^2(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathbf{x}^4} \,. \tag{2.2.9}$$

Die Inversionsabbildung ist eine diskrete Transformation, deren Komposition mit sich selbst gerade die Identität ergibt. Um eine weitere kontinuierliche Menge konformer

Transformationen zu erhalten, kombinieren wir die Inversion mit einer Translation und einer weiteren Inversion, d.h. wir betrachten die Komposition konformer Abbildungen

$$x^\mu \mapsto \frac{x^\mu}{\mathbf{x}^2} \mapsto \frac{x^\mu}{\mathbf{x}^2} + a^\mu \equiv \frac{x^\mu + \mathbf{x}^2 a^\mu}{\mathbf{x}^2} \mapsto \frac{x^\mu + \mathbf{x}^2 a^\mu}{1 + 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}) + \mathbf{x}^2\mathbf{a}^2}\,, \tag{2.2.10}$$

wobei wir ausgenützt haben, dass

$$\left(\frac{x^\mu + \mathbf{x}^2 a^\mu}{\mathbf{x}^2}\right)^2 = \frac{1}{\mathbf{x}^4}\Big(\mathbf{x}^2 + 2\mathbf{x}^2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}) + \mathbf{x}^4\mathbf{a}^2\Big) = \frac{1}{\mathbf{x}^2}\Big(1 + 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}) + \mathbf{x}^2\mathbf{a}^2\Big)\,. \tag{2.2.11}$$

Da die Komposition konformer Abbildungen konform ist, ist daher auch die sogenannte *spezielle konforme Transformation*

$$[\mathbf{S}] \qquad \text{spezielle konf. Trans.} \quad x^\mu \mapsto \tilde{x}^\mu = \frac{x^\mu + \mathbf{x}^2 a^\mu}{1 + 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}) + \mathbf{x}^2\mathbf{a}^2} \tag{2.2.12}$$

eine konforme Abbildung. Sie ist wie die Inversion nicht global definiert, da sie nicht für $\mathbf{x}$, für die $1 + 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}) + \mathbf{x}^2\mathbf{a}^2 = 0$ ist, definiert ist. [Diese Bedingung definiert einen Kegel durch den Punkt $x^\mu = -a^\mu/\mathbf{a}^2$ falls $\mathbf{a}^2 \neq 0$, und eine Hyperebene andernfalls; diese Hyperebene ist einfach durch $\mathbf{x}\cdot\mathbf{a} = -1/2$ charakterisiert.]

Die Rotationen, Translationen, Dilatationen und speziellen konformen Transformationen generieren **alle** konformen Transformationen (die in der wegzusammenhängenden Komponente der Identität liegen) falls $d = m + n > 2$, d.h. falls die Gesamtdimension grösser als zwei ist. Dies soll nun gezeigt werden.

2.3 Infinitesimale konforme Transformationen

Wir wollen nun, ganz allgemein, analysieren, unter welchen Bedingungen infinitesimale Transformationen konform sind. Zu niedrigster Ordnung kann jede infinitesimale Transformation als

$$x^\mu \mapsto \tilde{x}^\sigma = x^\sigma + \delta x^\sigma = x^\sigma + \epsilon\omega^\sigma(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{2.3.1}$$

geschrieben werden. Die Bedingung

$$\eta_{\mu\nu}\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\sigma}\frac{\partial\tilde{x}^\nu}{\partial x^\rho} = \lambda(\mathbf{x})^2\,\eta_{\sigma\rho}\,, \tag{2.3.2}$$

wobei

$$\lambda(\mathbf{x})^2 = 1 + \epsilon\chi(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\,, \tag{2.3.3}$$

gibt

$$\eta_{\mu\nu}\left(\delta^\mu{}_\sigma + \epsilon\frac{\partial\omega^\mu}{\partial x^\sigma} + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right)\left(\delta^\nu{}_\rho + \epsilon\frac{\partial\omega^\nu}{\partial x^\rho} + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) = \eta_{\sigma\rho} + \epsilon\chi(\mathbf{x})\,\eta_{\sigma\rho} + \mathcal{O}(\epsilon^2)\,. \tag{2.3.4}$$

Der konstante Term stimmt (nach Konstruktion) auf beiden Seiten überein, und für den in ϵ linearen Term finden wir

$$\eta_{\sigma\nu}\frac{\partial\omega^\nu}{\partial x^\rho} + \eta_{\mu\rho}\frac{\partial\omega^\mu}{\partial x^\sigma} = \chi(\mathbf{x})\eta_{\sigma\rho}\,. \tag{2.3.5}$$

Nach Kontraktion mit dem η-Tensor erhält man dann

$$\frac{\partial\omega_\sigma}{\partial x^\rho} + \frac{\partial\omega_\rho}{\partial x^\sigma} = \chi(\mathbf{x})\,\eta_{\sigma\rho}\,. \tag{2.3.6}$$

Zunächst wollen wir nachprüfen, dass die Transformation, die wir schon gefunden haben, diese Bedingung erfüllen. Für **Translationen** ist

$$\tilde{x}^\sigma = x^\sigma + a^\sigma = x^\sigma + \epsilon c^\sigma + \mathcal{O}(\epsilon^2)\,, \tag{2.3.7}$$

und daher ist

$$\omega^\sigma = c^\sigma\,, \quad \text{so dass} \quad \omega_{\sigma,\mu} \equiv \frac{\partial\omega_\sigma}{\partial x^\mu} = 0\,. \tag{2.3.8}$$

Dies erfüllt trivialerweise (2.3.6) mit $\chi(\mathbf{x}) = 0$.
Für **Rotationen** haben wir

$$\tilde{x}^\sigma = R^\sigma{}_\rho x^\rho = x^\sigma + \epsilon m^\sigma{}_\rho x^\rho + \mathcal{O}(\epsilon^2)\,, \tag{2.3.9}$$

wobei wir die Rotationsmatrix $\mathbf{R}$ als

$$R^\sigma{}_\rho = \delta^\sigma{}_\rho + \epsilon m^\sigma{}_\rho + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{2.3.10}$$

geschrieben haben. Daher ist

$$\omega^\sigma = m^\sigma{}_\rho x^\rho\,, \quad \text{so dass} \quad \omega_{\sigma,\rho} = m_{\sigma\rho}\,. \tag{2.3.11}$$

Dies erfüllt (2.3.6) mit $\chi(\mathbf{x}) = 0$, da $m_{\sigma\rho}$ anti-symmetrisch ist,

$$\omega_{\sigma,\rho} + \omega_{\rho,\sigma} = m_{\sigma\rho} + m_{\rho\sigma} = 0\,. \tag{2.3.12}$$

[Dies ist eine Folge davon, dass die Rotationsmatrix $\mathbf{R}$ nach Annahme die Gleichung

$$R^\mu{}_\sigma \eta_{\mu\nu} R^\nu{}_\rho = \eta_{\sigma\rho} \tag{2.3.13}$$

erfüllt; mit dem Ansatz (2.3.10) gibt das

$$(\delta^\mu{}_\sigma + \epsilon m^\mu{}_\sigma)\;\eta_{\mu\nu}\;(\delta^\nu{}_\rho + \epsilon m^\nu{}_\rho) = \eta_{\sigma\rho}\,, \tag{2.3.14}$$

und führt daher zu der Identität

$$m_{\rho\sigma} + m_{\sigma\rho} = 0\,.] \tag{2.3.15}$$

Für **Dilatationen** haben wir

$$\tilde{x}^\sigma = \lambda x^\sigma = x^\sigma + \epsilon\kappa x^\sigma + \mathcal{O}(\epsilon^2)\,, \tag{2.3.16}$$

wobei $\lambda = 1 + \epsilon\kappa + \mathcal{O}(\epsilon^2)$. Daher ist

$$\omega^\sigma = \kappa x^\sigma\,, \quad \text{so dass} \quad \omega_{\sigma,\rho} = \kappa\,\eta_{\sigma\rho} \tag{2.3.17}$$

und die linke Seite von (2.3.6) wird

$$\omega_{\sigma,\rho} + \omega_{\rho,\sigma} = 2\kappa\eta_{\sigma\rho}\,. \tag{2.3.18}$$

Daher ist (2.3.6) erfüllt mit $\chi = 2\kappa$.
Schliesslich haben wir für **spezielle konforme Transformationen** mit $a^\sigma = \epsilon b^\sigma + \mathcal{O}(\epsilon^2)$,

$$\tilde{x}^\sigma = \frac{x^\sigma + a^\sigma \mathbf{x}^2}{1 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{a}^2\mathbf{x}^2} = x^\sigma + \epsilon\left(b^\sigma \mathbf{x}^2 - 2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{x})x^\sigma\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\,, \tag{2.3.19}$$

und daher ist

$$\omega^\sigma = b^\sigma\mathbf{x}^2 - 2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{x})x^\sigma \quad \text{so dass} \quad \omega_{\sigma,\rho} = 2b_\sigma x_\rho - 2b_\rho x_\sigma - 2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{x})\eta_{\sigma\rho}\,. \tag{2.3.20}$$

Daher gilt

$$\omega_{\sigma,\rho} + \omega_{\rho,\sigma} = -4(\mathbf{b}\cdot\mathbf{x})\eta_{\sigma\rho}\,, \tag{2.3.21}$$

und (2.3.6) ist erfüllt mit $\chi = -4(\mathbf{b}\cdot\mathbf{x})$.
Eine beliebige Kombination dieser infinitesimalen Transformationen hat die Form

$$\omega^\sigma = c^\sigma + m^\sigma{}_\rho x^\rho + \kappa x^\sigma + b^\sigma\mathbf{x}^2 - 2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{x})x^\sigma\,, \tag{2.3.22}$$

wobei $m_{\sigma\rho} = -m_{\rho\sigma}$. Dann gilt

$$\partial_\rho\omega_\sigma = m_{\sigma\rho} + \kappa\eta_{\sigma\rho} + 2b_\sigma x_\rho - 2b_\rho x_\sigma - 2\mathbf{b}\cdot\mathbf{x}\eta_{\sigma\rho}\,. \tag{2.3.23}$$

Wie wir eben gesehen haben erfüllt das dann (2.3.6) mit $\chi = 2\kappa - 4\mathbf{b}\cdot\mathbf{x}$.

Wir wollen nun zeigen, dass, falls $d = m + n > 2$, (2.3.22) bereits die allgemeinste Lösung ist. Dazu beobachten wir, dass die Bedingung (2.3.6)

$$\partial_\rho\omega_\sigma + \partial_\sigma\omega_\rho = \chi(\mathbf{x})\,\eta_{\sigma\rho} \tag{2.3.24}$$

impliziert, dass

$$2\partial\cdot\omega = d\,\chi(\mathbf{x})\,. \tag{2.3.25}$$

[Dies folgt indem man (2.3.24) mit $\eta^{\sigma\rho}$ kontrahiert und benützt, dass

$$\eta^{\sigma\rho}\,\eta_{\sigma\rho} = \delta^\sigma{}_\sigma = d\,, \tag{2.3.26}$$

wobei d die Anzahl der Dimensionen ist.] Wir können daher $\chi(\mathbf{x})$ in (2.3.24) durch die linke Seite von (2.3.25) ersetzen. Dann erhalten wir

$$\partial_\rho \omega_\sigma + \partial_\sigma \omega_\rho = \frac{2}{d}\,(\partial \cdot \omega)\,\eta_{\sigma\rho}\,. \tag{2.3.27}$$

Weiterhin folgt aus (2.3.24) nach weiterer Ableitung nach x^τ,

$$\partial_\tau \partial_\rho \omega_\sigma + \partial_\tau \partial_\sigma \omega_\rho = \partial_\tau \chi\,\eta_{\sigma\rho}\,. \tag{2.3.28}$$

Zusammen mit der Gleichung, in der wir τ und ρ vertauschen,

$$\partial_\rho \partial_\tau \omega_\sigma + \partial_\rho \partial_\sigma \omega_\tau = \partial_\rho \chi\,\eta_{\sigma\tau}\,, \tag{2.3.29}$$

erhalten wir dann durch Addition der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} 2\partial_\rho \partial_\tau \omega_\sigma &= \partial_\tau \chi\,\eta_{\sigma\rho} + \partial_\rho \chi\,\eta_{\sigma\tau} - \partial_\sigma(\partial_\tau \omega_\rho + \partial_\rho \omega_\tau) \\ &= \partial_\tau \chi\,\eta_{\sigma\rho} + \partial_\rho \chi\,\eta_{\sigma\tau} - \partial_\sigma \chi\,\eta_{\tau\rho}\,, \end{aligned} \tag{2.3.30}$$

wobei wir in der letzten Zeile wiederum (2.3.24) benützt haben. Kontraktion mit $\eta^{\rho\tau}$ gibt nun

$$2\partial^2 \omega_\sigma = (2-d)\partial_\sigma \chi\,, \tag{2.3.31}$$

und Ableitung nach ∂^σ (mit Kontraktion über σ) gibt

$$2\partial^2\,(\partial \cdot \omega) = (2-d)\,\partial^2 \chi\,. \tag{2.3.32}$$

Zusammen mit (2.3.25) folgt dann

$$d\,\partial^2 \chi = (2-d)\partial^2 \chi\,, \qquad \text{und daher} \qquad (d-1)\,\partial^2 \chi = 0\,. \tag{2.3.33}$$

Falls $d > 1$ gilt also

$$\partial^2 \chi = 0\,. \tag{2.3.34}$$

Ableitung von (2.3.31) nach ∂_ρ und Symmetrisierung von σ und ρ führt zu

$$\begin{aligned} (2-d)\partial_\sigma \partial_\rho \chi &= \partial^2\,(\partial_\sigma \omega_\rho + \partial_\rho \omega_\sigma) \\ &= \eta_{\sigma\rho}\partial^2 \chi\,, \end{aligned} \tag{2.3.35}$$

wobei wiederum (2.3.24) benützt wurde. Falls $d > 2$, folgt daher zusammen mit (2.3.34) dass

$$\partial_\sigma \partial_\rho \chi = 0\,. \tag{2.3.36}$$

Dann ist χ von der Form

$$\chi = 2\kappa - 4(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x})\,, \tag{2.3.37}$$

was wegen (2.3.30) zu

$$2\partial_\rho \partial_\tau \omega_\sigma = -4b_\tau\,\eta_{\sigma\rho} - 4b_\rho\,\eta_{\sigma\tau} + 4b_\sigma\,\eta_{\tau\rho} \tag{2.3.38}$$

führt. Der allgemeinste Ansatz zur Lösung dieser Gleichung ist

$$\omega_\sigma = A_\sigma + B_{\sigma\rho} x^\rho + C_{\sigma\rho\tau} x^\rho x^\tau \,, \tag{2.3.39}$$

wobei, ohne Einschränkung der Allgemeinheit, $C_{\sigma\rho\tau} = C_{\sigma\tau\rho}$ gilt. Einsetzen in (2.3.38) ergibt

$$C_{\sigma\rho\tau} = -b_\tau\, \eta_{\sigma\rho} - b_\rho\, \eta_{\sigma\tau} + b_\sigma\, \eta_{\tau\rho} \,. \tag{2.3.40}$$

Weiterhin erfüllt (2.3.39) die Gleichung (2.3.24) nur falls

$$B_{\sigma\rho} + B_{\rho\sigma} + 2(C_{\sigma\rho\tau} x^\tau + C_{\rho\sigma\tau} x^\tau) = \chi\, \eta_{\sigma\rho} \,. \tag{2.3.41}$$

Zusammen mit (2.3.40) gibt das dann

$$B_{\sigma\rho} + B_{\rho\sigma} - 4(\mathbf{b}\cdot\mathbf{x})\eta_{\sigma\rho} = \Big(2\kappa - 4(\mathbf{b}\cdot\mathbf{x})\Big)\, \eta_{\sigma\rho} \,, \tag{2.3.42}$$

wobei wir (2.3.37) benützt haben. Daher folgt

$$B_{\sigma\rho} + B_{\rho\sigma} = 2\kappa\, \eta_{\sigma\rho} \,, \tag{2.3.43}$$

und $B_{\sigma\rho}$ ist dann von der Form

$$B_{\sigma\rho} = \kappa \eta_{\sigma\rho} + m_{\sigma\rho} \,, \tag{2.3.44}$$

wobei $m_{\sigma\rho}$ anti-symmetrisch ist. Einsetzen in (2.3.39) ergibt dann

$$\omega^\sigma = c^\sigma + \kappa x^\sigma + m^\sigma{}_\rho\, x^\rho + b^\sigma \mathbf{x}^2 - 2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{x}) x^\sigma \,, \tag{2.3.45}$$

wobei wir (2.3.40) benützt haben. Dies beweist, dass (2.3.22) tatsächlich die allgemeinste Lösung für $d > 2$ ist. In diesem Fall hat der Raum der infinitesimalen konformen Transformationen die Dimension

$$d + \frac{1}{2} d(d-1) + 1 + d = \frac{1}{2}(d+1)(d+2) \,. \tag{2.3.46}$$

Dies ist daher die Dimension der konformen Gruppe in $\mathbb{R}^{m,n}$ mit $d = m + n > 2$. Insbesondere zeigt dies, dass die infinitesimalen konformen Transformationen für $d > 2$ durch Translationen, Rotationen, Dilatationen und speziellen konformen Transformationen erzeugt werden. Da jede konforme Transformation, die in der Zusammenhangskomponente der Identität liegt, durch infinitesimale Transformationen aufgebaut werden kann, zeigt dies daher, dass die Zusammenhangskomponente der Identität durch Translationen, Rotationen, Dilatationen und spezielle konforme Transformationen erzeugt wird. Abgesehen von diskreten Transformationen (zum Beispiel Inversionen) erzeugen daher diese Transformationen die gesamte konforme Gruppe.

2.4 Die Lie Algebra der konformen Transformationen

Die Lie Algebra einer Lie Gruppe (d.h. einer Gruppe, die auch eine Mannigfaltigkeit ist, wobei die Gruppenoperationen hinreichend glatt sind) bestimmt ihre lokale Struktur. Für unsere Zwecke können wir uns die Gruppe als Gruppe von Matrizen vorstellen, und wir können ein Gruppenelement $g \in G$, das nahe bei der Identität liegt, durch

$$g = e^{i\epsilon \cdot X} \cong 1 + i\epsilon \cdot X \,, \tag{2.4.1}$$

beschreiben. Die Generatoren X_a erfüllen die Vertauschungsregeln

$$[X_a, X_b] = i f_{ab}^c X_c \,, \tag{2.4.2}$$

wobei f_{ab}^c die *Strukturkonstanten* der Lie Gruppe G sind. Die Lie Algebra $\mathbf{g}$ der Gruppe G hat die Generatoren X_a als Basis und ist durch die Vertauschungsrelationen (2.4.2) definiert. Darstellungen der Lie Algebra können (unter geeigneten globalen Bedingungen) zu Darstellungen der Lie Gruppe integriert werden.

Der einfachste Weg, die Lie Algebra einer Lie Gruppe zu berechnen, besteht oft darin, die Wirkung der Gruppe auf Funktionen zu betrachten, die auf einem Raum, der eine Gruppenwirkung trägt, definiert sind. Sei zum Beispiel $\mathcal{M}$ eine Mannigfaltigkeit, auf der die Gruppe G wirkt, d.h. jedes Gruppenelement $g \in G$ definiert eine Abbildung

$$g : \mathcal{M} \to \mathcal{M} \,, \qquad x \in \mathcal{M} \mapsto \tilde{x} = g(x) \in \mathcal{M} \,, \tag{2.4.3}$$

so dass die Komposition $g \circ h$ gerade der Wirkung von $gh \in G$ entspricht. Betrachte dann den Raum der Funktionen $f : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$. Dieser Raum trägt natürlicherweise eine Gruppenwirkung, die durch

$$(U_g f)(x) = f\Big(g^{-1}(x)\Big) \tag{2.4.4}$$

gegeben ist. Dies definiert in der Tat eine Gruppenwirkung, da

$$\begin{aligned} U_g\Big((U_h f)(x)\Big) &= U_g\left(f(h^{-1}x)\right) \\ &= f\left(h^{-1}(g^{-1}x)\right) \\ &= f\left((gh)^{-1}x\right) \\ &= (U_{gh} f)(x) \,. \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Um nun die Lie Algebra der konformen Transformationen zu berechnen, betrachten wir den Fall $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{m,n}$. Sei g ein Element von G nahe bei der Identität,

$$g = 1 + i\epsilon X_{\boldsymbol{\omega}} \,, \tag{2.4.6}$$

das auf den Punkten $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m,n}$ als

$$\mathbf{x} \mapsto \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \epsilon\, \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \tag{2.4.7}$$

wirkt. Dann ist

$$
\begin{aligned}
\left(U_g(f)\right)(\mathbf{x}) &= f\Big(\mathbf{x} - \epsilon\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})\Big) \\
&= f(\mathbf{x}) - \epsilon\left(\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})\cdot\partial\right) f \\
&= (1 - i\epsilon X_{\boldsymbol{\omega}}) f\,, \qquad (2.4.8)
\end{aligned}
$$

wobei

$$X_{\boldsymbol{\omega}} = -i\omega^\alpha(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\,. \qquad (2.4.9)$$

Mit dieser Formel ist es jetzt leicht, den Kommutator der Generatoren auszurechnen:

$$[X_{\boldsymbol{\omega}_1}, X_{\boldsymbol{\omega}_2}] = \left(\omega_2^\alpha\frac{\partial\omega_1^\beta}{\partial x^\alpha} - \omega_1^\alpha\frac{\partial\omega_2^\beta}{\partial x^\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial x^\beta} = iX_{\boldsymbol{\omega}_2\cdot\partial\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_1\cdot\partial\boldsymbol{\omega}_2}\,. \qquad (2.4.10)$$

Damit können wir nun leicht die Vertauschungsregeln der konformen Gruppe bestimmen. Für Translationen haben wir $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$, und daher ist $X_{\boldsymbol{\omega}} = c^\alpha P_\alpha$, wobei

$$P_\alpha = -i\partial_\alpha\,. \qquad (2.4.11)$$

Für Rotationen ist $\omega^\alpha(\mathbf{x}) = m^\alpha{}_\beta\, x^\beta$, wobei $m_{\alpha\beta} = -m_{\beta\alpha}$. Der Generator

$$X_{\boldsymbol{\omega}} = -im^{\alpha\beta}x_\beta\partial_\alpha = \frac{1}{2}m^{\alpha\beta}L_{\alpha\beta}\,, \qquad \text{wobei} \qquad L_{\alpha\beta} = ix_\alpha\partial_\beta - ix_\beta\partial_\alpha\,. \qquad (2.4.12)$$

Für Dilatationen ist $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) = \kappa\mathbf{x}$, $X_{\boldsymbol{\omega}} = \kappa D$ mit

$$D = -i\mathbf{x}\cdot\partial\,. \qquad (2.4.13)$$

Und schliesslich haben wir für spezielle konforme Transformationen $\omega^\alpha(\mathbf{x}) = b^\alpha\mathbf{x}^2 - 2x^\alpha b^\beta x^\beta$, und damit $X_{\boldsymbol{\omega}} = b^\alpha K_\alpha$ mit

$$K_\alpha = 2ix_\alpha x^\beta\partial_\beta - i\mathbf{x}^2\partial_\alpha\,. \qquad (2.4.14)$$

Man kann dann leicht nachrechnen (**Übungsaufgabe!**), dass

$$
\begin{aligned}
[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho}) \\
[L_{\mu\nu}, P_\sigma] &= i(\eta_{\nu\sigma}P_\mu - \eta_{\mu\sigma}P_\nu) \\
[P_\mu, P_\nu] &= 0 \\
[L_{\mu\nu}, K_\sigma] &= i(\eta_{\nu\sigma}K_\mu - \eta_{\mu\sigma}K_\nu) \\
[K_\mu, K_\nu] &= 0 \\
[P_\mu, K_\nu] &= 2i\eta_{\mu\nu} + 2iL_{\mu\nu} \\
[D, P_\mu] &= iP_\mu \\
[D, K_\mu] &= -iK_\mu \\
[D, L_{\mu\nu}] &= 0\,. \qquad (2.4.15)
\end{aligned}
$$

2.5 Der zweidimensionale Fall

Die Analyse in Kapitel 2.3 bricht für $d = 2$ zusammen und in der Tat ist der $d = 2$ Fall (der uns primär interessiert) deutlich unterschiedlich. Im folgenden wollen wir daher die infinitesimalen konformen Transformationen für $d = 2$ separat studieren.

2.5.1 Die Analyse für den Minkowski Raum

Später werden wir hauptsächlich *Euklidische* Konforme Feldtheorien behandeln, aber zunächst ist es instruktiv die Analyse für den Minkowski Fall durchzuführen. Der zweidimensionale Minkowskiraum, d.h. $\mathbb{R}^{1,1}$, hat die Metrik

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{2.5.1}$$

Es ist für das Folgende nützlich, *Lichtkegelkoordinaten* einzuführen,

$$x^+ = x + t \,, \qquad x^- = x - t \,. \tag{2.5.2}$$

In diesen Koordinaten faktorisiert die Metrik

$$-dt^2 + dx^2 = dx^+ dx^- \,. \tag{2.5.3}$$

Diese Faktorisierung ist der essentielle Unterschied, der dafür verantwortlich ist, dass die konforme Gruppe in zwei Dimensionen viel grösser ist. Wie zuvor ist die Bedingung, dass eine Abbildung konform ist, einfach

$$d\tilde{x}^+ d\tilde{x}^- = \lambda^2(x^+, x^-)\, dx^+ dx^- \,. \tag{2.5.4}$$

Falls x^+ und x^- separat transformieren, d.h. falls

$$\tilde{x}^+ = f(x^+) \,, \qquad \tilde{x}^- = g(x^-) \,, \tag{2.5.5}$$

dann ist die Abbildung $(x^+, x^-) \mapsto (\tilde{x}^+, \tilde{x}^-)$ automatisch konform, wobei

$$\lambda^2(x^+, x^-) = f'(x^+)\, g'(x^-) \,. \tag{2.5.6}$$

Da $f(x^+)$ und $g(x^-)$ beliebige Funktionen sind, ist die Lie Algebra der infinitesimalen konformen Transformationen in diesem Fall unendlich dimensional!

Es ist nicht schwierig zu beweisen, dass alle konformen Transformationen, die in der Wegkomponente der Identität liegen, von dieser Form sind. Eine allgemeine Transformation kann als

$$\tilde{x}^+ = f(x^+, x^-) \,, \qquad \tilde{x}^- = g(x^+, x^-) \tag{2.5.7}$$

geschrieben werden. Die Bedingung, dass sie konform ist, d.h. dass (2.5.4) gilt, ist dann einfach

$$\frac{\partial f}{\partial x^+}\frac{\partial g}{\partial x^+}(dx^+)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^+}\frac{\partial g}{\partial x^-} + \frac{\partial f}{\partial x^-}\frac{\partial g}{\partial x^+}\right) dx^+ dx^- + \frac{\partial f}{\partial x^-}\frac{\partial g}{\partial x^-}(dx^-)^2 = \lambda(x) dx^+ dx^- \,. \tag{2.5.8}$$

Daher folgt, dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x^+} \frac{\partial g}{\partial x^+} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x^-} \frac{\partial g}{\partial x^-} &= 0\,. \end{aligned} \tag{2.5.9}$$

Daher muss entweder

$$\frac{\partial f}{\partial x^+} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{\partial g}{\partial x^+} = 0\,, \tag{2.5.10}$$

und entweder

$$\frac{\partial f}{\partial x^-} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{\partial g}{\partial x^-} = 0\,, \tag{2.5.11}$$

Falls wir die erste Alternative in (2.5.10) und (2.5.11) wählen folgt daraus, dass f konstant und daher nicht invertierbar ist. Entsprechendes gilt, falls wir die zweite Alternative in (2.5.10) und (2.5.11) wählen. Es gibt daher nur zwei Möglichkeiten: entweder ist

$$\frac{\partial f}{\partial x^-} = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial g}{\partial x^+} = 0\,, \tag{2.5.12}$$

oder

$$\frac{\partial f}{\partial x^+} = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial g}{\partial x^-} = 0\,. \tag{2.5.13}$$

Der erste Fall (2.5.12) entspricht gerade unserem Ansatz (2.5.5). Im zweiten Fall ist $\tilde{x}^+$ nur eine Funktion von x^- und $\tilde{x}^-$ nur eine Funktion von x^+; insbesondere enthält diese Klasse von Lösungen dann nicht die Identität.

Natürlich kann man die konformen Transformationen, die wir zuvor gefunden haben, auch in diesem Rahmen verstehen. Für Translationen, Rotationen (Lorentz Transformationen) und Dilatationen haben wir entsprechend

$$[\mathbf{T}] \qquad x^+ \mapsto x^+ + a^+\,, \qquad x^- \mapsto x^- + a^-\,, \tag{2.5.14}$$

$$[\mathbf{R}] \qquad x^+ \mapsto e^{\alpha}\, x^+\,, \qquad x^- \mapsto e^{-\alpha}\, x^-\,, \tag{2.5.15}$$

$$[\mathbf{D}] \qquad x^+ \mapsto \lambda\, x^+\,, \qquad x^- \mapsto \lambda\, x^-\,. \tag{2.5.16}$$

Für die speziellen konformen Transformation finden wir hingegen

$$x^+ \mapsto \frac{x^+ + a^+x^+x^-}{1 + a^+x^- + a^-x^+ + a^+a^-x^+x^-} = \frac{x^+}{1 + a^-x^+}\,, \tag{2.5.17}$$

und

$$x^- \mapsto \frac{x^- + a^-x^+x^-}{1 + a^+x^- + a^-x^+ + a^+a^-x^+x^-} = \frac{x^-}{1 + a^+x^-}\,. \tag{2.5.18}$$

Alle diese Transformationen sind von der Form

$$x^+ \mapsto f(x^+) = \frac{ax^+ + b}{cx^+ + d}\,, \tag{2.5.19}$$

und entsprechend für x^-. Hier sind a, b, c, d reelle Zahlen, und die Eigenschaft, dass die Transformation lokal umkehrbar ist, verlangt, dass $ad - bc \neq 0$. Für die Transformationen, die in der Wegkomponente der Identität liegen ist $ad - bc > 0$; wir können dann a, b, c, d durch $\mu a, \mu b, \mu c, \mu d$ ersetzen, wobei $\mu = (ad - bc)^{-1/2}$. Dies ändert natürlich nicht die Transformation (2.5.19), aber nach dieser Ersetzung gilt $ad - bc = 1$. Wir können daher zu jeder Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}), \tag{2.5.20}$$

der Gruppe der 2×2 Matrizen mit Determinante eins, eine Transformation (2.5.19) zuordnen. Diese Abbildung beschreibt tatsächlich einen Gruppenhomomorphismus da, falls

$$f_1(y) = \frac{a_1 y + b_1}{c_1 y + d_1} \qquad \text{und} \qquad f_2(y) = \frac{a_2 y + b_2}{c_2 y + d_2} \tag{2.5.21}$$

dann ist $f_3(y) = f_1(f_2(y))$ gerade durch

$$f_3(y) = \frac{a_3 y + b_3}{c_3 y + d_3} \qquad \text{wobei} \qquad \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} . \tag{2.5.22}$$

Der Kern dieses Homomorphismus, d.h. die Matrizen, deren zugehörige Abbildung gerade die Identität ist, ist gerade $\{\pm \mathbf{1}\} \cong \mathbb{Z}_2$. Die Gruppe der fraktional-linearen Transformationen ist daher isomorph zu $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$. Da diese Transformationen separat auf x^+ und x^- wirken, ist die Gruppe dieser konformen Transformationen gerade $(\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2) \times (\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2)$.

2.5.2 Die Analyse im Euklidischen

Die Analyse im Euklidischen ist relativ ähnlich. In diesem Fall ist die Metrik einfach $dx^2 + dy^2$, und die Bedingung, dass die Abbildung $(x, y) \mapsto (\tilde{x}, \tilde{y})$ konform ist, ist einfach, dass

$$d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2 = \lambda^2(x, y) \left(dx^2 + dy^2 \right) . \tag{2.5.23}$$

Dies führt zu

$$\left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} \right)^2 = \lambda^2(x, y) = \left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} \right)^2 , \tag{2.5.24}$$

sowie

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} = 0 \, . \tag{2.5.25}$$

Die Gleichung (2.5.25) impliziert, dass

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} = \mu(x, y) \, \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} , \qquad \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} = - \frac{1}{\mu(x, y)} \, \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} \, . \tag{2.5.26}$$

Einsetzen dieser Identitäten in (2.5.24) ergibt

$$(\mu^2 - 1) \left(\frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{1}{\mu^2} - 1 \right) \left(\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} \right)^2 , \tag{2.5.27}$$

und daher ist

$$\left(\frac{1}{\mu^2}-1\right)\left\{\mu^2\left(\frac{\partial\tilde{y}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\tilde{y}}{\partial x}\right)^2\right\}=0\,. \tag{2.5.28}$$

Die zweite Klammer kann nur dann verschwinden, wenn sowohl $\frac{\partial\tilde{y}}{\partial y}=0$ als auch $\frac{\partial\tilde{y}}{\partial x}=0$ gilt; dies würde aber implizieren, dass $\tilde{y}(x,y)=const$, und die Abbildung wäre dann nicht mehr invertierbar. Daher muss gelten

$$\mu=\pm 1\,. \tag{2.5.29}$$

Also gilt entweder

$$\frac{\partial\tilde{x}}{\partial x}=\frac{\partial\tilde{y}}{\partial y}\,,\qquad \frac{\partial\tilde{x}}{\partial y}=-\frac{\partial\tilde{y}}{\partial x}\,, \tag{2.5.30}$$

oder

$$\frac{\partial\tilde{x}}{\partial x}=-\frac{\partial\tilde{y}}{\partial y}\,,\qquad \frac{\partial\tilde{x}}{\partial y}=\frac{\partial\tilde{y}}{\partial x}\,. \tag{2.5.31}$$

Dies sind aber gerade die *Cauchy-Riemann Gleichungen*: (2.5.30) sagt gerade, dass $\zeta=\tilde{x}+i\tilde{y}$ eine analytische Funktion von $z=x+iy$ ist; die alternative Gleichung (2.5.31) besagt hingegen, dass $\zeta=\tilde{x}+i\tilde{y}$ eine analytische Funktion von $\bar{z}=x-iy$ ist, d.h. eine anti-analytische Funktion von $z=x+iy$.

In der Tat kann man auch den Euklidischen Fall in 'faktorisierter' Form analysieren. Dazu führen wir die komplexen Koordinaten $\zeta=\tilde{x}+i\tilde{y}$ und $z=x+iy$ ein. Gleichung (2.5.23) ist dann einfach

$$d\zeta d\bar{\zeta}=\lambda^2(z,\bar{z})\,dzd\bar{z}\,, \tag{2.5.32}$$

und dies führt mit denselben Argumenten wie im Minkowski Fall zu der Bedingung, dass

$$\frac{\partial\zeta}{\partial z}\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial z}=0\,,\qquad \frac{\partial\zeta}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial\bar{z}}=0\,. \tag{2.5.33}$$

Wie im Minkowski Fall gibt es dann zwei mögliche Lösungen: entweder ist

$$\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial z}=0\,,\qquad \frac{\partial\zeta}{\partial\bar{z}}=0\,, \tag{2.5.34}$$

oder

$$\frac{\partial\zeta}{\partial z}=0\,,\qquad \frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial\bar{z}}=0\,. \tag{2.5.35}$$

Im ersten Fall ist $\zeta=\zeta(z)$ eine analytische Function von z. und im zweiten Fall ist $\zeta=\zeta(\bar{z})$ eine anti-analytische Funktion von z. [In der obigen Analyse haben wir benützt, dass

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} &\equiv \frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}\\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} &\equiv \frac{\partial x}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial y} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial y}\,,\end{aligned}$$

da $x = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $y = -\frac{1}{2}i(z-\bar{z})$.]

Die formale Ähnlichkeit der obigen Analyse zu dem Minkowski Fall ist natürlich kein Zufall: die Minkowski Theorie ist durch eine 'Wick Rotation' mit der Euklidischen Theorie verbunden. Dabei wird t durch iy ersetzt, und die Lichtkegelkoordinaten $x^+ = x+t$ und $x^- = x-t$ werden gerade zu $z = x+iy$ und $\bar{z} = x-iy$. Die Bedingung, dass $\tilde{x}^+$ nur eine Funktion von x^+ ist wird dann zu der Bedingung, dass ζ nur eine Funktion von z, nicht aber von $\bar{z}$ ist, d.h. dass es eine analytische Funktion von z ist, u.s.w.

Die Transformation, die durch Translationen, Rotationen, Dilatationen und speziellen konformen Transformationen erzeugt werden sind von der Form

$$z \mapsto \zeta(z) = \frac{az+b}{cz+d}\,, \tag{2.5.36}$$

wobei jetzt a, b, c, d *komplexe* Konstanten sind, und $ad-bc \neq 0$. Diese Transformationen werden oft *Möbiustransformationen* genannt.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir verlangen, dass $ad-bc = 1$ — andernfalls werden alle vier Konstanten einfach durch $\sqrt{ad-bc}$ geteilt, und die zugehörige Matrix ist daher in

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\,. \tag{2.5.37}$$

Mit denselben Argumenten wie zuvor folgt weiterhin, dass die Gruppe dieser Transformationen (die Möbiusgruppe) gerade isomorph zu $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ ist.

Die Lie Algebra der Möbiusgruppe kann einfach beschrieben werden. Betrachte die Matrizen

$$M_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,, \qquad M_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\,, \qquad M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\,. \tag{2.5.38}$$

Dann ist

$$e^{\lambda M_{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,, \qquad e^{\mu M_0} = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\mu} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}\mu} \end{pmatrix}\,, \qquad e^{\nu M_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\nu & 1 \end{pmatrix}\,. \tag{2.5.39}$$

Die zugehörigen Transformationen sind

$$z \mapsto z + \lambda\,, \qquad z \mapsto e^{\mu} z\,, \qquad z \mapsto \frac{z}{1-\nu z}\,, \tag{2.5.40}$$

d.h. eine Translation, eine Dilatation, und eine spezielle konforme Transformation. [In komplexen Koordinaten wird eine spezielle konforme Transformation durch

$$z \mapsto \frac{z + a|z|^2}{1 + a\bar{z} + \bar{a}z + |a|^2|z|^2} = \frac{z}{1+\bar{a}z} \tag{2.5.41}$$

beschrieben.] Die Lie Algebra der Möbiusgruppe hat als (komplexe) Basis die Generatoren M_0 und $M_{\pm1}$; man kann leicht nachrechnen, dass

$$[M_m, M_n] = (m-n)M_{m+n}\,, \qquad m,n,=\pm1,0\,. \tag{2.5.42}$$

Wie zuvor beschreiben diese Transformationen jedoch nur eine Untergruppe der konformen Gruppe: wir wir gesehen haben, muss $\zeta(z)$ nicht notwendigerweise eine fraktional-lineare (oder Möbiustransformation) sein, sondern im allgemeinen ist $\zeta(z)$ eine *beliebige* analytische Funktion von z. Um die Lie Algebra der allgemeinsten infinitesimalen Transformationen zu untersuchen, können wir jetzt wiederum die Analyse von Kapitel 2.4 durchführen. Wie zuvor machen wir den Ansatz (jetzt in komplexen Koordinaten)

$$z \mapsto \zeta(z) = z + \epsilon\omega(z)\,. \tag{2.5.43}$$

Auf einer Funktion $F(z)$ induziert das die Wirkung

$$F(z) \mapsto F(z-\epsilon\omega(z)) = F(z) - \epsilon\omega(z)\partial_z F(z)\,. \tag{2.5.44}$$

Die Wirkung auf der Funktion $F(z)$ ist daher einfach durch den Differentialoperator

$$X_\omega = -\omega(z)\frac{\partial}{\partial z} \tag{2.5.45}$$

gegeben. Da $\omega(z)$ eine beliebige lokal analytische Funktion ist, können wir sie in einer Laurent Reihe entwickeln,

$$\omega(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \omega_{-n} z^{n+1}\,. \tag{2.5.46}$$

Eine Basis der infinitesimalen Transformationen ist daher durch

$$L_n = -z^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}\,, \qquad \bar{L}_n = -\bar{z}^{n+1}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\,, \tag{2.5.47}$$

gegeben. Die Vertauschungsregeln können jetzt einfach berechnet werden:

$$\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= z^{m+1}\frac{\partial}{\partial z} z^{n+1}\frac{\partial}{\partial z} - z^{n+1}\frac{\partial}{\partial z} z^{m+1}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= (n+1)z^{n+m+1}\frac{\partial}{\partial z} - (m+1)z^{n+m+1}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= (m-n)L_{m+n}\,.
\end{aligned} \tag{2.5.48}$$

Ausserdem findet man

$$\begin{aligned}
[L_m, \bar{L}_n] &= 0\,, \\
[\bar{L}_m, \bar{L}_n] &= (m-n)\bar{L}_{m+n}\,.
\end{aligned} \tag{2.5.49}$$

Die Algebra (2.5.48) ist die so-genannte *Witt* Algebra. In der Quantentheorie wird uns später auch eine zentrale Erweiterung dieser Algebra begegnen: diese hat die Vertauschungsregeln

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m,-n}\,, \tag{2.5.50}$$

wobei c ein *zentrales Element* ist, d.h. ein Element, das mit allen anderen Generatoren vertauscht. Diese zentrale Erweiterung der Witt Algebra ist die *Virasoro Algebra*, die in der Konformen Feldtheorie in zwei Dimensionen eine sehr wichtige Rolle einnimmt.

Für $n = \pm 1, 0$ stimmen die Transformationen L_n gerade mit den durch M_n definierten Transformationen überein. Um dies zu verstehen, müssen wir nur die infinitesimalen Transformationen, die durch M_n definiert werden als Differentialoperatoren berechenen. Wie wir gesehen haben, beschreibt M_{-1} eine Translation; auf eine Funktion $F(z)$ wirkt sie daher als

$$F(z) \mapsto F(z-\lambda) = F(z) - \lambda \partial_z F(z) + \mathcal{O}(\lambda^2)\,, \tag{2.5.51}$$

und wir haben deshalb

$$M_{-1} = -\partial_z \equiv L_{-1}\,. \tag{2.5.52}$$

Entsprechend haben wir für die Dilatation, die durch M_0 beschrieben wird

$$F(z) \mapsto F(e^{-\mu}z) = F(z - \mu z + \mathcal{O}(\mu^2)) = F(z) - \mu z \partial_z F(z) + \mathcal{O}(\mu^2)\,, \tag{2.5.53}$$

und daher

$$M_0 = -z\partial_z \equiv L_0\,. \tag{2.5.54}$$

Schliesslich ist für die spezielle konforme Transformation, die durch M_1 beschrieben wird

$$F(z) \mapsto F\left(\frac{z}{1+\nu z} + \mathcal{O}(\nu^2)\right) = F\left(z(1-\nu z) + \mathcal{O}(\nu^2)\right) = F(z) - \nu z^2 \partial_z F(z) + \mathcal{O}(\nu^2)\,, \tag{2.5.55}$$

und daher

$$M_1 = -z^2\partial_z \equiv L_1\,. \tag{2.5.56}$$

Als nächstes wollen wir Feldtheorien betrachten, die konform invariant sind.

3 Konforme Feldtheorien mit Lagrange Dichte

Später werden wir häufig konforme Feldtheorien betrachten, für die keine Lagrange Formulierung bekannt ist. Um die Diskussion von konformen Feldtheorien jedoch mit den üblichen Techniken der Quantenfeldtheorie zu verbinden, ist es zunächst nützlich, ein Beispiel zu betrachten, für das eine Lagrange Beschreibung existiert.

3.1 Der Energie-Impuls-Tensor einer konformen Theorie

Betrachte eine Feldtheorie mit einem Skalarfeld ϕ, das zunächst auf einer d-dimensionalen Raumzeit definiert ist. Seine Dynamik ist durch die Wirkung

$$S[\phi] = \int \mathcal{L}(\phi, \partial^\mu \phi, x)\, d^d x \qquad (3.1.1)$$

charakterisiert, wobei $\mathcal{L}(\phi, \partial^\mu \phi, x)$ die Lagrange Dichte ist. Mittels des üblichen Variationsarguments führt diese Wirkung zu den Euler-Lagrange Gleichungen:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \partial^\mu \delta\phi \right\} d^d x \\ &= \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \right) \right\} \delta\phi\, d^d x\,, \end{aligned} \qquad (3.1.2)$$

wobei in der zweiten Zeile partiell integriert wurde. Falls δS für alle Variationen von ϕ verschwindet, dann gilt die Euler-Lagrange Gleichung

$$\partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0\,. \qquad (3.1.3)$$

Wir interessieren uns für Feldtheorien, die invariant unter konformen Transformationen (des zugrunde liegenden Minkowski Raumes) sind. Sei G die Gruppe der konformen Transformationen, und betrachte die Wirkung von $g \in G$

$$\begin{aligned} x &\mapsto \tilde{x} = g(x) \\ \phi(x) &\mapsto \psi(\tilde{x}) = \phi(g^{-1}(\tilde{x})) = \phi(x)\,. \end{aligned} \qquad (3.1.4)$$

[Hier betrachten wir den Fall, dass das Feld ϕ sich nicht explizit unter konformen Transformationen transformiert. Der allgemeinere Fall kann ähnlich behandelt werden.] Die Feldtheorie ist invariant unter dieser Transformation, falls

$$\mathcal{L}\left(\phi(x), \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\mu}, x \right) d^d x = \mathcal{L}\left(\psi(\tilde{x}), \frac{\partial \psi(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}^\mu}, \tilde{x} \right) d^d \tilde{x}\,, \qquad (3.1.5)$$

da dann, nach Integration,

$$S[\psi] = S[\phi]\,. \qquad (3.1.6)$$

Falls ϕ eine Lösung der Euler-Lagrange Gleichungen ist, dann ist auch ψ eine Lösung und umgekehrt.
Die Bedingung (3.1.5) ist äquivalent zu

$$\mathcal{L}\left(\phi(x), \frac{\partial\phi(x)}{\partial x^\mu}, x\right)\, d^dx = \mathcal{L}\left(\phi(x), \frac{\partial\phi(x)}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tilde{x}^\mu}, g(x)\right)\, \det\left|\frac{\partial\tilde{x}^\alpha}{\partial x^\beta}\right|\, d^dx\,. \tag{3.1.7}$$

Nun sei g eine infinitesimale Transformation, für die wir schreiben

$$\begin{aligned}
g^\mu(x) &= x^\mu + \epsilon\,\omega^\mu(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\\
\frac{\partial\tilde{x}^\nu}{\partial x^\mu} &= \delta^\nu_\mu + \epsilon\,\partial_\mu\omega^\nu + \mathcal{O}(\epsilon^2)\\
\det\left|\frac{\partial\tilde{x}^\nu}{\partial x^\mu}\right| &= 1 + \epsilon\,\partial\cdot\omega + \mathcal{O}(\epsilon^2)\\
\frac{\partial\phi(x)}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tilde{x}^\mu} &= \frac{\partial\phi(x)}{\partial x^\mu} - \epsilon\frac{\partial\phi(x)}{\partial x^\nu}\frac{\partial\omega^\nu}{\partial x^\mu} + \mathcal{O}(\epsilon^2)\,.
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Es folgt nun aus (3.1.7), dass

$$\begin{aligned}
0 = \mathcal{L}\left(\psi(\tilde{x}), \tilde{\partial}^\mu\psi(\tilde{x}), \tilde{x}\right)\, d^d\tilde{x} &- \mathcal{L}\left(\phi(x), \partial^\mu\phi(x), x\right)\, d^dx\\
&= \epsilon\left\{\partial\cdot\omega\,\mathcal{L} + \omega^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\mathcal{L} - \partial_\mu\omega^\nu\partial_\nu\phi\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right\} d^dx\\
&= \epsilon\,\partial_\mu\left\{\eta^{\mu\nu}\mathcal{L}\,\omega_\nu - \omega\cdot\partial\phi\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right\} d^dx \qquad (3.1.9)\\
&\qquad +\epsilon\,\omega\cdot\partial\phi\,\left(\partial^\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\right) d^dx\,,
\end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile $\partial_\mu\mathcal{L}$ die gesamte Abhängigkeit von $\mathcal{L}$ nach x^μ berücksichtigt, d.h.

$$\partial_\mu\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\partial_\mu\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\partial_\mu\partial_\nu\phi\,. \tag{3.1.10}$$

[Wenn wir von der zweiten zur dritten Zeile von (3.1.9) übergehen, haben wir die Korrekturterme

$$-\eta^{\mu\nu}\omega_\nu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\,\partial_\mu\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\phi)}\,\partial_\mu\partial_\rho\phi\right] + \omega^\nu\partial_\mu\partial_\nu\phi\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} + \omega^\nu\partial_\nu\phi\,\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,, \tag{3.1.11}$$

wobei die ersten beiden Terme daher rühren, dass nun die ∂_μ Ableitung von $\mathcal{L}$ nicht mehr nur die explizite Abhängigkeit berücksichtigt. Der zweite und dritte Term kürzen sich gerade, und der erste und vierte Term sind gerade die letzte Zeile von (3.1.9).]

Falls ϕ die Euler-Lagrange Gleichung erfüllt, verschwindet der letzte Term in (3.1.9), und es folgt, dass

$$\partial_\mu J^\mu = 0\,, \qquad \text{mit} \qquad J^\mu = T^{\mu\nu}\omega_\nu\,, \tag{3.1.12}$$

wobei der *Energie-Impuls-Tensor* $T^{\mu\nu}$ durch

$$T^{\mu\nu} = \partial^\nu \phi \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \tag{3.1.13}$$

gegeben ist. Dies ist das übliche *Nöther-Theorem.*

Wie wir schon gesehen haben, ist jede konform invariante Wirkung translationsinvariant. In diesem Fall ist $\omega_\nu = a_\nu$ konstant, und die Stromerhaltung von J ist einfach die Bedingung, dass

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0\,. \tag{3.1.14}$$

Falls wir die Definition von $T^{\mu\nu}$ (3.1.13) benützen, impliziert das, dass

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu\nu} &= (\partial_\mu \partial^\nu \phi) \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} + (\partial^\nu \phi) \, \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \partial^\nu \mathcal{L} \\ &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \, \partial^\nu \phi + \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \, \partial^\nu \phi \\ &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\nu} = 0\,, \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

wobei wir wiederum die Euler-Lagrange Gleichungen benützt haben, und die Ableitung $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\nu}$ nun nur die *explizite* Abhängigkeit von $\mathcal{L}$ nach x_ν berücksichtigt. Es folgt daher aus (3.1.14), dass für eine translationsinvariante Wirkung die Lagrange Dichte nicht explizit von x abhängen kann.

Als nächstes betrachten wir die Rotationssymmetrie, d.h. die Invarianz unter Transformationen mit $\omega^\mu = m^\mu{}_\nu x^\nu$, wobei $m_{\mu\nu} = -m_{\nu\mu}$. Der zugehörige erhaltene Strom ist dann

$$\begin{aligned} J^\mu &= T^{\mu\nu} \, m_{\nu\rho} \, x^\rho \\ &= \frac{1}{2} m_{\nu\rho} \left(T^{\mu\nu} x^\rho - T^{\mu\rho} x^\nu \right) \,. \end{aligned} \tag{3.1.16}$$

Die Erhaltung des Stromes impliziert nun

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu \left(T^{\mu\nu} x^\rho - T^{\mu\rho} x^\nu \right) \\ &= \left(\partial_\mu T^{\mu\nu} \right) x^\rho - \left(\partial_\mu T^{\mu\rho} \right) x^\nu + T^{\rho\nu} - T^{\nu\rho}\,. \end{aligned} \tag{3.1.17}$$

Die ersten beiden Terme verschwinden wegen (3.1.14), und es folgt daher, dass der Energie-Impuls-Tensor symmetrisch ist,

$$T^{\rho\nu} = T^{\nu\rho}\,. \tag{3.1.18}$$

Betrachte nun eine allgemeine konforme Transformation, die durch ω beschrieben wird. Falls die Wirkung konform invariant ist, muss

$$\partial_\mu \left(T^{\mu\nu} \omega_\nu \right) = T^{\mu\nu} \partial_\mu \omega_\nu = \frac{1}{2} T^{\mu\nu} \, \left(\partial_\mu \omega_\nu + \partial_\nu \omega_\mu \right) \,, \tag{3.1.19}$$

verschwinden, wobei wir (3.1.14) und (3.1.18) benützt haben. Da ω eine konforme Transformation ist, gilt (2.3.6), und daher wird dieser Ausdruck

$$\partial_\mu \left(T^{\mu\nu}\omega_\nu\right) = \frac{1}{2}\, T^\mu{}_\mu \, \chi(\mathbf{x})\,. \tag{3.1.20}$$

Es folgt daher, dass der Energie-Impuls-Tensor einer konformen Feldtheorie zusätzlich spurlos ist. Wir haben daher: falls eine Feldtheorie auf $\mathbb{R}^{m,n}$ konform invariant ist, dann gilt

$$\text{Konforme Symmetrie:} \qquad \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0\,, \qquad T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}\,, \qquad T^\mu{}_\mu = 0\,. \tag{3.1.21}$$

3.1.1 Der zwei-dimensionale Fall

In zwei Dimensionen lassen sich die obigen Bedingungen elegant zusammenfassen. Im euklidischen Fall (die Diskussion für den Minkowski Fall ist völlig analog) geben (3.1.21) gerade

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial T^{10}}{\partial x^1} = 0\,, \qquad \frac{\partial T^{01}}{\partial x^0} + \frac{\partial T^{11}}{\partial x^1} = 0\,, \tag{3.1.22}$$

und

$$T^{00} = -T^{11}\,, \qquad T^{01} = T^{10}\,. \tag{3.1.23}$$

Wegen den zweiten Gleichungen gibt es nur zwei unabhängige Komponenten, nämlich T^{00} und T^{10}. Die ersten Gleichungen implizieren dann, dass

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial T^{10}}{\partial x^1} = 0\,, \qquad \frac{\partial T^{00}}{\partial x^1} - \frac{\partial T^{10}}{\partial x^0} = 0\,. \tag{3.1.24}$$

Dies sind wiederum Cauchy-Riemann Gleichungen, die einfach besagen, dass

$$T^{++} = \frac{1}{2}\left(T^{00} + iT^{10}\right) \qquad \text{und} \qquad T^{--} = \frac{1}{2}\left(T^{00} - iT^{10}\right) \tag{3.1.25}$$

nur von $z = x^0 + ix^1$ bzw. $\bar{z} = x^0 - ix^1$ abhängen,

$$\partial_z T^{++} = 0\,, \qquad \partial_{\bar{z}} T^{--} = 0\,. \tag{3.1.26}$$

Diese Komponenten des Energie-Impuls-Tensors sind daher *chirale* Felder, d.h. sie hängen nur von z oder $\bar{z}$, nicht aber von beiden Koordinaten gleichzeitig ab. Wie wir später sehen werden, generieren die chiralen Felder die Symmetriealgebra der Theorie.

3.2 Das freie Boson in zwei Dimensionen

Das einfachste Beispiel einer (zwei-dimensionalen) konformen Theorie ist die Theorie eines freien masselosen Bosons. Im Euklidischen Fall wird diese Theorie durch die Lagrange Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_0\phi)(\partial_0\phi) + (\partial_1\phi)(\partial_1\phi)\right] \tag{3.2.1}$$

beschrieben. Die zugehörige Theorie ist konform invariant, falls

$$dxdy\left[(\partial_x\phi)^2+(\partial_y\phi)^2\right]=d\tilde{x}d\tilde{y}\left[(\partial_{\tilde{x}}\phi)^2+(\partial_{\tilde{y}}\phi)^2\right]\,. \tag{3.2.2}$$

In der Tat ist

$$\begin{aligned}(\partial_x\phi)^2+(\partial_y\phi)^2 &= (\partial_{\tilde{x}}\phi\,\partial_x\tilde{x}+\partial_{\tilde{y}}\phi\,\partial_x\tilde{y})^2+(\partial_{\tilde{x}}\phi\,\partial_y\tilde{x}+\partial_{\tilde{y}}\phi\,\partial_y\tilde{y})^2\\ &= (\partial_{\tilde{x}}\phi)^2\left[\left(\frac{\partial\tilde{x}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\tilde{x}}{\partial y}\right)^2\right]+(\partial_{\tilde{y}}\phi)^2\left[\left(\frac{\partial\tilde{y}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\tilde{y}}{\partial y}\right)^2\right]\\ &\quad +2\partial_{\tilde{x}}\phi\partial_{\tilde{y}}\phi\left[\frac{\partial\tilde{x}}{\partial x}\frac{\partial\tilde{y}}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{x}}{\partial y}\frac{\partial\tilde{y}}{\partial y}\right]\,.\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Jede konforme Transformation erfüllt die Cauchy-Riemann Gleichungen; daher verschwindet der dritte Term, und

$$\left[\left(\frac{\partial\tilde{x}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\tilde{x}}{\partial y}\right)^2\right]=\lambda^2(x,y)=\left[\left(\frac{\partial\tilde{y}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\tilde{y}}{\partial y}\right)^2\right]\,. \tag{3.2.4}$$

Die Bedingung (3.2.2) ist daher einfach, dass

$$dxdy\lambda^2(x,y)=d\tilde{x}d\tilde{y}\,, \tag{3.2.5}$$

d.h. dass die Determinante ergibt

$$\det\left|\frac{\partial\tilde{x}^i}{\partial x^j}\right|=\lambda^2(x,y)\,. \tag{3.2.6}$$

Die Determinante ist einfach

$$\det\left|\frac{\partial\tilde{x}^i}{\partial x^j}\right|=\left(\frac{\partial\tilde{x}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\tilde{y}}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial\tilde{x}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\tilde{y}}{\partial x}\right)=\pm\left[\left(\frac{\partial\tilde{x}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\tilde{x}}{\partial y}\right)^2\right]=\pm\lambda^2(x,y)\,, \tag{3.2.7}$$

und wir haben die konforme Invarianz gezeigt. Die Euler-Lagrange Gleichungen sind in diesem Fall einfach

$$(\partial_0\partial_0+\partial_1\partial_1)\,\phi=0\,, \tag{3.2.8}$$

und der Energie-Impuls-Tensor ist

$$T^{ij}=\partial^i\phi\,\partial^j\phi-\frac{1}{2}\delta^{ij}\partial^l\phi\,\partial^l\phi\,. \tag{3.2.9}$$

Der Energie-Impuls-Tensor ist offenbar symmetrisch und spurlos (diese letzte Eigenschaft gilt nur in dieser Form in zwei Dimensionen); um die Translationssymmetrie $\partial_i T^{ij}=0$ zu sehen, rechnet man

$$\partial_i T^{ij}=(\partial_i\partial^i\phi)\,\partial^j\phi+(\partial^i\phi)(\partial_i\partial^j\phi)-(\partial^j\partial^l\phi)\,\partial^l\phi\,. \tag{3.2.10}$$

Die letzten beide Terme heben sich gerade gegenseitig weg, und der erste Term verschwindet vermöge der Euler-Lagrange Gleichung (3.2.8).

Wie schon zuvor ist es nützlich, komplexe Koordinaten einzuführen, $z = x^0 + ix^1$ und $\bar{z} = x^0 - ix^1$. Die Euler-Lagrange Gleichung ist dann gerade

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} \phi = 0\,. \tag{3.2.11}$$

Die allgemeinste Lösung ist daher, dass

$$\phi(z,\bar{z}) = \phi_L(z) + \phi_R(\bar{z})\,. \tag{3.2.12}$$

Da die Felder auf der komplexen Ebene (und nicht nur auf einer Überlagerung der komplexen Ebene) definiert sein sollen, können wir sie wie folgt in Moden entwickeln:

$$\begin{aligned}
\phi_L(z) &= \frac{1}{2}\,q - \frac{i}{2}\,p\,\log z + \frac{i}{\sqrt{2}} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n}\,a_n\,z^{-n}\,, \\
\phi_R(\bar{z}) &= \frac{1}{2}\,q - \frac{i}{2}\,p\,\log \bar{z} + \frac{i}{\sqrt{2}} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n}\,\bar{a}_n\,\bar{z}^{-n}\,,
\end{aligned}$$

wobei die Summen über alle nicht-verschwindenen ganzen Zahlen laufen. [Die Faktoren von i treten natürlicherweise auf, wenn man diese Euklidische Theorie durch Wick Rotation aus einer Minkowski Theorie erhält. Beachte, dass in $\phi(z,\bar{z})$ nur die Kombination $\log z + \log \bar{z} = \log |z|^2$ auftritt; die Funktion $\phi(z,\bar{z})$ ist daher auf der komplexen Ebene eindeutig definiert.]

Um die Theorie quantisieren zu können, müssen wir jetzt eine Zeitrichtung auswählen. In der Stringtheorie ist die konforme Feldtheorie zunächst auf einem Zylinder definiert, wobei die Raumrichtung kompakt und die Zeitrichtung entlang der unendlichen Ausdehnung des Zylinders läuft. Der Zylinder kann mittels einer konformen Abbildung auf die komplexe Ebene (ohne den Ursprung) abgebildet werden; dabei entspricht dann der Ursprung gerade $t \to \infty$, während der Punkt bei Unendlich $t \to \infty$ entspricht. In diesem Kontext ist also die Zeitrichtung gerade die *radiale* Richtung; wenn man sie der Quantisierung zu Grunde legt (was wir nun tun wollen), spricht man auch von *radialer Quantisierung.*

Um das konkret durchzuführen, schreiben wir $z = re^{i\theta}$ und $\bar{z} = re^{-i\theta}$. Die kanonischen Vertauschungsregeln sind dann

$$[\phi(r,\theta), r\,\partial_r\,\phi(r,\theta')] = 2\pi\,\delta(\theta-\theta')\,. \tag{3.2.13}$$

Der obige Ansatz ergibt nun

$$r\,\partial_r\,\phi(r,\theta') = -ip - \frac{i}{\sqrt{2}} \sum_{m\neq 0} a_m r^{-m} e^{-im\theta'} - \frac{i}{\sqrt{2}} \sum_{m\neq 0} \bar{a}_m r^{-m} e^{im\theta'}\,. \tag{3.2.14}$$

Die obigen kanonischen Vertauschungsregeln (3.2.13) sind dann erfüllt, falls wir postulieren, dass die Moden a_n und $\bar{a}_n$ die Kommutatoren

$$\begin{aligned}
[a_n, a_m] &= n\,\delta_{n,-m} \\
[a_n, \bar{a}_m] &= 0 \\
[\bar{a}_n, \bar{a}_m] &= n\,\delta_{n,-m}
\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

erfüllen. Ausserdem gilt

$$[q, p] = i\,, \tag{3.2.16}$$

während alle anderen Kommutatoren verschwinden. In der Tat ist dann die rechte Seite von (3.2.13) gerade

$$[\phi(r,\theta), r\partial_r\phi(r,\theta')] = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(e^{-in(\theta-\theta')} + e^{in(\theta-\theta')}\right) = 2\pi\,\delta(\theta-\theta')\,. \tag{3.2.17}$$

3.2.1 Die konforme Symmetrie

Wir erwarten, dass auch die Quantentheorie konform invariant ist. Um dies zu beweisen, müssen wir jetzt die Generatoren der konformen Symmetrie konstruieren. Wie wir in Kapitel 3.1.1 gesehen haben, ist die T^{--} Komponente des Energie-Impuls-Tensors ein chirales Feld. Wegen (3.2.9) ist diese Komponente

$$\begin{aligned} T^{--} &= \frac{1}{2}\left(T^{00} - iT^{01}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_0\phi\,\partial_0\phi - \frac{1}{2}\left(\partial_0\phi\,\partial_0\phi + \partial_1\phi\,\partial_1\phi\right) - i\,\partial_0\phi\,\partial_1\phi\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\partial_0\phi - i\partial_1\phi\right)\left(\partial_0\phi - i\partial_1\phi\right) \\ &= \partial_z\phi\,\partial_z\phi\,, \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

und entsprechend für

$$T^{++} = \partial_{\bar z}\phi\,\partial_{\bar z}\phi\,. \tag{3.2.19}$$

Da $\phi(z,\bar z) = \phi_L(z) + \phi_R(\bar z)$, trägt zu T^{--} nur ϕ_L bei, und entsprechend für T^{++},

$$T^{--} = \partial_z\phi_L\,\partial_z\phi_L\,, \qquad T^{++} = \partial_{\bar z}\phi_R\,\partial_{\bar z}\phi_R\,. \tag{3.2.20}$$

Mit der obigen Modenentwicklung für $\phi_L(z)$ ist

$$\partial_z\phi_L(z) = \frac{-i}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}\,, \tag{3.2.21}$$

wobei wir $a_0 = p/\sqrt{2}$ definiert haben, und ensprechend

$$\partial_{\bar z}\phi_R(\bar z) = \frac{-i}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar a_n \bar z^{-n-1}\,, \tag{3.2.22}$$

wobei wiederum $\bar a_0 = p/\sqrt{2}$ ist. Entwickeln wir T^{--} und T^{++} als

$$T^{--}(z) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}\,, \qquad T^{++}(\bar z) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar L_n \bar z^{-n-2}\,, \tag{3.2.23}$$

dann sind die zugehörigen Moden gerade

$$
\begin{aligned}
L_n &= \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l \, a_{n-l} \\
\bar{L}_n &= \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \bar{a}_l \, \bar{a}_{n-l} \, .
\end{aligned}
$$

[Da für $n = 0$ der Kommutator der beiden Operatoren, die in der unendlichen Summe auftreten, nicht verschwindet, muss man in diesem Fall auf die Reihenfolge achten, in der diese Operatoren stehen; dies wird weiter unten diskutiert werden. Das folgende gilt daher zunächst nur für $n \neq 0$.] Diese Moden implementieren gerade die konformen Symmetrietransformationen. Um dies zu sehen, berechnen wir den Kommutator

$$
\begin{aligned}
[L_m, a_n] &= \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} [a_l \, a_{m-l}, a_n] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(a_l \, [a_{m-l}, a_n] + [a_l, a_n] \, a_{m-l} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(-n \, a_{m+n} - n \, a_{m+n} \right) \\
&= -n \, a_{m+n} \, .
\end{aligned}
\tag{3.2.24}
$$

Entsprechende Formeln gelten dann auch für den Kommutator von $[\bar{L}_m, \bar{a}_n]$. Ausserdem finden wir mit einer ähnlichen Rechnung

$$
[L_m, q] = -\frac{i}{\sqrt{2}} \, a_m \, , \qquad [\bar{L}_m, q] = -\frac{i}{\sqrt{2}} \, \bar{a}_m \, . \tag{3.2.25}
$$

Der Operator L_m implementiert dann in der Tat die Transformation (2.5.47), da

$$
\begin{aligned}
[L_m, \phi(z, \bar{z})] &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \, a_m - \frac{i}{\sqrt{2}} \sum_{n \neq 0} z^{-n} a_{n+m} \\
&= -\frac{i}{\sqrt{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l z^{m-l} \\
&= z^{m+1} \, \partial_z \, \phi(z, \bar{z}) \, .
\end{aligned}
\tag{3.2.26}
$$

[Berücksichtige hier, dass $[L_m, \phi_R(\bar{z})] = -\frac{i}{2\sqrt{2}} a_m$!] Die Rechnung für den Kommutator von $\bar{L}_m$ ist analog.

Um unser Argument zu vervollständigen, müssen wir jetzt noch den Operator L_0 definieren (und nachweisen, dass er auch entsprechende Vertauschungsregeln mit $\phi(z, \bar{z})$ hat). Wir postulieren, dass

$$
L_0 = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} : a_n \, a_{-n} : = \frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} : a_n \, a_{-n} : \, , \tag{3.2.27}
$$

wobei die *Normalordnungsvorschrift* bedeutet, dass

$$\begin{aligned} : a_n\, a_m : \; &= \; a_n\, a_m \qquad \text{falls} \quad m \geq n \\ &= \; a_m\, a_n \qquad \text{falls} \quad m < n\,. \end{aligned} \tag{3.2.28}$$

[Insbesondere bedeutet das, dass wir den Operator L_0 auch als

$$L_0 = \frac{1}{4}\, p^2 + \sum_{n>0} a_{-n}\, a_n \tag{3.2.29}$$

schreiben können.] Die Rechnung (3.2.24) ist identisch wie zuvor, und wir haben deshalb

$$[L_0, a_n] = -n\, a_n\,, \qquad [\bar{L}_0, \bar{a}_n] = -n\, \bar{a}_n\,. \tag{3.2.30}$$

Es folgt ausserdem aus (3.2.16), dass

$$[L_0, q] = -\frac{i}{2}\, p = -\frac{i}{\sqrt{2}}\, a_0\,, \qquad [\bar{L}_0, q] = -\frac{i}{2}\, p = -\frac{i}{\sqrt{2}}\, \bar{a}_0\,. \tag{3.2.31}$$

Mit denselben Argumenten wie oben folgt dann, dass (3.2.26) auch für $m = 0$ gilt. Damit haben wir gezeigt, dass die Quantentheorie tatsächlich Operatoren besitzt, die die infinitesimale konforme Symmetrie implementieren. Die Konstruktion dieser Symmetriegeneratoren als Bilineare der bosonischen Moden wird *Sugawara Konstruktion* genannt.

3.2.2 Die Virasoro Algebra

Es ist instruktiv, jetzt die Kommutatoren der konformen Generatoren L_m zu berechnen. Aus der Jakobi Identität folgt, dass

$$0 = [L_m, [L_n, \phi(z,\bar{z})]] + [L_n, [\phi(z,\bar{z}), L_m]] + [\phi(z,\bar{z}), [L_m, L_n]]\,. \tag{3.2.32}$$

Unter Benützung der Anti-Symmetrie der Kommutatoren kann man diese Identität auch als

$$[[L_m, L_n], \phi(z,\bar{z})] = [L_m, [L_n, \phi(z,\bar{z})]] - [L_n, [L_m, \phi(z,\bar{z})]] \tag{3.2.33}$$

schreiben. Da der Kommutator $[L_l, \phi(z,\bar{z})]$ wegen (3.2.26) wie ein Differentialoperator auf $\phi(z,\bar{z})$ wirkt, folgt aus der selben Rechnung wie in Kapitel 2.5.2, dass

$$[[L_m, L_n], \phi(z,\bar{z})] = (m-n)[L_{m+n}, \phi(z,\bar{z})]\,. \tag{3.2.34}$$

[Die Wirkung von (3.2.26) unterscheidet sich durch ein Vorzeichen von (2.5.47). Die obige Rechnung ist dennoch korrekt, da sich bei der Auswertung von

$$[L_m, [L_n, \phi(z,\bar{z})]] = z^{n+1}\partial_z [L_m, \phi(z,\bar{z})] = z^{n+1}\partial_z \left(z^{m+1}\partial_z\right) \phi(z,\bar{z}) \tag{3.2.35}$$

die Reihenfolge relativ zu der in Kapitel 2.5.2 benützten umdreht.] Zunächst könnte man denken, dass dies impliziert, dass

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n}\,, \tag{3.2.36}$$

d.h. dass die Operatoren einfach die Witt Algebra (2.5.48) erfüllen. Jedoch ist das nicht korrekt: das obige Argument zeigt lediglich, dass (3.2.36) bis auf Operatoren stimmen muss, die mit $\phi(z,\bar{z})$ vertauschen. Jeder solche Term muss daher mit allen a_n und $\bar{a}_n$ vertauschen, und deshalb insbesondere auch mit L_n und $\bar{L}_n$; vom Standpunkt der Witt Algebra definiert dieser Korrekturterm daher einen *zentralen* Operator. Bevor wir diesen zentralen Term berechnen, ist es instruktiv, ein paar allgemeine Bemerkungen zu zentralen Erweiterungen zu machen.

3.2.3 Interlude: Zentrale Erweiterungen

Sei $\mathbf{g}$ eine Lie Algebra (zum Beispiel die Witt Algebra), die durch den Kommutator $[a,b] \in \mathbf{g}$ für $a, b \in \mathbf{g}$ definiert ist. Eine *zentrale Erweiterung* von $\mathbf{g}$ ist die Lie Algebra $\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{g} \oplus \mathbb{C}$, deren Kommutatoren durch

$$\begin{aligned} [a,b]' &= [a,b] + k\,\theta(a,b) && (3.2.37)\\ [a,k]' &= [k,k]' = 0\,, && (3.2.38) \end{aligned}$$

gegeben sind, wobei k der Basisvektor in $\mathbb{C}$ ist. Die Abbildung $\theta : \mathbf{g}\oplus\mathbf{g} \to \mathbb{C}$ ist bilinear. Damit dies eine konsistente Lie Algebra definiert muss θ anti-symmetrisch sein,

$$\theta(a,b) = -\theta(b,a)\,. \tag{3.2.39}$$

Ausserdem muss die Lie Algebra $\tilde{\mathbf{g}}$ die Jakobi Identität erfüllen: dies verlangt, dass

$$\theta(a,[b,c]) + \theta(b,[c,a]) + \theta(c,[a,b]) = 0\,. \tag{3.2.40}$$

Diese Bedingung ist genau die Bedingung, dass θ ein 2-Kozykel der Lie Algebra $\mathbf{g}$ ist. Der Raum dieser 2-Kozykel ist ein Vektorraum: falls θ_1 und θ_2 die beiden Bedingungen (3.2.39,3.2.40) erfüllen, dann ist das auch für $\alpha\theta_1 + \beta\theta_2$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ der Fall.

Manche zentralen Erweiterungen sind trivial in dem Sinn, dass sie in eine Redefinition von $\mathbf{g}$ absorbiert werden können. Für jedes Lie Algebra element a definiere

$$\hat{a} = a - k\xi(a)\,, \tag{3.2.41}$$

wobei $\xi : \mathbf{g} \to \mathbb{C}$ eine linear Abbildung ist. Wegen (3.2.38) ist der Kommutator von $\hat{a}$ mit $\hat{b}$ dann gleich dem Kommutator von a und b, aber da auch $[a,b]$ umdefiniert wurde findet man

$$[\hat{a},\hat{b}]' = [a,b] + k\,\theta(a,b) = \widehat{[a,b]} + k\left[\theta(a,b) + \xi([a,b])\right]. \tag{3.2.42}$$

Es ist einfach zu sehen, dass $(a,b) \mapsto \xi([a,b])$ die beiden 2-Kozykel Bedingungen (3.2.39) und (3.2.40) erfüllt; jedes $\xi : \mathbf{g} \to \mathbb{C}$ definiert daher einen sogannten *Korand*. Die interessanten zentralen Erweiterungen werden daher durch den Quotientenraum der 2-Kozykel modulo der Koränder beschrieben; dieser Quotientenraum ist gerade die zweite Kohomologie H^2 der Lie Algebra $\mathbf{g}$.

Für endlich-dimensionale halb-einfache Lie Algebren ist $H^2 = \{0\}$, d.h. diese Lie Algebren besitzen keine nicht-trivialen zentralen Erweiterungen. (Übungsblatt). Die Witt Algebra hat jedoch eine nicht-triviale zentrale Erweiterung. Wir wollen nun den Raum der zentralen Erweiterungen der Witt Algebra analysieren. Wir machen den Ansatz

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + c_{m,n}\,, \tag{3.2.43}$$

wobei $c_{m,n} \equiv \theta(L_m, L_m)$. Die Matrix $c_{m,n}$ muss anti-symmetrisch sein, $c_{m,n} = -c_{n,m}$. Die Kozykel-Bedingung ist nun

$$(n-k)c_{m,n+k} + (k-m)c_{n,k+m} + (m-n)c_{k,m+n} = 0\,. \tag{3.2.44}$$

Zunächst wollen wir die Freiheit, einen Korand zu addieren, dazu benützen, die Terme $c_{n,0} = c_{0,n} = c_{1,-1} = 0$ zu setzen. Dazu definieren wir

$$\tilde{L}_n = L_n + \frac{c_{n,0}}{n} \qquad \text{falls } n \neq 0 \tag{3.2.45}$$

$$\tilde{L}_0 = L_0 + \frac{1}{2}c_{1,-1}\,. \tag{3.2.46}$$

Es folgt dann, dass

$$[\tilde{L}_m, \tilde{L}_0] = nL_n + c_{n,0} = n\tilde{L}_n \tag{3.2.47}$$

$$[\tilde{L}_1, \tilde{L}_{-1}] = 2L_0 + c_{1,-1} = 2\tilde{L}_0\,, \tag{3.2.48}$$

d.h. nach Redefinition durch einen Korand gilt $c_{n,0} = c_{0,n} = c_{1,-1} = 0$. Nun benützen wir (3.2.44) mit $k = 0$

$$nc_{m,n} - mc_{n,m} = 0\,. \tag{3.2.49}$$

Zusammen mit der Antisymmetrie von $c_{n,m}$ folgt dann, dass

$$(m+n)c_{m,n} = 0\,. \tag{3.2.50}$$

Dies bedeutet, dass $c_{m,n} = 0$ für alle m, n für die nicht $m+n = 0$. Schliesslich betrachten wir (3.2.44) mit $k = -m-1$ und $n = 1$

$$(m+2)c_{m,-m} + (m-1)c_{-m-1,m+1} = 0\,, \tag{3.2.51}$$

was zu der Rekursionsformel

$$c_{m+1,-m-1} = \frac{m+2}{m-1}c_{m,-m}\,, \qquad m \geq 2 \tag{3.2.52}$$

führt. Die allgemeinste Lösung dieser Rekursionsformel ist dann

$$c_{m,n} = \frac{c}{12}m(m+1)(m-1)\delta_{m,-n}\,. \tag{3.2.53}$$

Dieses Argument beweist, dass der Raum der zentralen Erweiterungen für die Witt Algebra gerade 1-dimensional ist; die 1-Parameter Familie von zentralen Erweiterungen ist durch den Parameter c beschrieben. Dieser Parameter wird üblicherweise *zentrale Ladung* genannt.

Zentrale Erweiterungen von Lie Algebren hängen eng mit projektiven Darstellungen der zugehörigen Gruppen zusammen. Letztere treten natürlicherweise in der Quantentheorie auf, da der Raum der Zustände ein projektiver Vektorraum ist. Eine projektive Darstellung einer Gruppe $U : G \to \mathrm{End}(V)$ ist eine Darstellung, für die

$$U(g)\,U(h) = c(g,h)\,U(gh) \tag{3.2.54}$$

gilt, wobei $c(g,h) \in \mathbb{C}$ ein Gruppenkozykel ist. Die Kozykelbedingung kommt in diesem Fall von der Assoziativität dieser Operatoren; dies führt zu

$$c(g_1, g_2 g_3)\,c(g_2, g_3) = c(g_1 g_2, g_3) c(g_1, g_2)\,. \tag{3.2.55}$$

Durch Redefinition von $U(g)$ kann man leicht 'triviale' projektive Darstellungen erzeugen. Betrachte dazu die Redefinition von $U(g)$ durch eine g-abhängige Zahl,

$$U(g) \mapsto U(g) c(g)\,. \tag{3.2.56}$$

Eine solche Redefinition modifiziert den Kozykel $c(g,h)$ vermöge

$$c(g,h) \mapsto c(g,h)\,\frac{c(g)c(h)}{c(gh)}\,. \tag{3.2.57}$$

Die Menge der Kozykeln bilden eine Gruppe unter Multiplikation; die projektiven Darstellungen sind dann durch die Quotientengruppe der Kozykeln modulo der Koränder (d.h. der Transformationen der Form (3.2.57)) definiert. Dieser Quotientenraum ist wiederum eine Gruppe, und wird als 2. Kohomologiegruppe der Gruppe G, $H^2(G,\mathbb{C})$ bezeichnet. Die 2. Kohomologie der einfach zusammenhängenden Überlagerungsgruppe stimmt gerade mit der 2. Kohomologie der zugehörigen Lie Algebra überein; insbesondere ist die 2. Kohomologie für die Identitätskomponente der einfach zusammenhängenden einfachen Lie Gruppen trivial. Für diskrete Gruppen ist jedoch diese Kohomologie oft nicht trivial; zum Beispiel ist

$$H^2(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{C}) = \mathbb{Z}_2\,. \tag{3.2.58}$$

Nicht-triviale Gruppenkohomologien diskreter Gruppen implizieren, dass der zugehörige Orbifold einer Stringtheorie 'diskrete Torsion' besitzt.

3.2.4 The zentrale Ladung für das freie Boson

Nach diesen Vorbemerkungen, jetzt aber zur eigentlichen Rechnung: betrachte zunächst den Fall des Kommutators $[L_m, L_n]$ wobei $m+n \neq 0$:

$$[L_m, L_n] \;=\; \frac{1}{2}\sum_{l\in\mathbb{Z}} [L_m, a_l\, a_{n-l}]$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\Big([L_m,a_l]\,a_{n-l}+a_l\,[L_m,a_{n-l}]\Big)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\Big(-la_{m+l}\,a_{n-l}+(l-n)a_l\,a_{m+n-l}\Big)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\Big((m-l)a_l\,a_{m+n-l}+(l-n)a_l\,a_{m+n-l}\Big)\\
&= (m-n)\,L_{m+n}\,. \qquad (3.2.59)
\end{aligned}
$$

Hier haben wir benützt, dass, solange $m+n\neq 0$, es auf die Reihenfolge der Operatoren in der vorletzten Zeile nicht ankommt. [Falls $m=0$ oder $n=0$ ist diese Rechnung auch gültig, da allfällige Korrekturterme, die durch Normalordnung von L_0 auftreten können, immer zentral sind, und daher nicht zu dem Kommutator beitragen können.]

Der problematische Term ist daher der Kommutator $[L_m,L_{-m}]$, wobei ohne Einschränkung der Allgemeintheit angenommen werden kann, dass $m>0$ ist. Für L_{-m} spielt die Ordnung der Generatoren keine Rolle, aber es ist dennoch für das folgende nützlich, L_{-m} als

$$
L_{-m}=\frac{1}{2}\sum_{l\geq 0}a_{-m-l}\,a_l+\frac{1}{2}\sum_{l<0}a_l\,a_{-m-l} \qquad (3.2.60)
$$

zu schreiben. Dann haben wir (für $m>0$)

$$
\begin{aligned}
[L_m,L_{-m}] &= \frac{1}{2}\sum_{l\geq 0}[L_m,a_{-m-l}\,a_l]+\frac{1}{2}\sum_{l<0}[L_m,a_l\,a_{-m-l}]\\
&= \frac{1}{2}\sum_{l\geq 0}\Big((m+l)\,a_{-l}\,a_l-l\,a_{-m-l}\,a_{m+l}\Big)\\
&\qquad +\frac{1}{2}\sum_{l<0}\Big(-l\,a_{m+l}\,a_{-m-l}+(m+l)\,a_l\,a_{-l}\Big)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{l\in\mathbb{Z}}(m+l):a_{-l}\,a_l:+\frac{1}{2}\sum_{l\in\mathbb{Z}}(-l):a_{-m-l}\,a_{m+l}:\\
&\qquad +\frac{1}{2}\sum_{l=-m+1}^{-1}(-l)\,[a_{m+l},a_{-m-l}]\,. \qquad (3.2.61)
\end{aligned}
$$

[Der letzte Term kommt hier daher, dass der dritte Term der dritten Zeile nicht korrekt normal-geordnet ist.] Die beiden Terme in der vorletzten Zeile sind jetzt gerade

$$
\frac{1}{2}\sum_{l\in\mathbb{Z}}(m+l):a_{-l}\,a_l:+\frac{1}{2}\sum_{l\in\mathbb{Z}}(m-l):a_{-l}\,a_l:=m\sum_{l\in\mathbb{Z}}:a_{-l}\,a_l:=2\,m\,L_0\,. \qquad (3.2.62)
$$

Sie ergeben daher gerade $(m-n)L_{m+n}$ für $n=-m$. Der letzte Term in (3.2.61) ist dagegen

$$
\frac{1}{2}\sum_{l=-m+1}^{-1}(-l)\,(m+l)=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m-1}l\,(m-l)=\frac{m}{2}\sum_{l=1}^{m-1}l-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m-1}l^2\,. \qquad (3.2.63)
$$

Nun gilt

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{m-1} l &= \frac{1}{2}\, m\,(m-1) \\
\sum_{l=1}^{m-1} l^2 &= \frac{1}{6}\,(2m-1)\, m\,(m-1)\,,
\end{aligned}
\tag{3.2.64}
$$

und daher ist der letzte Term in (3.2.61) gerade

$$
\begin{aligned}
\frac{m}{2}\,\frac{1}{2}\, m\,(m-1) - \frac{1}{2}\,\frac{1}{6}\,(2m-1)\, m\,(m-1) &= m\,(m-1)\left(\frac{m}{4} - \frac{2m-1}{12}\right) \\
&= \frac{1}{12}\, m\,(m-1)\,(m+1)\,.
\end{aligned}
\tag{3.2.65}
$$

Wir finden daher, dass die Algebra der infinitesimalen Transformationen L_m gerade die Vertauschungsregeln

$$
[L_m, L_n] = (m-n)\, L_{m+n} + \frac{1}{12}\, m\,(m^2-1)
\tag{3.2.66}
$$

erfüllen. Dies ist die berühmte Virasoro Algebra. Der Koeffizient vor dem zentralen Term wird im allgemeinen durch $\frac{c}{12}$ parametrisiert, wobei c die *zentrale Ladung* genannt wird; die obige Darstellung der Virasoro Algebra hat daher den Wert $c = 1$.

3.3 Das freie Fermion in zwei Dimensionen

Die zentrale Ladung einer konformen Feldtheorie ist nicht immer gleich $c = 1$. Zum Beispiel nimmt sie den Wert $c = 1/2$ für eine freie Fermionentheorie an.

Die Euklidische Wirkung eines freien Majorana-Fermions in zwei Dimensionen ist durch die folgende Lagrange Dichte definiert

$$
\mathcal{L} = \frac{1}{2}\, \psi^\dagger\, \gamma^0\, \gamma^i\, \partial_i\, \psi\,,
\tag{3.3.1}
$$

wobei die Dirac-Matrizen γ^i, $i = 0, 1$, die Dirac Algebra erfüllen,

$$
\gamma^i\, \gamma^j + \gamma^j\, \gamma^i = 2\, \delta^{ij}\,.
\tag{3.3.2}
$$

Das Fermionenfeld ψ hat zwei Komponenten $(\psi, \bar{\psi})$, und die zwei-dimensionale Darstellung der Dirac Algebra ist durch

$$
\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}
\tag{3.3.3}
$$

gegeben. Es folgt daher, dass

$$
\gamma^0\,(\gamma^0\, \partial_0 + \gamma^1\, \partial_1) = \begin{pmatrix} \partial_0 + i\partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_0 - i\partial_1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \partial_{\bar{z}} & 0 \\ 0 & \partial_z \end{pmatrix},
\tag{3.3.4}
$$

wobei, wie zuvor, $z = x^0 + ix^1$ und $\bar{z} = x^0 - ix^1$. Die Wirkung hat daher die Form

$$S = \int dz d\bar{z} \left(\psi \, \partial_{\bar{z}} \psi + \bar{\psi} \, \partial_z \bar{\psi} \right) . \tag{3.3.5}$$

Die Euler-Lagrange Gleichungen, die daraus abgeleitet werden, sind einfach, dass

$$\partial_{\bar{z}} \psi = 0 \, , \qquad \partial_z \bar{\psi} = 0 \, , \tag{3.3.6}$$

d.h. $\psi \equiv \psi(z)$ und $\bar{\psi} \equiv \bar{\psi}(\bar{z})$. Wir können daher die Felder ψ und $\bar{\psi}$ wie folgt entwickeln:

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_s b_s \, z^{-s-1/2} \, , \\ \bar{\psi}(\bar{z}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_s \bar{b}_s \, \bar{z}^{-s-1/2} \, . \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

In der Situation, die uns hauptsächlich interessiert, sind diese Felder zunächst auf einem (unendlichen) Zylinder definiert, der dann vermittels einer konformen Abbildung auf die komplexe Ebene (ohne den Ursprung) abgebildet wird. Es gibt daher zwei verschiedene Sektoren dieser Theorie, die sich dadurch unterscheiden, ob das Fermionfeld ψ (oder $\bar{\psi}$) auf dem ursprünglichen Zylinder periodische (**Ramond-Sektor**) oder anti-periodische (**Neveu-Schwarz-Sektor**) Randbedingunen erfüllt. Nach der Transformation auf die komplexe Ebene entspricht das dann den zwei Möglichkeiten, dass $\psi(z)$ periodisch oder anti-periodisch unter $z \mapsto e^{2\pi i} z$ ist. Da das Fermionfeld sich nicht-trivial unter der relevanten konformen Tranformation transformiert (siehe weiter unten), entspricht der **R-Sektor** gerade $s \in \mathbb{Z}$ auf der komplexen Ebene, wohingegen der **NS-Sektor** gerade $s \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ gibt. Im Folgenden werden wir hauptsächlich den technisch einfacheren Fall von NS-Feldern behandeln.

Als nächstes wollen wir die Theorie quantisieren. Dazu postulieren wir die folgenden Vertauschungsregeln für die Moden

$$\{b_s, b_t\} = \delta_{s,-t} \, , \qquad \{\bar{b}_s, \bar{b}_t\} = \delta_{s,-t} \, , \tag{3.3.8}$$

wobei hier $\{.,.\}$ den Anti-Kommutator bezeichnet. Da

$$\sum_s e^{is(\theta'-\theta)} = 2\pi\delta(\theta - \theta') \tag{3.3.9}$$

führen diese zu den kanonischen Vertauschungsregel für das Fermionfeld auf der komplexen Ebene

$$\{z^{\frac{1}{2}}\psi(z), z'^{\frac{1}{2}}\psi(z')\} = \pi \, \delta(\theta - \theta') \, , \tag{3.3.10}$$

$$\{\bar{z}^{\frac{1}{2}}\bar{\psi}(\bar{z}), \bar{z}'^{\frac{1}{2}}\bar{\psi}(\bar{z}')\} = \pi \, \delta(\theta - \theta') \, , \tag{3.3.11}$$

wobei $z = re^{i\theta}$ und $z' = re^{i\theta'}$ mit entsprechenden Formeln für $\bar{z} = re^{-i\theta}$, u.s.w. Die Vorfaktoren $z^{\frac{1}{2}}$ und $z'^{\frac{1}{2}}$ (und entsprechend $\bar{z}^{\frac{1}{2}}$ und $\bar{z}'^{\frac{1}{2}}$) rühren daher, dass die Fermionenfelder sich unter der konformen Transformation, die den Zylinder auf die komplexe

Ebene abbildet, nicht-trivial transformieren. (Wir werden das später genauer diskutieren.)

Die obigen Identitäten gelten unabhängig davon, ob s ganzzahlig oder halbzahlig ist. Insbesondere gelten daher die Vertauschungsregeln (3.3.8) gleichermassen für den NS- und den R-Sektor.

3.3.1 Die konforme Symmetrie

Wie zuvor wollen wir jetzt die Generatoren der Virasoro Algebra aus den freien Fermionenfeldern konstruieren. Unter Ausnützung der Bewegungsgleichungen finden wir jetzt, dass

$$\begin{aligned} T^{--} &= \frac{1}{2}\left(T^{00} - iT^{10}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\bar{\psi}\,(\partial_0\bar{\psi}) + \psi\,(\partial_0\psi) - i\bar{\psi}\,(\partial_1\bar{\psi}) - i\psi\,(\partial_1\psi)\right) \\ &= \psi\,\partial_z\psi\,. \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

Wie erwartet ist T^{--} also wiederum ein chirales Feld, das wir wie zuvor als

$$T^{--}(z) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2} \tag{3.3.13}$$

entwickeln. Da

$$\begin{aligned} \psi\,\partial_z\psi &= -\frac{1}{2}\sum_s b_s z^{-s-\frac{1}{2}} \sum_r b_r \left(r+\frac{1}{2}\right) z^{-r-\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_n z^{-n-2} \sum_r b_{n-r}\, b_r \left(r+\frac{1}{2}\right)\,, \end{aligned} \tag{3.3.14}$$

folgt daraus, dass

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_r r\ :\ b_{n-r} b_r\ :\,, \tag{3.3.15}$$

wobei die Normalordnungsvorschrift, die für Fermionen relevant ist, sich durch ein Minuszeichen vom bosonischen Fall unterscheidet

$$\begin{aligned} :b_r\, b_s: &= b_r\, b_s \qquad \text{falls} \quad s \geq r \\ &= -b_s\, b_r \qquad \text{falls} \quad s < r\,. \end{aligned} \tag{3.3.16}$$

[Wegen der Anti-symmetrie der fermionischen Moden verschwindet der $+\frac{1}{2}$ Term in der Klammer von (3.3.14). Dies gilt zunächst nur, falls $n \neq 0$ ist. Für L_0 ist dieser Korrekturterm gerade eine Zahl, und kann deshalb durch diese quasi-klassischen Analyse sowieso nicht direkt bestimmt werden. (Ein eventuell auftretender zentraler Term in der Defitinion von L_0 wird dadurch festgelegt, dass die Moden L_n gerade die Virasoro Algebra erfüllen sollen.)]

Eine entsprechende Formel gilt natürlich auch für $\bar{L}_n$; im folgenden werden wir uns nur auf den chiralen Sektor (der durch b_r erzeugt wird) beschränken, da die Diskussion für den anti-chiralen Sektor (der durch $\bar{b}_r$ erzeugt wird) offensichtlich identisch ist.
Als erstes berechnen wir den Kommutator von L_n mit den fermionischen Generatoren

$$\begin{aligned}[][L_n, b_s] &= \frac{1}{2}\sum_r r\,[b_{n-r}\,b_r, b_s] \\ &= \frac{1}{2}\sum_r r\left(b_{n-r}\,\{b_r, b_s\} - \{b_{n-r}, b_s\}\,b_r\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-s\,b_{n+s} - (n+s)\,b_{n+s}\right) \\ &= \left(-\frac{n}{2} - s\right)\,b_{n+s}\,. \end{aligned} \tag{3.3.17}$$

Hier haben wir wiederum benützt, dass allfällige Normalordnungskorrekturterme für diese Rechnung keine Rolle spielen. Um zu zeigen, dass diese Definition von L_n angemessen ist, berechnen wir

$$\begin{aligned}[][L_n, \psi(z)] &= \sum_s z^{-s-1/2}[L_n, b_s] \\ &= \sum_s z^{-s-1/2}\left(-\frac{n}{2} - s\right)\,b_{n+s} \\ &= z^n\sum_s z^{-s-1/2}\left(\frac{n}{2} - s\right)b_s\,. \end{aligned} \tag{3.3.18}$$

Dies stimmt mit

$$z^{n+1}\partial_z\psi(z) = z^n\sum_s\left(-s - \frac{1}{2}\right)b_s z^{-s-1/2} \tag{3.3.19}$$

nur für den Fall von $n = -1$ überein. Der Grund für diese Diskrepanz besteht darin, dass sich das Fermionfeld nicht-trivial unter konformen Transformationen transformiert. Unter der Transformation $z \mapsto f(z) = z + \omega(z)$, transformiert sich das Fermionfeld nämlich als

$$\psi(z) \mapsto f'(z)^h\,\psi\Big(f(z)\Big)\,, \qquad \text{mit} \quad h = \frac{1}{2}\,. \tag{3.3.20}$$

[Diese Vorschrift ist offensichtlich mit der Gruppenstruktur der Transformationsgruppe vereinbar: dies ist einfach eine Folge der Kettenregel, die besagt, dass

$$\partial_z f(g(z)) = f'\Big(g(z)\Big)\,g'(z)\,.] \tag{3.3.21}$$

Um zu zeigen, dass (3.3.20) tatsächlich mit (3.3.18) kompatibel ist, betrachte die infinitesimale Transformation, $z \mapsto z + \epsilon z^{n+1}$. Die rechte Seite von (3.3.20) ist dann zu erster Ordnung in ϵ

$$\Big(1+h(n+1)\epsilon z^n\Big)\Big(\psi(z) + \epsilon z^{n+1}\partial_z\psi(z)\Big) = \psi(z) + \epsilon\,\Big[z^{n+1}\partial_z + h(n+1)z^n\Big]\,\psi(z)\,. \tag{3.3.22}$$

Wenn das auf $\psi(z)$ angewendet wird, erhält man, statt (3.3.19)

$$\left[z^{n+1}\partial_z + \frac{1}{2}(n+1)z^n\right] \psi(z) = z^n \sum_s \left(\frac{n}{2} - s\right) b_s z^{-s-1/2}\,, \tag{3.3.23}$$

was damit in der Tat mit (3.3.18) übereinstimmt.

Der Umstand, dass sich das Fermionfeld wie in (3.3.20) unter konformen Transformationen transformiert, ist übrigens auch der Grund dafür, dass die Faktoren $z^{\frac{1}{2}}$, us.w. in (3.3.10) auftreten.

3.3.2 Die Virasoro Algebra im fermionischen Fall

Wie zuvor im bosonischen Fall ist es auch jetzt instruktiv, die Virasoro Algebra zu berechnen, um dadurch die zentrale Ladung c zu bestimmen. Falls $m+n\neq 0$ haben wir wieder

$$\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= \frac{1}{2}\sum_r r\,[L_m, b_r\, b_{n-r}] \\
&= \frac{1}{2}\sum_r r\Big((-m/2-r)\, b_{m+r}\, b_{n-r} + b_r\,(-m/2-n+r)\, b_{m+n-r}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\sum_r b_r\, b_{m+n-r}\Big(r\,(-m/2-n+r) + (r-m)\,(m/2-r)\Big) \\
&= (m-n)\,\frac{1}{2}\sum_r r\, b_r\, b_{m+n-r} - \frac{m^2}{4}\sum_r b_r\, b_{m+n-r}\,.
\end{aligned} \tag{3.3.24}$$

Der letzte Term verschwindet, da der Term mit r und der Term mit $m+n-r$ sich gerade wegheben. Damit haben wir gezeigt, dass für $m+n\neq 0$

$$[L_m, L_n] = (m-n)\, L_{m+n}\,. \tag{3.3.25}$$

Um den zentralen Term zu bestimmen müssen wir jetzt noch den Kommutator $[L_m, L_{-m}]$ mit $m>0$ berechnen:

$$\begin{aligned}
[L_m, L_{-m}] &= \frac{1}{2}\sum_{s\geq 0} s\,[L_m, b_{-m-s}\, b_s] - \frac{1}{2}\sum_{s<0} s\,[L_m, b_s\, b_{-m-s}] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{s\geq 0} s\,[L_m, b_{-m-s}]b_s + \frac{1}{2}\sum_{s\geq 0} s\, b_{-m-s}\,[L_m, b_s] \\
&\qquad -\frac{1}{2}\sum_{s<0} s\,[L_m, b_s]\, b_{-m-s} - \frac{1}{2}\sum_{s<0} s\, b_s\,[L_m, b_{-m-s}] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{s\geq 0} s\,(m/2+s)\, b_{-s}\, b_s + \frac{1}{2}\sum_{s\geq 0} s\,(-m/2-s)\, b_{-m-s}\, b_{m+s} \\
&\qquad -\frac{1}{2}\sum_{s<0} s\,(-m/2-s)\, b_{m+s}\, b_{-m-s} - \frac{1}{2}\sum_{s<0} s\,(m/2+s)\, b_s\, b_{-s}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \frac{1}{2}\sum_s s\,(m/2+s)\ :b_{-s}\,b_s: + \frac{1}{2}\sum_s s\,(-m/2-s)\ :b_{-m-s}\,b_{m+s}: \\
& \qquad -\frac{1}{2}\sum_{-m\leq s<0} s\,(-m/2-s)\,\{b_{m+s},b_{-m-s}\}\,. \qquad (3.3.26)
\end{aligned}
$$

Die ersten beiden Terme sind gerade

$$
\frac{1}{2}\sum_s\Big(s\,(m/2{+}s)+(m/2{-}s)\,(s{-}m)\Big)\ :b_{-s}\,b_s:=\frac{1}{2}\,2m\sum_s s\ :b_{-s}\,b_s: -\frac{m^2}{4}\sum_s :b_{-s}\,b_s:\,. \qquad (3.3.27)
$$

Der zweite Term auf der rechten Seite verschwindet wieder wegen der Anti-Symmetrie der fermionischen Moden (d.h. weil der Beitrag von s und der Beitrag von $-s$ sich gerade wegheben; dieses Argument gilt nur im NS-Sektor). Der erste Term ist gerade, wie erwartet, $2mL_0$. Schliesslich ist der letzte Term in (3.3.26) für den Fall, dass die Fermionen im NS-Sektor sind, gerade

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\sum_{0<s\leq m} s\left(\frac{m}{2}-s\right) &= -\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m}\left(l-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{m+1}{2}-l\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m} l^2-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}+1\right)\sum_{l=1}^{m} l+\frac{m+1}{8}\,m \\
&= \frac{1}{12}(2m+1)\,(m+1)\,m-\frac{1}{4}\left(\frac{m}{2}+1\right)\,(m+1)\,m \\
&\qquad +\frac{1}{8}\,(m+1)\,m \\
&= m\,(m+1)\,\left[\frac{1}{12}\,(2m+1)-\frac{1}{8}\,(m+2-1)\right] \\
&= \frac{1}{24}\,m\,(m+1)\,(m-1)\,, \qquad (3.3.28)
\end{aligned}
$$

wobei wir (3.2.64) benützt haben. Daher folgt, dass die Virasoro Algebra im NS-Sektor gerade die Vertauschungsregeln

$$
[L_m,L_n]=(m-n)\,L_{m+n}+\frac{c}{12}\,m\,(m^2-1) \qquad (3.3.29)
$$

mit

$$
c=\frac{1}{2} \qquad (3.3.30)
$$

erfüllt.

Die Analyse im R-Sektor ist im wesentlichen identisch, es gibt jedoch ein paar wichtige Unterschiede. Zum einen verschwindet der letzte Term in (3.3.27) nicht mehr, da der Term mit $s=0$ gerade $-m^2/8$ ist. Zum zweiten ist in der letzten Summe in (3.3.26) s ganzzahlig, und wir erhalten daher, statt (3.3.28),

$$
-\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m} s\left(\frac{m}{2}-s\right) = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m} s^2-\frac{m}{4}\sum_{s=1}^{m} s
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{12}(2m+1)\,m\,(m+1) - \frac{m^2}{8}(m+1) \\
&= \frac{1}{24}m\,(m+1)\,(m+2)\,. \qquad (3.3.31)
\end{aligned}
$$

Zusammen mit dem Beitrag $-m^2/8$ aus (3.3.27) erhalten wir daher

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{24}m\,(m+1)\,(m+2) - \frac{m^2}{8} &= \frac{m}{24}\Big((m+1)\,(m+2) - 3m\Big) \\
&= \frac{m}{24}\,(m^2+2) \\
&= \frac{m}{24}\,(m^2-1) + \frac{3m}{24}\,, \qquad (3.3.32)
\end{aligned}
$$

wobei wir wiederum (3.2.64) benützt haben. Der erste Term gibt wieder die richtige zentrale Ladung ($c = 1/2$), und der letzte Term bedeutet, dass im R-Sektor L_n nicht durch (3.3.15), sondern durch

$$
L_n^R \equiv \frac{1}{2}\sum_{r\in\mathbb{Z}} r\ :b_{n-r}\,b_r:\ + \frac{1}{16}\,\delta_{n,0} \qquad (3.3.33)
$$

gegeben ist. [Der Beitrag von $2mL_0$ auf der rechten Seite des Kommutators $[L_m, L_{-m}]$ enthält dann zusätzlich den Term $2m/16 = 3m/24$. Die Addition dieses konstanten Terms ändert natürlich keine der anderen Kommutatoren.]

4 Konforme Felder und die chirale Theorie

Wir wollen nun allgemeine Konsequenzen der konformen Symmetrie für zwei-dimensionale konforme Feldtheorien analysieren. Insbesondere wollen wir analysieren, inwieweit die konforme Symmetrie die Struktur der Vakuumerwartungswerte bereits bestimmt. [Die Einschränkungen, die wir ableiten werden, gelten übrigens nicht nur in zwei Dimensionen; wir werden jedoch die Analyse nur in diesem Fall durchführen.]

4.1 Primäre Felder

Wie wir oben im Fall des Fermionfeldes $\psi(z)$ gesehen haben, transformieren sich die Felder einer konformen Feldtheorie im allgemeinen nicht trivial unter konformen Transformationen. Im einfachsten Fall ist jedoch die Transformation einfach durch einen skalaren Vorfaktor beschrieben und ist von der Form

$$\psi(z,\bar{z}) \mapsto \Big(f'(z)\Big)^h \Big(\bar{f}'(\bar{z})\Big)^{\bar{h}} \, \psi\Big(f(z),\bar{f}(\bar{z})\Big) , \tag{4.1.1}$$

wobei $f(z)$ eine analytische Funktion von z ist, und $\bar{f}(\bar{z})$ ihre komplex Konjugierte. In diesem Fall nennt man ψ ein *primäres Feld*; die beiden Parameter h und $\bar{h}$ sind die sogenannten *konformen Gewichte* des Feldes ψ. Zum Beispiel, das Fermionfeld $\psi(z)$ des vorigen Kapitels hat $h = 1/2$, $\bar{h} = 0$. Im folgenden wollen wir hauptsächlich den Fall betrachten $h = \bar{h}$, für den gilt

$$\psi(z,\bar{z}) \mapsto |f'(z)|^{2h} \, \psi\Big(f(z),\bar{f}(\bar{z})\Big) . \tag{4.1.2}$$

Die Vakuumerwartungswerte von Primärfeldern sind durch die konforme Symmetrie stark eingeschränkt. In der Tat ist für die folgende Diskussion nur die Möbiussymmetrie relevant; entsprechende Einschränkungen gelten daher auch für konforme Feldtheorien in anderen Dimensionen (für die die ganze konforme Symmetriegruppe gerade aus dem Analogon der Möbiusgruppe besteht). Die Möbiusgruppe besteht aus den fraktional linearen Transformationen, d.h. aus den Abbildungen

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} , \tag{4.1.3}$$

wobei a,b,c,d komplexe Konstanten sind, und $ad-bc=1$. Sie ist genau die Gruppe der invertierbaren analytischen Funktionen, die die 1-Punkt-Kompaktifizierung der komplexen Ebene (die Riemannsche Kugel) auf sich selbst abbilden. Die anderen lokal konformen Transformationen, die wir diskutiert haben, haben weitere Singularitäten, und definieren daher nicht direkt Symmetrien von Vakuumerwartungswerten. [Sie führen zu sogenannten *Ward Identitäten*, die die Vakuumerwartungswerte weiter einschränken; die Struktur der daraus resultierenden Differentialgleichungen ist aber im allgemeinen kompliziert.] Diese Subtilität ist darauf zurückzuführen, dass das Vakuum der Theorie nicht unter der ganzen Virasoro Algebra invariant sein kann. Das Vakuum Ω ist auf jeden Fall translations- und skaleninvariant, und daher gilt

$$L_{-1}\,\Omega = 0 , \qquad L_0\,\Omega = 0 , \tag{4.1.4}$$

aber es ist nicht möglich, dass es von allen L_n vernichtet wird. Dies ist eine Folge der Algebrastruktur der Virasoro Algebra: betrachte zum Beispiel den Kommutator

$$[L_2, L_{-2}] = 4\,L_0 + \frac{c}{2}\,. \tag{4.1.5}$$

Falls $L_2\,\Omega = L_{-2}\,\Omega = 0$, dann würde auch der Kommutator auf der linken Seite Ω vernichten. Da $L_0\,\Omega = 0$, wäre das nur dann konsistent, falls $c = 0$ — im allgemeinen ist dies aber, wie wir gesehen haben, nicht der Fall.

Es ist jedoch konsistent anzunehmen, dass das Vakuum von L_0 und $L_{\pm 1}$ vernichtet wird — das obige Argument greift in diesem Fall nicht, da $[L_1, L_{-1}] = 2\,L_0$. Die Korrelationsfunktionen (d.h. die Vakuumerwartungswerte) transformieren sich dann unter der Möbiusgruppe vermöge der obigen Transformationseigenschaften der Primärfelder.

Wir wollen das nun im Detail analysieren. Dazu betrachten wir zunächst den Fall einer 1-Punktfunktion,

$$\langle \psi(z,\bar{z}) \rangle\,, \tag{4.1.6}$$

wobei ψ ein primäres konformes Feld mit konformem Gewicht $h(=\bar{h})$ ist. Da die konforme Gruppe Translationen enthält (und das Vakuum translationsinvariant ist) kann diese 1-Punktfunktion in der Tat nicht von $(z,\bar{z})$ abhängen. Unter einer Skalentransformation $f(z) = \lambda z$ haben wir dann

$$F = \langle \psi(z,\bar{z}) \rangle = |\lambda|^{2h} \langle \psi(\lambda z, \bar{\lambda}\bar{z}) \rangle = |\lambda|^{2h}\, F\,, \tag{4.1.7}$$

wobei wir ausgenützt haben, dass F nicht von $(z,\bar{z})$ abhängt. Es folgt daher, dass $F \neq 0$ nur möglich ist, falls $h = 0$:

> Die Einpunktfunktion eines konformen Primärfeldes ψ kann nur dann von null verschieden sein, falls das konforme Gewicht $h_\psi = 0$.

Als nächstes betrachten wir eine Zweipunktfunktion,

$$\langle \psi_1(z_1,\bar{z}_1)\, \psi_2(z_2,\bar{z}_2) \rangle\,, \tag{4.1.8}$$

wobei das konforme Gewicht von ψ_i gerade $h_i(=\bar{h}_i)$ ist. Wegen der Translationsinvarianz kann diese Zweipunktfunktion nur von der Differenz der Argument abhängen, und die Skaleninvarianz impliziert, dass

$$\begin{aligned} F(z_1 - z_2, \bar{z}_1 - \bar{z}_2) &= \langle \psi_1(z_1,\bar{z}_1)\, \psi_2(z_2,\bar{z}_2) \rangle \\ &= |\lambda|^{2h_1+2h_2} \langle \psi_1(\lambda z_1, \bar{\lambda}\bar{z}_1)\, \psi_2(\lambda z_2, \bar{\lambda}\bar{z}_2) \rangle \\ &= |\lambda|^{2h_1+2h_2} F\Big(\lambda(z_1 - z_2), \bar{\lambda}(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)\Big)\,. \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

Daraus folgt, dass

$$\langle \psi_1(z_1,\bar{z}_1)\, \psi_2(z_2,\bar{z}_2) \rangle = C|z_1 - z_2|^{-2h_1-2h_2}\,. \tag{4.1.10}$$

Bisher haben wir nur Translations- und Skaleninvarianz benützt; unter einer speziellen konformen Transformation

$$z \mapsto f(z) = \frac{z}{1-\nu z}\,, \qquad f'(z) = \frac{1}{(1-\nu z)^2} \tag{4.1.11}$$

finden wir

$$\begin{aligned}
C|z_1 - z_2|^{-2h_1-2h_2} &= \langle \psi_1(z_1,\bar z_1)\,\psi_2(z_2,\bar z_2)\rangle \\
&= \left|\frac{1}{(1-\nu z_1)^2}\right|^{2h_1} \left|\frac{1}{(1-\nu z_2)^2}\right|^{2h_2} \\
&\qquad \times \left\langle \psi_1\left(\frac{z_1}{1-\nu z_1}, \frac{\bar z_1}{1-\bar\nu \bar z_1}\right)\, \psi_2\left(\frac{z_2}{1-\nu z_2}, \frac{\bar z_2}{1-\bar\nu \bar z_2})\right)\right\rangle \\
&= C\left|\frac{1}{(1-\nu z_1)}\right|^{4h_1} \left|\frac{1}{(1-\nu z_2)}\right|^{4h_2} \left|\frac{z_1}{1-\nu z_1} - \frac{z_2}{1-\nu z_2}\right|^{-2h_1-2h_2} \\
&= C\,|z_1 - z_2|^{-2h_1-2h_2}\,|(1-\nu z_1)|^{2h_2-2h_1}\,|(1-\nu z_2)|^{2h_1-2h_2}\,.
\end{aligned}$$

Daraus folgt dann, dass $C \neq 0$ nur möglich ist, falls $h_1 = h_2$. Wir schliessen also:

> Die Zweipunktfunktion zweier konformen Primärfelder ψ_1 und ψ_2 kann nur dann von null verschieden sein, falls die beiden konformen Gewichte übereinstimmen. In diesem Fall ist
>
> $$\langle \psi_1(z_1,\bar z_1)\,\psi_2(z_2,\bar z_2)\rangle = C|z_1 - z_2|^{-4h}\,. \tag{4.1.12}$$

Die konforme Symmetrie ist auch hinreichend, die Struktur von Dreipunktfunktionen zu bestimmen. Dies ist eine Folge davon, dass für jede beliebige Kombination von drei distinkten Punkten, (z_1, z_2, z_3), eine Möbiustransformation $f(z)$ existiert, die diese drei Punkte auf $(0,1,-1)$ abbildet. [Entsprechend bildet dann die Möbiustransformation $\bar f(\bar z)$ die drei Punkte $(\bar z_1, \bar z_2, \bar z_3)$ auch auf $(0,1,-1)$ ab.] Die Funktion $f(z)$ ist einfach durch

$$f(z) = \frac{(z-z_1)\,(z_2-z_3)}{(z_2-z_1)(z-z_3) + (z_3-z_1)(z-z_2)} \tag{4.1.13}$$

gegeben. Nach Konstruktion ist $f(z_1) = 0$, $f(z_2) = 1$ und $f(z_3) = -1$. Man rechnet leicht nach, dass

$$f'(z) = -2\frac{(z_2-z_3)\,(z_1-z_3)\,(z_1-z_2)}{\Big((z_2-z_1)(z-z_3) + (z_3-z_1)(z-z_2)\Big)^2}\,. \tag{4.1.14}$$

Zur Berechnung der Struktur der Dreipunktfunktion müssen wir ferner ausrechnen

$$\begin{aligned}
f'(z_1) &= -\frac{1}{2}\,\frac{(z_2-z_3)\,(z_1-z_3)\,(z_1-z_2)}{(z_1-z_2)^2\,(z_1-z_3)^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{(z_2-z_3)}{(z_1-z_2)\,(z_1-z_3)} \\
f'(z_2) &= -2\,\frac{(z_2-z_3)\,(z_1-z_3)\,(z_1-z_2)}{(z_1-z_2)^2\,(z_2-z_3)^2} = -2\,\frac{(z_1-z_3)}{(z_1-z_2)\,(z_2-z_3)} \\
f'(z_3) &= -2\,\frac{(z_2-z_3)\,(z_1-z_3)\,(z_1-z_2)}{(z_1-z_3)^2\,(z_2-z_3)^2} = -2\,\frac{(z_1-z_2)}{(z_1-z_3)\,(z_2-z_3)}\,.
\end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned}
F(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2,z_3,\bar z_3) &\equiv \langle \psi_1(z_1,\bar z_1)\,\psi_2(z_2,\bar z_2)\,\psi_3(z_3,\bar z_3)\,\rangle \\
&= |f'(z_1)|^{2h_1}\,|f'(z_2)|^{2h_2}\,|f'(z_3)|^{2h_3}\,\langle\psi_1(0,0)\,\psi_2(1,1)\,\psi_3(-1,-1)\rangle \\
&= C\left|\frac{(z_2-z_3)}{(z_1-z_2)\,(z_1-z_3)}\right|^{2h_1}\left|\frac{(z_1-z_3)}{(z_1-z_2)\,(z_2-z_3)}\right|^{2h_2} \\
&\qquad\times\left|\frac{(z_1-z_2)}{(z_1-z_3)\,(z_2-z_3)}\right|^{2h_3} \\
&= C\,|z_1-z_2|^{2(h_3-h_1-h_2)}\,|z_1-z_3|^{2(h_2-h_1-h_3)}\,|z_2-z_3|^{2(h_1-h_2-h_3)}
\end{aligned}$$

folgt dann:

> Die Dreipunktfunktion dreier konformen Primärfelder ψ_1, ψ_2 und ψ_3 ist von der Form
>
> $$\langle\psi_1(z_1,\bar z_1)\,\psi_2(z_2,\bar z_2)\,\psi_2(z_3,\bar z_3)\,\rangle = C\prod_{(ij)}|z_i-z_j|^{2(h_k-h_i-h_j)}\,, \qquad (4.1.15)$$
>
> wobei C eine Konstante ist, und sich das Produkt über alle ungeordneten Paare $i\neq j$ erstreckt und $k\neq i$, $k\neq j$.

Die Vierpunktfunktion ist durch die konforme Symmetrie nicht mehr direkt bestimmt. Da man jedoch mittels einer Möbiustransformation drei beliebige Punkte auf drei gegebene Punkte abbilden kann, hängt die Vierpunktfunktion (abgesehen von einem universellen Vorfaktor) nur von einer Variablen ab, nämlich von dem unter Möbiustransformationen invarianten 'cross ratio'

$$x = \frac{(z_1-z_2)\,(z_3-z_4)}{(z_1-z_3)\,(z_2-z_4)}\,. \qquad (4.1.16)$$

Es ist offensichtlich, dass x unter Translationen und Dilatationen invariant ist, und man rechnet leicht nach, dass x auch unter der Inversion $z_i\mapsto 1/z_i$ in sich selbst übergeht. Da diese Transformationen die ganze Möbiusgruppe erzeugen, zeigt dies, dass x unter der gesamten Möbiusgruppe invariant ist. Übrigens ist x die einzige Invariante: zum Beispiel ist

$$\frac{(z_1-z_4)\,(z_2-z_3)}{(z_1-z_3)\,(z_2-z_4)} = 1-x\,, \qquad (4.1.17)$$

und entsprechend für die anderen möglichen Kombinationen. [Es gibt sechs verschiedene 'cross ratios', und diese entsprechen gerade den sechs verschiedenen Kombinationen

$$x\,,\quad 1-x\,,\quad \frac{1}{x}\,,\quad \frac{1-x}{x}\,,\quad \frac{1}{1-x}\,,\quad \frac{x}{1-x}\,.] \qquad (4.1.18)$$

Eine entsprechend Analyse kann für beliebige n-Punktfunktionen durchgeführt werden, und man kann beweisen, dass jede n-Punktfunktion von primären konformen Feldern (abgesehen von einem universellen Vorfaktor) nur von $n-3$ 'cross ratios' abhängt (**Übungsaufgabe**).

4.2 Chirale Felder

Lass uns annehmen, wir haetten eine konforme Feldtheorie. Diese kann durch eine Lagrange Dichte definiert sein, oder auch nicht; für das weitere spielt es keine Rolle, wie diese Theorie genau gegeben ist. Wir wollen lediglich annehmen, dass wir ihre Korrelationsfunktionen (d.h. ihre Vakuumerwartungswerte), zumindest im Prinzip, bestimment können.

Die Theorie wird typischerweise besondere Felder ϕ enthalten, deren Korrelationsfunktion

$$\langle \phi(z,\bar{z})\, \phi_1(z_1,\bar{z}_1) \cdots \phi_n(z_n,\bar{z}_n) \rangle \,, \tag{4.2.1}$$

wobei ϕ_i beliebige Felder sind, nur von z, nicht aber von $\bar{z}$ abhängen. Diese Felder werden *chiral* genannt. Entsprechend nennt man Felder, die in beliebigen Korrelationsfunktionen von z unabhängig sind (und nur von $\bar{z}$ abhängen), *anti-chiral*. Natürlich ist die Analyse der chiralen Felder zu der der anti-chiralen Felder völlig identisch.

Wie wir später sehen werden, definiert die Operator Produkt Entwicklung der chiralen Felder eine Algebrastruktur auf dem Raum der chiralen Felder. Diese Algebra wir Vertex Operator Algebra genannt. Entsprechendes gilt auch für die anti-chiralen Felder. Beliebige Felder der Theorie transformieren sich dann in Darstellungen der beiden Vertex Operator Algebren. In dieser Weise kann die gesammten Theorie vermittels der Darstellungstheorie der Vertex Operator Algebren in geschickter Weise organisiert werden.

Zunächst wollen wir die Struktur der chiralen Felder beschreiben. Es ist üblich, chirale Felder statt als $\psi(z)$ als $V(\psi,z)$ zu bezeichnen; $V(\psi,z)$ wird dann oft auch als *Vertex Operator* bezeichnet. Falls ψ ein primäres chirales Feld ist, dann hat $V(\psi,z)$ die Transformationseigenschaft

$$V(\psi,z) \mapsto \Big(f'(z)\Big)^h V\left(\psi, f(z)\right) . \tag{4.2.2}$$

[Falls diese Transformationseigenschaft nur für die Untergruppe gilt, die durch Translationen, Rotationen, Dilatationen und speziellen konformen Transformationen erzeugt wird, dann nennt man ψ *quasiprimär*.] Sei $f(z) = e^{i\theta} z$ eine 'Rotation' um den Winkel θ. Die obige Formel impliziert, dass unter einer Rotation um 2π, das Feld $V(\psi,z)$ sich gerade um die Phase $\exp(2\pi i h)$ ändert. Falls das Feld ein Boson ist, muss daher $h \in \mathbb{Z}$ sein; für Fermionen muss umgekehrt $h \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ gelten. Im folgenden wollen wir uns auf Bosonen beschränken, obgleich das meiste auch (mit kleinen Änderungen) für Fermionen gilt. Bosonische Felder sollten auf der komplexen Ebene definiert sein, und daher können wir sie als Laurentreihe

$$V(\psi,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_n(\psi)\, z^{-n-h} \tag{4.2.3}$$

schreiben. Wie wir in Kapitel 3.3.1 gezeigt haben, transformiert sich ein chirales Primärfeld unter der lokalen konformen Transformation $z \mapsto z + \epsilon z^{n+1}$ als

$$V(\psi,z) \mapsto V(\psi,z) + \epsilon \left[z^{n+1}\partial_z + h(n+1)z^n\right] V(\psi,z) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \,. \tag{4.2.4}$$

Der Kommutator von L_n mit $V(\psi,z)$ sollte daher

$$[L_m, V(\psi,z)] = \left[z^{m+1}\partial_z + h(m+1)z^m\right] V(\psi,z) \tag{4.2.5}$$

sein. Mit Hilfe von (4.2.3) können wir beide Seiten als Potenzreihe entwickeln

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{-n-h}\,[L_m, V_n(\psi)] &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} z^{m-l-h}\,V_l(\psi)\left[(-l-h)+(m+1)\,h\right] \\ &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} z^{m-l-h}\,V_l(\psi)\left[m\,h-l\right] \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{-n-h}\,V_{n+m}(\psi)\left[m\,(h-1)-n\right], \end{aligned}\tag{4.2.6}$$

wobei wir in der letzten Zeile die Substitution $l = m+n$ durchgeführt haben. Durch Vergleich der Koeffizienten folgt

$$[L_m, V_n(\psi)] = \Big(m\,(h-1)-n\Big)\,V_{n+m}(\psi)\,. \tag{4.2.7}$$

Für Primärfelder gilt diese Relation für alle m; falls ψ nur quasi-primär ist, gilt (4.2.7) nur für $m = 0, \pm 1$.

Für die Generatoren $L_{\pm 1}$ und L_0, die die Lie Algebra der Möbiusgruppe aufspannen, können wir diese infinitesimalen Transformationen zu Gruppentransformationen aufintegrieren. Wie wir in Kapitel 2.5.2 gezeigt haben, kann man der Möbiustransformation

$$f(z) = \frac{a\,z+b}{c\,z+d} \tag{4.2.8}$$

das Gruppenelement

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,C) \tag{4.2.9}$$

zuordenen. Ferner können wir diese Matrix als

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b/d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c/d & 1 \end{pmatrix} \tag{4.2.10}$$

schreiben, wobei wir benützt haben, dass $ad - bc = 1$ und daher $(1+bc)/d = a$. Diese Matrizen entsprechen gerade den Exponentialen von L_{-1}, L_0 und L_1 (siehe Kapitel 2.5.2), und daher haben wir die allgemeine Transformationsgleichung

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{b}{d}\,L_{-1}\right)\left(\frac{1}{d}\right)^{2L_0}\exp\left(-\frac{c}{d}\,L_1\right)\; V(\psi,z)\;\exp\left(\frac{c}{d}\,L_1\right)\left(\frac{1}{d}\right)^{-2L_0}\exp\left(-\frac{b}{d}\,L_{-1}\right) \\ = \left(\frac{1}{(cz+d)^2}\right)^h V\left(\psi, \frac{az+b}{cz+d}\right), \end{aligned}\tag{4.2.11}$$

wobei ψ ein chirales (quasi-)primäres Feld mit konformen Gewicht h ist. Mit Hilfe der Vertauschungsrelationen (4.2.7) kann man das auch direkt nachprüfen (**Übungsaufgabe**).

4.2.1 Meromorphe konforme Feldtheorie

Da die chiralen (primären) Felder nur von z, nicht aber von $\bar{z}$ abhängen, gilt entsprechendes auch für ihre Korrelationsfunktionen. Diese sind daher *meromorphe* Funktionen ihrer Argumente, und man nennt die Theorie, die durch die chiralen Felder generiert wird, deshalb manchmal auch *meromorphe konforme Feldtheorie*. [Wir vertreten hier den Standpunkt, dass eine Theorie durch die Korrelationsfunktionen ihrer generierenden Felder definiert wird. Ob diese von einer Wirkung herstammen ist dabei nebensächlich. Dieser Gesichtspunkt wird später noch genauer diskutiert werden.]

Die Korrelationsfunktionen der chiralen Primärfelder sind durch die Möbiussymmetrie stark eingeschränkt. Zum Beispiel folgt (mit denselben Argumenten wie in Kapitel 4.1), dass die 1-Punktfunktion von $V(\psi, z)$ verschwindet, falls das konforme Gewicht h von ψ nicht null ist. Die 2-Punktfunktion ist gerade durch

$$\langle V(\psi_1, z_1)\, V(\psi_2, z_2)\rangle = \frac{C}{(z_1 - z_2)^{h_1+h_2}} \tag{4.2.12}$$

gegeben, wobei $C \neq 0$ nur möglich ist, falls $h_1 = h_2$. Weiterhin hängen die n-Punktfunktionen (abgesehen von einem universellen Vorfaktor) nur von $n-3$ 'cross ratios' ab. Insbesondere kann man daraus sehen, dass die Korrelationsfunktionen der Felder $V(\psi_i, z)$

$$\langle V(\psi_1, z_1) \cdots V(\psi_n, z_n)\rangle \tag{4.2.13}$$

meromorphe Funktionen in z_i definieren, deren Pole bei $z_i = z_j$ für $i \neq j$ oder bei $z_i = \infty$ liegen. Es folgt daher, dass

$$V(\psi, z)\, \Omega\,, \tag{4.2.14}$$

wobei Ω der Vakuumszustand ist, keine Pole in z (in der komplexen Ebene) besitzt. Wegen der Modenentwicklung (4.2.3)

$$V(\psi, z)\, \Omega = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{-n-h}\, V_n(\psi)\, \Omega \tag{4.2.15}$$

gilt dann

$$V_n(\psi)\, \Omega = 0 \qquad \text{für } n \geq 1-h. \tag{4.2.16}$$

Zunächst gilt diese Eigenschaft nur für Primärfelder, aber es ist nicht schwierig zu sehen, dass das gleiche auch für alle Felder gelten muss, die aus Produkten von Primärfeldern erzeugt werden können. Wir postulieren daher, dass diese Formel ganz allgemein für alle chiralen Felder gilt.

Wir können jedem Feld der Theorie einen Zustand zuordnen. Diese Identifikation wird einfach dadurch definiert, dass man das entsprechende Feld, an einem bestimmten Punkt ausgewertet, auf das Vakuum anwendet. Es ist bequem diesen speziellen Punkt als $z = 0$ zu wählen; d.h. wir definieren

$$\psi \equiv V(\psi, 0)\, \Omega\,. \tag{4.2.17}$$

Wegen der Modenentwicklung (4.2.3) gilt dann

$$\psi = V_{-h}(\psi)\,\Omega\,. \tag{4.2.18}$$

Falls ψ ein Primärfeld ist, folgt weiterhin aus (4.2.7), dass

$$L_0\psi = [L_0, V_{-h}(\psi)]\,\Omega = h\,V_{-h}(\psi)\,\Omega = h\,\psi\,, \tag{4.2.19}$$

d.h. das konforme Gewicht des Feldes $V(\psi, z)$ ist gerade der L_0-Eigenwert des zugehörigen Zustandes. In der 'radialen Quantisierung', die wir hier immer implizit verwendet haben, ist die Zeitrichtung gerade die radiale Richtung, und der Hamilton Operator kann daher mit L_0 identifiziert werden. In einer unitären Theorie sollte daher das Spektrum von L_0 positiv semi-definit sein. Insbesondere bedeutet das dann, dass alle konformen Gewichte einer unitären konformen Feldtheorie nicht negativ sein dürfen. Weiterhin ist es natürlich anzunehmen, dass der Vakuumzustand der einzige Zustand mit L_0-Eigenwert $L_0\,\Omega = 0$ ist. [Wie wir später sehen werden ist diese letzte Eigenschaft im wesentlichen zu der 'Clustereigenschaft' äquivalent. Diese besagt, dass im Limes, in der die ersten n und die letzten m Felder einer $(n+m)$-Punktfunktion sich zu zwei weit voneinander entfernten 'clustern' zusammenscharen, diese Funktion gerade das Produkt der n-Punktfunktion und der m-Punktfunktion wird.] Im folgenden werden wir (wenn nicht anders bemerkt) diese beiden Eigenschaften annehmen:

$$L_0\,\psi = h\,\psi \quad \Longrightarrow \quad h > 0 \qquad \text{oder} \qquad h = 0 \text{ und } \psi = \lambda\,\Omega. \tag{4.2.20}$$

Jede chirale konforme Feldtheorie enthält zumindest ein Feld, nämlich die chirale T^{--} Komponente des Energie-Impuls-Tensors. Wie wir in den Beispielen von Kapitel 3 gesehen haben, haben wir die Entwicklung

$$L(z) \equiv V(L, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n\, z^{-n-2}\,, \tag{4.2.21}$$

die suggeriert, dass dieses Feld konforme Dimension $h = 2$ hat. Dies ist konsistent damit (siehe (4.2.16)), dass $L_{-1}\,\Omega = L_0\,\Omega = 0$ und ferner damit, dass

$$L_0\, L_{-2}\,\Omega = [L_0, L_{-2}]\,\Omega = 2L_{-2}\,\Omega\,. \tag{4.2.22}$$

Das Virasorofeld $L(z)$ ist jedoch *kein* primäres Feld, da die Virasoro Algebra

$$[L_m, L_n] = (m-n)\,L_{m+n} + \frac{c}{12}\,m\,(m^2-1)\delta_{m,-n} \tag{4.2.23}$$

wegen des zentralen Terms nicht mit (4.2.7) übereinstimmt. Das Virasorofeld ist jedoch *quasi-primär*, da seine Moden (4.2.7) für $m = 0, \pm 1$ erfüllen.

Falls $V(\psi, z)$ ein Primärfeld ist, dann gilt für $n \geq 1$

$$\begin{aligned} L_n\psi &= L_n V_{-h}(\psi)\,\Omega \\ &= [L_n, V_{-h}(\psi)]\,\Omega \\ &= (n(h-1)+h)V_{n-h}(\psi)\,\Omega = 0\,, \end{aligned} \tag{4.2.24}$$

wobei wir ausgnützt haben, dass wegen (4.2.22) $L_n\Omega = 0$ für $n \geq 1$ [wegen der Virasoro Algebra gilt $L_0 L_n \Omega = [L_0, L_n]\Omega = -nL_n\Omega$, und daher wäre der Zustand $L_n\Omega$ ein L_0-Eigenvektor mit negativem L_0-Eigenwert], sowie (4.2.16). Primärfelder sind also dadurch ausgezeichnet, dass die zugehörigne Zustände von L_n mit $n \geq 1$ vernichtet werden. Für quasi-primäre Felder kann das gleiche Argument nur für L_1 durchgeführt werden; die zugehörigen Zustände werden daher im allgemeinen nur von L_1 vernichtet.

Der Vakuumzustand wird von L_{-1} vernichtet (da er translationsinvariant ist), und daher folgt aus (4.2.11), dass

$$\begin{aligned} V(\psi, z)\,\Omega &= e^{zL_{-1}}\, V(\psi, 0)\, e^{-zL_{-1}}\,\Omega \\ &= e^{zL_{-1}}\, V(\psi, 0)\,\Omega \\ &= e^{zL_{-1}}\,\psi\,. \end{aligned} \tag{4.2.25}$$

Wiederum gilt diese Formel zunächst nur für Primärfelder, da wir (4.2.11) benützt haben. Da jedoch alle chiralen Korrelationsfunktionen translationsinvariant sind, gilt

$$e^{\zeta L_{-1}}\, V(\psi, z)\, e^{-\zeta L_{-1}} = V(\psi, z+\zeta) \tag{4.2.26}$$

generell für jedes chirale konforme Feld ψ. Daher gilt dann auch (4.2.25) im allgemeinen.

In einer *lokalen* Feldtheorie sind die Korrelationsfunktionen unabhängig von der Ordnung, in der die Felder in der Korrelationsfunktion auftreten, d.h.

$$\begin{aligned} &\langle\, V(\psi_1, z_1)\cdots V(\psi_{l-1}, z_{l-1})\, V(\psi_l, z_l)\, V(\psi_{l+1}, z_{l+1})\, V(\psi_{l+2}, z_{l+2})\cdots V(\psi_n, z_n)\,\rangle \\ &\quad = \langle\, V(\psi_1, z_1)\cdots V(\psi_{l-1}, z_{l-1})\, V(\psi_{l+1}, z_{l+1})\, V(\psi_l, z_l)\, V(\psi_{l+2}, z_{l+2})\cdots V(\psi_n, z_n)\,\rangle\,. \end{aligned}$$

Als Operatoridentität bedeutet das, dass

$$V(\psi, z)\, V(\phi, \zeta) = V(\phi, \zeta)\, V(\psi, z)\,, \qquad z \neq \zeta\,. \tag{4.2.27}$$

4.2.2 Das Eindeutigkeitstheorem

Jedes konforme Feld ist durch die beiden Eigenschaften (4.2.25) und (4.2.27) *eindeutig* charakterisiert: dies ist der Inhalt des Eindeutigkeitstheorems, das zuerst von Goddard in diesem Kontext formuliert wurde.

Eindeutigkeitstheorem: Sei $U_\phi(z)$ ein Operator mit den Eigenschaften

$$U_\phi(z)\,\Omega = e^{zL_{-1}}\,\phi\,, \qquad U_\phi(z)\, V(\psi, \zeta) = V(\psi, \zeta)\, U_\phi(z)\,, \tag{4.2.28}$$

für alle chiralen Felder $V(\psi, \zeta)$ einer meromorphen konformen Feldtheorie. Dann gilt

$$U_\phi(z) = V(\phi, z)\,. \tag{4.2.29}$$

Beweis: Sei ψ ein beliebiger Zustand der meromorphen konformen Feldtheorie. Dann gilt

$$\begin{aligned} U_\phi(z)\,\psi &= U_\phi(z)\,V(\psi,0)\,\Omega \\ &= V(\psi,0)\,U_\phi(z)\,\Omega \\ &= V(\psi,0)\,e^{zL_{-1}}\,\phi \\ &= V(\psi,0)\,V(\phi,z)\,\Omega \\ &= V(\phi,z)\,V(\psi,0)\,\Omega \\ &= V(\phi,z)\,\psi\,. \end{aligned} \tag{4.2.30}$$

Da $U_\phi(z)$ und $V(\phi,z)$ auf jedem Zustand der Theorie übereinstimmen, definieren sie denselben Operator. Dies beweist (4.2.29).

Diese relativ einfache Beobachtung hat in der Tat weitreichende Folgen. Als kleine Anwendung wollen wir mit ihrer Hilfe die Möbiustransformationsformel (4.2.11) beweisen. Da beide Operatoren lokal sind, genügt es, die Identität auf dem Vakuum zu beweisen. Da Ω von L_0 und $L_{\pm1}$ vernichtet wird, ist die linke Seite von (4.2.11) auf dem Vakuum gerade

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{b}{d}\,L_{-1}\right) & \left(\frac{1}{d}\right)^{2L_0} \exp\left(-\frac{c}{d}\,L_1\right) V(\psi,z)\,\Omega \\ &= \exp\left(\frac{b}{d}\,L_{-1}\right) \left(\frac{1}{d}\right)^{2L_0} \exp\left(-\frac{c}{d}\,L_1\right) \exp(zL_{-1})\,\psi \\ &= \exp\left(\frac{az+b}{cz+d}\,L_{-1}\right) \left(\frac{1}{cz+d}\right)^{2L_0} \exp\left(-\frac{c}{cz+d}\,L_1\right)\,\psi\,, \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Zeile die einfache Matrixidentität

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & az+b \\ c & cz+d \end{pmatrix} \tag{4.2.31}$$

benützt haben. Da ψ quasi-primär ist, gilt $L_1\psi = 0$, und das letzte Exponential wirkt trivial. Ferner stimmt der L_0 Eigenwert gerade mit dem konformen Gewicht überein, und wir erhalten deshalb gerade

$$\exp\left(\frac{az+b}{cz+d}\,L_{-1}\right) \left(\frac{1}{cz+d}\right)^{2h}\,\psi\,, \tag{4.2.32}$$

was dann gerade mit der rechten Seite von (4.2.11), auf das Vakuum angewendet, übereinstimmt.

Insbesondere erlaubt das Eindeutigkeitstheorem, die folgende Dualitätsformel abzuleiten, die für die Operatorproduktentwicklung (die wir in Kürze diskutieren werden) von zentraler Bedeutung ist: seien ψ und ϕ zwei chirale konforme Felder, dann gilt

$$V(\psi,z)\,V(\phi,\zeta) = V\Big(V(\psi,z-\zeta)\,\phi,\zeta\Big)\,. \tag{4.2.33}$$

Der Beweis ist wiederum relativ einfach. Wegen des Eindeutigkeitstheorems genügt es, die obige Identität auf dem Vakuum auszurechnen (da beide Seiten lokal sind, und daher (4.2.27) erfüllen). Da $V(\phi,\zeta)$ (4.2.25) erfüllt, gilt dann

$$\begin{aligned} V(\psi,z)\,V(\phi,\zeta)\,\Omega &= V(\psi,z)\,e^{\zeta L_{-1}}\,\phi \\ &= e^{\zeta L_{-1}}\,V(\psi,z-\zeta)\,\phi \\ &= V\Big(V(\psi,z-\zeta)\,\phi,\zeta\Big)\,\Omega\,, \end{aligned} \tag{4.2.34}$$

wobei wir (4.2.26) benützt haben.

Wegen der Modenentwicklung (4.2.3) haben wir

$$V(\psi,z-\zeta)\,\phi = \sum_{l\le h_\phi}(z-\zeta)^{-l-h_\psi}\;V_l(\psi)\,\phi\,, \tag{4.2.35}$$

wobei wir benützt haben, dass $V_l(\psi)\phi = 0$ für $l > h_\phi$, da dieser Zustand sonst einen negativen L_0-Eigenwert hätte. Daher können wir (4.2.33) wie folgt schreiben:

$$V(\psi,z)\,V(\phi,\zeta) = \sum_{l\le h_\phi}(z-\zeta)^{-l-h_\psi}\;V\Big(V_l(\psi)\,\phi,\zeta\Big)\,. \tag{4.2.36}$$

Diese Formel ist für die Berechnung der algebraischen Eigenschaften der Vertexoperatoren von zentraler Bedeutung (wie wir bald sehen werden). Sie definiert in gewissem Sinn eine Art *Algebrastruktur* auf dem Raum der chiralen Felder (oder Zustände). Das resultierende mathematische Objekt wird *Vertex Operator Algebra* genannt; für die Entwicklung dieser mathematischen Theorie (und ihrer Anwendung auf den sogenannten 'Monstrous Moonshine') erhielt Richard Borcherds vor ein paar Jahren die 'Fields Medaille'.

4.3 Eine axiomatische Beschreibung

Die beiden konformen Feldtheorien, die wir bisher im Detail besprochen haben (nämlich die freie Bosonen- und Fermionentheorie) waren durch eine Lagrange Dichte definiert, die konform invariant war. Viele konforme Feldtheorien von Interesse haben nicht notwendigerweise eine solche Beschreibung. Sie werden im allgemeinen durch ihre Korrelationsfunktionen definiert.

Wir wollen nun in ein wenig Detail erklären, wie man eine meromorphe konforme Feldtheorie vermittels ihrer Korrelationsfunktionen definieren kann. Im folgenden wollen wir dann einige Beispiele konkret beschreiben.

Sei V ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum. (In den Beispielen wird V ein geeigneter Unterraum der (quasi)-primären Chiralfelder sein.) Wir nehmen an, dass man V als direkte Summe von Unterräumen V_h schreiben kann, $V = \bigoplus_h V_h$, wobei $h \in \mathbb{Z}$. Falls $\psi \in V_h$ sagen wir, dass ψ konformes Gewicht h hat.

Wir nehmen weiterhin an, dass für jede positive Zahl n, und jede endliche Kollektion von Vektoren $\psi_i \in V_{h_i}$, und $z_i \in \mathbb{C}$, wobei $i = 1 \ldots, n$, die 'Amplituden'

$$f(\psi_1, \ldots, \psi_n; z_1, \ldots, z_n) \equiv \langle V(\psi_1, z_1) V(\psi_2, z_2) \cdots V(\psi_n, z_n) \rangle \tag{4.3.1}$$

definiert sind. Die Notation $\langle V(\psi_1, z_1) V(\psi_2, z_2) \cdots V(\psi_n, z_n) \rangle$ ist zu diesem Zeitpunkt lediglich suggestiv; wir nehmen nicht an, dass diese Funktionen als Vakuumerwartungswerte von Vertexoperatoren definiert sind.
Die Funktionen f müssen die folgenden Eigenschaften besitzen:

(i) Die Amplituden sind multi-linear in den ψ_i, und invariant unter dem Austausch von (ψ_i, z_i) mit (ψ_j, z_j). Wegen der Unabhängigkeit von der Ordnung schreiben wir

$$f(\psi_1, \ldots, \psi_n; z_1, \ldots, z_n) = \left\langle \prod_{j=1}^{n} V(\psi_j, z_j) \right\rangle . \tag{4.3.2}$$

(ii) Die Amplituden sind analytisch in den z_i, abgesehen von möglichen Polen endlicher Ordnung bei $z_i = z_j$ für $i \neq j$.

(iii) Die Amplituden sind Möbius-invariant: für jede Möbiustransformation $\gamma(z)$ gilt

$$\left\langle \prod_{j=1}^{n} V(\psi_j, z_j) \right\rangle = \left\langle \prod_{j=1}^{n} V(\psi_j, \gamma(z_j)) \right\rangle \prod_{j=1}^{n} (\gamma'(z_j))^{h_j} . \tag{4.3.3}$$

(iv) Die Amplituden erfüllen die 'Cluster-Eigenschaft':

$$\lambda^{\Sigma h_j} \left\langle \prod_i V(\phi_i, \zeta_i) \prod_j V(\psi_j, \lambda z_j) \right\rangle \sim \left\langle \prod_i V(\phi_i, \zeta_i) \right\rangle \left\langle \prod_j V(\psi_j, z_j) \right\rangle \quad \text{für } \lambda \to 0 , \tag{4.3.4}$$

wobei $\phi_i \in V_{h'_i}, \psi_j \in V_{h_j}$. Wegen der Möbiuskovarianz ist diese Bedingung äquivalent zu

$$\lambda^{\Sigma h'_i} \left\langle \prod_i V(\phi_i, \lambda \zeta_i) \prod_j V(\psi_j, z_j) \right\rangle \sim \left\langle \prod_i V(\phi_i, \zeta_i) \right\rangle \left\langle \prod_j V(\psi_j, z_j) \right\rangle \quad \text{für} \lambda \to \infty . \tag{4.3.5}$$

(v) Die Theorie ist konform invariant: es existiert $L \in V_2$, so dass $V = L\mathbb{C} \oplus V'$ und

$$\begin{aligned} \langle L(w) \prod_{j=1}^{m} L(w_j) \prod_{i=1}^{n} V(\psi_i, z_i) \rangle &= \sum_{k=1}^{m} \frac{2}{(w - w_k)^2} \langle \prod_{j=1}^{m} L(w_j) \prod_{i=1}^{n} V(\psi_i, z_i) \rangle \\ &+ \sum_{l=1}^{n} \frac{h_l}{(w - z_l)^2} \langle \prod_{j=1}^{m} L(w_j) \prod_{i=1}^{n} V(\psi_i, z_i) \rangle \\ &+ \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(w - w_k)} \frac{d}{dw_k} \langle \prod_{j=1}^{m} L(w_j) \prod_{i=1}^{n} V(\psi_i, z_i) \rangle \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{(w-z_l)} \frac{d}{dz_l} \langle \prod_{j=1}^{m} L(w_j) \prod_{i=1}^{n} V(\psi_i, z_i) \rangle \\
&+ \sum_{k=1}^{m} \frac{c/2}{(w-w_k)^4} \langle \prod_{j \neq k} L(w_j) \prod_{i=1}^{n} V(\psi_i, z_i) \rangle \,,
\end{aligned}
$$

wobei $\psi_i \in V'$ konformes Gewicht h_i hat. Die Zahl c nennt man die zentrale Ladung der meromorphen konformen Feldtheorie.

4.3.1 Der Zustandsraum

Wir wollen nun skizzieren, wie man aus dieser Menge von 'Amplituden' eine meromorphe konforme Feldtheorie im obigen Sinn rekonstruieren kann. Zunächst bemerken wir, dass, falls alle Amplituden, die ein gegebenes $\psi \in V$ involvieren, verschwinden, wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\psi = 0$ setzen können. [Dies ist keine Annahme, da wir in diesem Fall den Vektorraum V durch den entsprechenden Quotientenraum ersetzen können.]

Um den Raum der Zustände zu konstruieren, machen wir nun die folgende Konstruktion. Sei $\mathcal{C}$ eine Teilmenge der Riemannschen Zahlenkugel P. Zunächst definieren wir $\mathcal{B}_{\mathcal{C}}$, deren Elemente durch endliche Kollektionen von $\psi_i \in V_{h_i}$, $z_i \in \mathcal{C} \subset \mathsf{P}$, $i = 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$ and $z_i \neq z_j$ if $i \neq j$ beschrieben werden; ein typisches Element $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{B}_{\mathcal{C}}$ schreiben wir als

$$
\boldsymbol{\psi} = V(\psi_1, z_1) V(\psi_2, z_2) \cdots V(\psi_n, z_n) \Omega \equiv \prod_{i=1}^{n} V(\psi_i, z_i) \Omega \,. \tag{4.3.6}
$$

Wir identifizieren $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{B}_{\mathcal{C}}$ mit den anderen Elementen von $\mathcal{B}_{\mathcal{C}}$, die durch das Ersetzen von ψ_j in (4.3.6) durch $\mu_j \psi_j$, $1 \leq j \leq n$ mit $\mu_j \in \mathbb{C}$ und $\prod_{j=1}^{n} \mu_j = 1$ hervorgehen.

Dann definieren wir den freien komplexen Vektorraum auf $\mathcal{B}_{\mathcal{C}}$, d.h. den komplexen Vekotrraum mit Basis $\mathcal{B}_{\mathcal{C}}$. Dieser Vektorraum besteht aus formalen endlichen Linearkombinationen $\Psi = \sum_j \lambda_j \boldsymbol{\psi}_j$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $\boldsymbol{\psi}_j \in \mathcal{B}_{\mathcal{C}}$; wir bezeichnen diesen Vektorraum als $\mathcal{V}_{\mathcal{C}}$. Um eine Topologie auf diesem Vektorraum einzuführen, betrachten wir dann eine offene Teilmenge $\mathcal{O} \subset \mathsf{P}$, so dass $\mathcal{C} \cap \mathcal{O} = \{\}$. Sei

$$
\boldsymbol{\phi} = V(\phi_1, \zeta_1) V(\phi_2, \zeta_2) \cdots V(\phi_m, \zeta_m) \Omega \in \mathcal{B}_{\mathcal{O}} \,, \tag{4.3.7}
$$

wobei $\phi_j \in V_{k_j}$, $j = 1, \ldots, m$. Jedes $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{B}_{\mathcal{O}}$ definiert eine Abbildung auf $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{B}_{\mathcal{C}}$ durch

$$
\eta_{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{\psi}) = (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi}) = \left\langle \prod_{i=1}^{m} V(\phi_i, \zeta_i) \prod_{j=1}^{n} V(\psi_j, z_j) \right\rangle \,. \tag{4.3.8}
$$

Für jedes $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{B}_{\mathcal{O}}$, kann $\eta_{\boldsymbol{\phi}}$ wegen der Linearität der Amplituden zu einer Abbildung $\mathcal{V}_{\mathcal{C}} \to \mathbb{C}$ definiert werden. Wir benützen diese linearen Funktionale um eine Topologie auf $\mathcal{V}_{\mathcal{C}}$ zu definieren. Damit der resultierende Vektorraum vollständig ist, betrachten wir nun Folgen von Elementen in $\mathcal{V}_{\mathcal{C}}$, die in einem geeignetem Sinn konvergieren. Sei also

$\widetilde{\mathcal{V}}_{\mathcal{C}}$ der Raum der Folgen $\boldsymbol{\Psi} = (\Psi_1, \Psi_2, \ldots)$, $\Psi_j \in \mathcal{V}_{\mathcal{C}}$. Wir betrachten den Unterraum von Folgen $\widetilde{\mathcal{V}}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{O}}$, die dadurch charakterisiert sind, dass $\eta_{\boldsymbol{\phi}}(\Psi_j)$ für jedes $\boldsymbol{\phi}$ der Form

$$\{\boldsymbol{\phi} = V(\phi_1, \zeta_1)V(\phi_2, \zeta_2)\cdots V(\phi_m, \zeta_m)\Omega : \zeta_j \in K, |\zeta_i - \zeta_j| \geq \epsilon, i \neq j\} \tag{4.3.9}$$

konvergiert, wobei für jede Kollektion der ϕ_j, $\epsilon > 0$ und jeder kompakten Untermenge $K \subset \mathcal{O}$, die Konvergenz in dem kompakten Raum

$$\{(\zeta_1, \ldots, \zeta_m) : \zeta_j \in K, |\zeta_i - \zeta_j| \geq \epsilon, i \neq j\} \tag{4.3.10}$$

uniform ist. Falls $\boldsymbol{\Psi} \in \widetilde{\mathcal{V}}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{O}}$, definiert der Limes

$$\lim_{j\to\infty} \eta_{\boldsymbol{\phi}}(\Psi_j) \tag{4.3.11}$$

notwendigerweise eine analytische Funktion der ζ_j, für $\zeta_j \in \mathcal{O}$, die höchstens Pole bei $\zeta_i = \zeta_j$, $i \neq j$ besitzt. (Der Umstand, dass diese wiederum nur Pole sein können, folgt aus der Cluster Eigenschaft.) Diese Funktion wird als $\eta_{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{\Psi})$ bezeichnet.

Wir betrachten zwei solche Folgen $\boldsymbol{\Psi}^1 = (\Psi_i^1)$ and $\boldsymbol{\Psi}^2 = (\Psi_i^2)$ als äquivalent, falls

$$\lim_{j\to\infty} \eta_{\boldsymbol{\phi}}(\Psi_j^1) = \lim_{j\to\infty} \eta_{\boldsymbol{\phi}}(\Psi_j^2) \tag{4.3.12}$$

d.h. $\eta_{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{\Psi}^1) = \eta_{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{\Psi}^2)$, für jedes $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{B}_{\mathcal{O}}$. Der zugehörige Quotientenraum wird als $\mathcal{V}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{O}}$ bezeichnet. Dieser Raum hat eine natürliche Topologie: eine Folge $\chi_j \in \mathcal{V}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{O}}$, $j = 1, 2, \ldots$, ist konvergent, falls für jedes $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{B}_{\mathcal{O}}$, $\eta_{\boldsymbol{\phi}}(\chi_j)$ uniform auf allen kompakten Untermengen der Form (4.3.10) konvergiert. Der Limes

$$\lim_{j\to\infty} \eta_{\boldsymbol{\phi}}(\chi_j) \tag{4.3.13}$$

ist dann wiederum eine meromorphe Function der ζ_j. Bezüglich dieser Topologie ist $\mathcal{V}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{O}}$ dann vollständig, d.h. der Limes einer Cauchy-Folge von Elementen in $\mathcal{V}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{O}}$ ist wiederum in $\mathcal{V}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{O}}$. Im wesentlichen ist das eine Folge davon, dass diese Topologie durch eine abzählbare Familie von Halbnormen der Form

$$||\chi||_n = \max_{1\leq i\leq n} \max_{\zeta_{i_j}} |\eta_{\boldsymbol{\phi}_i}(\chi)| \tag{4.3.14}$$

erzeugt wird, wobei die ϕ_{i_j} in $\boldsymbol{\phi}_i$ aus einer endlichen Untermenge der abzählbaren Basis gewählt sind und die ζ_{i_j} in einer kompakten Menge der Form (4.3.10) liegen. Der Vektorraum $\mathcal{V}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{O}}$ ist daher ein Fréchetraum.

Ein zentrales Resultat dieses Zuganges ist, dass wegen der Analytizität der Amplituden der Raum $\mathcal{V}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{O}}$ nicht von $\mathcal{C}$ abhängt (solange das Komplement von $\mathcal{O}$ zusammenhängend ist); dies ist das Analog des sogenannten Reh-Schlieder Theorems. Im folgenden schreiben wir daher immer nur $\mathcal{V}^{\mathcal{O}}$. Nach Konstruktion liegt $\Omega \in \mathcal{V}^{\mathcal{O}}$ für alle $\mathcal{O}$; wir nennen Ω das Vakuum. Es ist weiter klar, dass die Räume $\mathcal{V}^{\mathcal{O}}$ eine partielle Ordnung haben: falls $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ dann ist

$$\mathcal{V}^{\mathcal{O}} \subset \mathcal{V}^{\mathcal{O}'} . \tag{4.3.15}$$

Die kanonische Injektion $i : \mathcal{V}^{\mathcal{O}} \to \mathcal{V}^{\mathcal{O}'}$ ist dicht.

4.3.2 Vertexoperatoren und der Fock-Raum

Als nächstest wollen wir Vertexoperatoren definieren, und zeigen, dass sie lokal sind. Das ist nun relativ einfach. Sei $z \in \mathcal{O}$ und $O' \subset \mathcal{O}$ mit $z \notin \mathcal{O}'$. Für jedes $\psi \in V$ definiert dann $V(\psi, z)$ natürlicherweise eine Abbildung

$$V(\psi, z) : \mathcal{V}^{\mathcal{O}} \to \mathcal{V}^{\mathcal{O}'} . \tag{4.3.16}$$

[Diese Abbildung ist zunächst auf $\mathcal{B}_{\mathcal{C}}$ mit $z \notin \mathcal{C}$ definiert; es ist leicht zu sehen, dass dies eine Abbildung auf $\mathcal{V}^{\mathcal{O}}$ induziert.] Da die Amplituden lokal sind (d.h. (i) erfüllen) gilt dann sofort

$$V(\psi, z)V(\phi, \zeta) = V(\phi, \zeta)V(\psi, z) . \tag{4.3.17}$$

Die Moden der Vertexoperatoren $V_n(\psi)$ können durch Kontourintegrale definiert werden; es ist dann leicht zu sehen, dass jede dieser Moden $\mathcal{V}^{\mathcal{O}}$ in sich abbildet. Wir können dann den *Fock-Raum der Theorie* $\mathcal{F}$ konstruieren, der durch die Wirkung der Moden $V_n(\psi)$ für $\psi \in V$ von dem Vakuumzustand Ω erzeugt wird. Der Fock-Raum ist ein dichter Unterraum aller $\mathcal{V}^{\mathcal{O}}$; man kann ihn daher in gewissem Sinn als den Raum der Zustände der meromorphen konformen Feldtheorie auffassen. Nach Konstruktion lässt sich $\mathcal{F}$ als direkte Summe von $\mathcal{F} = \bigoplus_h \mathcal{F}_h$ schreiben, wobei $L_0\psi = h\psi$ falls $\psi \in \mathcal{F}_h$. Die Konzepte, die zunächst nur für V definiert sind, lassen sich relativ leicht auf $\mathcal{F}$ verallgemeinern; zum Beispiel, kann man zu jedem Element von $\phi \in \mathcal{F}$ einen Vertexoperator $V(\phi, z)$ definieren, und die so definierten Vertexoperatoren sind lokal.

4.3.3 Möbiussymmetrie

Bisher haben wir nur die Eigenschaften (i) und (ii) benützt. Die Möbiussymmetrie impliziert, dass wir Operatoren

$$U(\gamma) : \mathcal{V}^{\mathcal{O}} \to \mathcal{V}^{\mathcal{O}_\gamma} \tag{4.3.18}$$

definieren können, wobei $\mathcal{O}_\gamma = \{\gamma(z) : z \in \mathcal{O}\}$. Wir können dann wie zuvor die infinitesimalen Generatoren $L_{\pm 1}$ und L_0 einführen, und diese erfüllen dann (4.2.25), etc. Mit Hilfe des Eindeutigkeitstheorems kann man dann weiterhin beweisen, dass sich jedes chirale Feld $\Psi \in \mathcal{F}_h$ wie folgt unter Möbiustransformationen transformiert:

$$\begin{aligned} e^{\lambda L_{-1}} V(\Psi, z) e^{-\lambda L_{-1}} &= V(\Psi, z + \lambda) \\ e^{\lambda L_0} V(\Psi, z) e^{-\lambda L_0} &= e^{\lambda h} V(\Psi, e^\lambda z) \\ e^{\lambda L_1} V(\Psi, z) e^{-\lambda L_1} &= (1 - \lambda z)^{-2h} V\left(\exp(\lambda(1 - \lambda z)L_1)\Psi, z/(1 - \lambda z)\right) . \end{aligned} \tag{4.3.19}$$

4.3.4 Die Clustereigenschaft

Die Clustereigenschaft impliziert, dass das Spektrum von L_0 nicht negativ ist, und dass der eindeutige Zustand mit $L_0 = 0$ das Vakuum ist. Der Beweis kann wie folgt skizziert werden. Definiere den Projektor

$$P_N = \frac{1}{2\pi i} \oint_0 u^{L_0 - N - 1} du, \qquad \text{für } N \in \mathbb{Z} . \tag{4.3.20}$$

Insbesondere gilt dann

$$P_N \prod_j V(\psi_j, z_j)\Omega = \frac{1}{2\pi i} \oint u^{h-N-1} V(\psi_j, uz_j)\Omega du\,, \tag{4.3.21}$$

wobei $h = \sum_j h_j$. Die P_n definieren Projektoren, da

$$\begin{aligned} P_N P_M &= \frac{1}{2\pi i} \oint du \frac{1}{2\pi i} \oint dv u^{L_0-N-1} v^{L_0-M-1} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint du \frac{1}{2\pi i} \oint dw w^{L_0-M-1} u^{M-N-1} \\ &= \delta_{N,M} P_M\,, \end{aligned} \tag{4.3.22}$$

wobei wir die Substitution $w = uv$ vorgenommen haben. Es gilt daher

$$P_N P_M = 0, \text{ falls } N \neq M, \qquad P_N^2 = P_N, \qquad \sum_N P_N = 1 \tag{4.3.23}$$

und die P_N projezieren auf die Eigenräume von L_0

$$L_0 P_N = N P_N\,. \tag{4.3.24}$$

Falls $N \leq 0$, gilt dann

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_i V(\phi_i, \zeta_i) P_N \prod_j V(\psi_j, z_j) \right\rangle &= \frac{1}{2\pi i} \oint_0 u^{\Sigma h_j - N-1} \left\langle \prod_i V(\phi_i, \zeta_i) \prod_j V(\psi_j, uz_j) \right\rangle du \\ &\sim \left\langle \prod_i V(\phi_i, \zeta_i) \right\rangle \left\langle \prod_j V(\psi_j, z_j) \right\rangle \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=\rho} u^{-N-1} du\,, \end{aligned}$$

was im Limes $\rho \to 0$ für $N < 0$ verschwindet, und für $N = 0$ gerade

$$P_0 \prod_j V(\psi_j, z_j)\Omega = \Omega \left\langle \prod_j V(\psi_j, z_j) \right\rangle\,, \tag{4.3.25}$$

ergibt. Es gilt daher $P_0\Psi = \Omega \langle \Psi \rangle$, und die Cluster Bedinung impliziert, dass das Spektrum von L_0 nicht-negativ ist, und dass das Vakuum der eindeutige Zustand mit $L_0 = 0$ ist.

Die Cluster Bedingung impliziert auch, dass der Fock-Raum $\mathcal{F}$ durch quasiprimäre Zustände und ihre L_{-1}-Nachkommen aufgespannt wird. Um dies genauer zu erklären, definiere

$$\mathcal{F}^Q := \{\psi \in \mathcal{F} : L_1\psi = 0\}\,. \tag{4.3.26}$$

Dann kann man zeigen, dass

$$\mathcal{F}_h = \bigoplus_{n=0}^{h} L_{-1}^{h-n} \mathcal{F}_n^Q\,, \tag{4.3.27}$$

wobei $\mathcal{F}^Q_n$ der Unterraum von $\mathcal{F}^Q$ ist, für den L_0 Eigenwert n hat. Zunächst beweist man, dass jedes $\psi \in \mathcal{F}_1$ quasiprimär ist: dazu betrachtet man die Amplitude

$$\langle V(\Psi, z)\rangle = (1-\lambda z)^{-2} \langle V\left(\Psi, z/(1-\lambda z)\right)\rangle + \frac{\lambda}{(1-\lambda z)} \langle V\left(L_1\Psi, z/(1-\lambda z)\right)\rangle \,. \quad (4.3.28)$$

Unter Benützung der ersten beiden Zeilen von (4.3.19) kann man zeigen, dass die linke Seite, und der erste Term auf der rechten Seite verschwinden. Die Clustereigenschaft impliziert, dass $L_1\Psi = \kappa\Omega$, und es folgt von (4.3.28), dass $\kappa = 0$, d.h. dass Ψ quasiprimär sein muss.

Als nächstest zeigen wir induktiv, dass $\mathcal{F}_h$ für $h > 1$ eine direkte Summe der Räume $L^n_{-1}\mathcal{F}^Q_{h-n}$ ist, wobei $0 \leq n < h$. Für jedes $\Psi \in \mathcal{F}_h$ können wir ein $\Phi \in L_{-1}\mathcal{F}_{h-1}$ finden, so dass $L_1(\Psi - \Phi) = 0$; dann ist Ψ die Summe des quasi-primären Zustandes $\Psi - \Phi$ und Φ, wobei letzterer, nach der Induktionsannahme, ein L_{-1}-Nachkomme eines quasi-primären Zustandes ist. Um Φ zu konstruieren, bemerken wir, dass

$$\begin{aligned} L_1(\Psi + \sum_{n=1}^{h} a_n L^n_{-1} L^n_1 \Psi) &= L_1\Psi + \sum_{n=1}^{h} a_n \sum_{l=0}^{n-1} L^l_{-1} [L_1, L_{-1}] L^{n-1-l}_{-1} L^n_1 \Psi \\ &\qquad + \sum_{n=1}^{h-1} a_n L^n_{-1} L^{n+1}_1 \Psi \\ &= \sum_{n=1}^{h} a_{n-1} L^{n-1}_{-1} L^n_1 \Psi + \sum_{n=1}^{h} 2a_n \sum_{l=0}^{n-1} (h-1-l) L^{n-1}_{-1} L^n_1 \Psi \\ &= \sum_{n=1}^{h} (a_{n-1} + a_n(2nh - n(n+1)) L^{n-1}_{-1} L^n_1 \Psi \,, \end{aligned} \quad (4.3.29)$$

wobei $a_0 = 1$, und wir ausgenützt haben, dass

$$2\sum_{l=0}^{n-1}(h-1-l) = 2n(h-1) - n(n-1) = n\left[2h - (n+1)\right] \,. \quad (4.3.30)$$

Da $h \geq 2$ und $1 \leq n \leq h$, ist $2h - (n+1) > 0$, und wir können daher rekursiv $a_n = -a_{n-1}/(2nh - n(n+1))$, $1 \leq n \leq h$ wählen. Nach Konstruktion gilt dann $L_1(\Psi - \Phi) = 0$ für $\Phi = -\sum_{n=1}^{h} a_n L^n_{-1} L^n_1 \Psi \in L_{-1}\mathcal{F}_{h-1}$. Dies beweist das Resultat.

4.3.5 Die konforme Symmetrie

Schliesslich wollen wir zeigen, dass die obige Definition der konformen Symmetrie mit dem, was wir zuvor betrachtet haben, übereinstimmt. Im wesentlichen ist das direkt eine Folge der Dualitätsgleichung (4.2.36): betrachte den Fall, wo $\psi = L$ mit $h_\psi = 2$. Dann sagt die Dualitätsgleichung, dass

$$L(z)V(\phi, \zeta) = \sum_{l \leq h_\phi} (z-\zeta)^{-l-2} V\left(L_l \phi, \zeta\right) \,. \quad (4.3.31)$$

Falls ϕ ein primäres Feld ist, haben wir (siehe (4.2.7))

$$[L_m, V_n(\phi)] = (m(h-1) - n)V_{m+n}(\phi) \tag{4.3.32}$$

und daher ist (vgl. (4.2.24))

$$L_m\phi = L_m V_{-h}(\phi)\Omega = ((m+1)h - m)V_{m-h}(\phi)\Omega = 0 \qquad \text{falls } m > 0. \tag{4.3.33}$$

[Hier haben wir angenommen, dass $h \geq 1$.] Falls ϕ also ein Primärfeld ist, gilt

$$L(z)V(\phi,\zeta) = \frac{1}{(z-\zeta)^2}V(L_0\phi,\zeta) + \frac{1}{(z-\zeta)}V(L_{-1}\phi,\zeta) + \mathcal{O}(1)\,. \tag{4.3.34}$$

Nach Annahme ist $L_0\phi = h\phi$, und da L_{-1} der Translationsgenerator ist, gilt

$$V(L_{-1}\phi,\zeta) = \frac{d}{d\zeta}V(\phi,\zeta)\ . \tag{4.3.35}$$

Die singulären Anteile der Operator Produkt Entwicklung sind daher gerade

$$L(z)V(\phi,\zeta) = \frac{h}{(z-\zeta)^2}V(\phi,\zeta) + \frac{1}{(z-\zeta)}\frac{d}{d\zeta}V(\phi,\zeta)\ . \tag{4.3.36}$$

Für den Fall, dass ϕ nicht primär, sondern gerade L ist, haben wir zusätzlich zu den obigen Termen (mit $h = 2$) weitere singuläre Terme der Form

$$(z-\zeta)^{-l-2}V(L_l\phi,\zeta) \tag{4.3.37}$$

mit $l \geq 1$. Da das Spektrum von L_0 von unten durch Null begrenzt ist, können nur zwei Terme auftreten: $L_2L = \frac{c}{2}\Omega$ und $L_1L = 0$, wobei wir im ersteren Fall benützt haben, dass Ω der einzige Zustand mit $h = 0$ ist, und im zweiten Fall, dass L quasiprimär ist. [Die Normalisierung von L_2L ist so gewählt, dass sie gerade mit der Standardnormierung von $[L_2, L_{-2}]\Omega$ übereinstimmt.] Zusätzlich zu (4.3.36) treten deshalb noch die Terme

$$L(z)L(\zeta) = \frac{c/2}{(z-\zeta)^4} + \cdots \tag{4.3.38}$$

auf. Die Terme, die auf der rechten Seite von (v) auftreten, sind gerade alle Pole von w; falls wir also die rechte von der linken Seite abziehen, hat die resultierende Funktion (als Funktion von w) keine Polstellen. Es handelt sich daher um eine ganze Funktion, die deshalb einfach konstant sein muss. Diese Konstante muss verschwinden, da die rechte Seite die richtige Form zum Beispiel für $w \to w_1$ hat.

4.4 Beispiele meromorpher konformer Feldtheorien

Wir wollen nun einige interessante Beispiele konformer Feldtheorien definieren.

4.4.1 Die U(1) Theorie

Die einfachste meromorphe konforme Feldtheorie ist die Theorie, die durch das Feld $\partial_z\phi(z,\bar{z})$ generiert wird. Hier ist $\phi(z,\bar{z})$ das freie Bosonfeld, das wir in Kapitel 3.2 untersucht haben. Das Bosonfeld $\phi(z,\bar{z})$ ist kein chirales Feld, da es sowohl von z, als auch von $\bar{z}$ abhängt,

$$\phi(z,\bar{z}) = \phi_L(z) + \phi_R(\bar{z})\,. \tag{4.4.1}$$

Da es jedoch die Summe eines chiralen und eines anti-chiralen Feldes ist, ist seine Ableitung nach z ein chirales Feld,

$$J(z) \equiv \sqrt{2}\, i\, \partial_z\phi(z,\bar{z}) = \sqrt{2}\, i\, \partial_z\phi_L(z)\,. \tag{4.4.2}$$

Die Modenentwicklung für $\phi_L(z)$ wurde in Kapitel 3.2 eingeführt,

$$\phi_L(z) = \frac{1}{2}\, q - \frac{i}{2}\, p\, \log z + \frac{i}{\sqrt{2}} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n}\, a_n\, z^{-n}\,, \tag{4.4.3}$$

und daher hat das Feld $J(z)$ nun die Entwicklung

$$J(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, z^{-n-1}\,. \tag{4.4.4}$$

[Wie zuvor haben wir hier $a_0 = p/\sqrt{2}$ definiert.] Diese Formel suggeriert, dass $J(z)$ ein chirales Primärfeld mit konformen Gewicht $h=1$ ist, und dass ist in der Tat auch der Fall: wie wir in Kapitel 3.2.1 gesehen haben gilt

$$[L_m, a_n] = -n\, a_{m+n}\,, \tag{4.4.5}$$

und das stimmt daher mit (4.2.7) mit $V_n(J) \equiv a_n$ und $h=1$ überein. Die Moden der Virasoro Algebra sind hier durch

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{l\in\mathbb{Z}} :a_l\, a_{m-l}: \tag{4.4.6}$$

definiert, und die Moden a_n erfüllen die Vertauschungsrelationen

$$[a_m, a_n] = m\, \delta_{m,-n}\,. \tag{4.4.7}$$

Wegen (4.2.16) gilt

$$a_n\,\Omega = 0 \qquad \text{für } n \geq 0. \tag{4.4.8}$$

Dies ist damit konsistent, dass der Vakuumzustand Ω von $L_{\pm 1}$ und L_0 vernichtet wird: wegen (4.4.6) treten für L_n mit $n \geq -1$ in jedem Term zumindest ein a_l mit $l \geq 0$ auf, und daher gilt

$$L_n\,\Omega = 0 \qquad \text{für } n \geq -1. \tag{4.4.9}$$

Die negativen Moden von J, d.h. a_n mit $n < 0$, vernichten das Vakuum nicht; sie generieren den Fock Raum der physikalischen Zustände (so wie üblicherweise in Quantenfeldtheorien).

Von dem oben entwickelten axiomatischen Standpunkt, ist diese Theorie wie folgt beschrieben. Der Raum der primären Zustände V' ist ein-dimensional, und wird von dem Basisvektor J erzeugt. Die Amplitude einer ungeraden Anzahl von J-Feldern verschwindet, und die Amplitude einer geraden Anzahl ist

$$\begin{aligned} \langle J(z_1) \cdots J(z_{2n}) \rangle &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{\pi \in S_{2n}} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{(z_{\pi(j)} - z_{\pi(j+n)})^2}, \\ &= \sum_{\pi \in S'_{2n}} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{(z_{\pi(j)} - z_{\pi(j+n)})^2}, \end{aligned} \tag{4.4.10}$$

wobei S_{2n} die Permutationsgruppe von $2n$ Objekten ist, und die Summe in der zweiten Zeile über die Untermenge S'_{2n} von Permutationen $\pi \in S_{2n}$ läuft, für die $\pi(i) < \pi(i+n)$ und $\pi(i) < \pi(j)$ falls $1 \leq i < j \leq n$. Diese Amplituden sind natürlich meromorph und lokal. Man kann leicht nachrechnen, dass sie die Möbiuseigenschaft mit $h = 1$ und die Clustereigenschaft erfüllen. Ihre Operator Produkt Entwicklung ist dadurch charakterisiert, dass

$$J(z)J(\zeta) = \frac{1}{(z-\zeta)^2} + \mathcal{O}(1). \tag{4.4.11}$$

Die Kenntnis des singulären Anteils der Operator Produkt Entwicklung genügt, um daraus die Kommutatoren (4.4.7) abzuleiten; dies ist eine Folge des folgenden Kontourargumentes. Die Moden a_n können durch ein Kontourintegral definiert werden,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint dz\, J(z) z^n. \tag{4.4.12}$$

In der radialen Quantisierung ist dann der Kommutator

$$[a_m, a_n] = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint dz \frac{1}{2\pi i} \oint d\zeta}_{|z|>|\zeta|} \; J(z) z^m\, J(\zeta)\zeta^n - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint dz \frac{1}{2\pi i} \oint d\zeta}_{|\zeta|>|z|} \; J(\zeta)\zeta^n\, J(z) z^m. \tag{4.4.13}$$

Wegen der Lokalität der Operatoren ist der Integrand in beiden Integralen der gleiche. Wir können daher die Kontouren so deformieren, dass wir die beiden Integrale als

$$[a_m, a_n] = \frac{1}{2\pi i} \oint_0 d\zeta\, \zeta^n \frac{1}{2\pi i} \oint_\zeta dz\, z^m \left(\frac{1}{(z-\zeta)^2} \right) \tag{4.4.14}$$

geschrieben werden, wobei wir ausgenützt haben, dass in dem letzten Integral nur der singuläre Anteil der Operator Produkt Entwicklung beiträgt. Das z-Integral kann jetzt leicht ausgeführt werden, und wir erhalten

$$[a_m, a_n] = m \frac{1}{2\pi i} \oint_0 d\zeta\, \zeta^{n+m-1} = m\, \delta_{m+n,0}. \tag{4.4.15}$$

Das konforme Feld ist in diesem Fall einfach durch

$$L(z) = \frac{1}{2} \lim_{\zeta \to z} \left(J(\zeta) J(z) - \frac{1}{(z-\zeta)^2} \right) \tag{4.4.16}$$

definiert. Man kann leicht nachrechnen (**Übungsaufgabe**), dass dieses Feld gerade die Rekursionsformel in (v) erfüllt.

4.4.2 Gittertheorien

Die einfachste Verallgemeinerungen der obigen U(1) Theorie sind Gittertheorien. Um diese zu definieren, müssen wir zunächst einige einfache Begriffe von Gittern einführen.

Ein (euklidisches) Gitter Λ ist eine Untermenge von $\mathbb{R}^d$, das bezüglich einer Basis $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^d$, $i = 1, \ldots, d$ integrale Koordinaten besitzt,

$$\Lambda = \left\{ \sum_{i=1}^{d} n_i \, \mathbf{e}_i \mid n_i \in \mathbb{Z} \right\} . \tag{4.4.17}$$

Die *Dimension* des Gitters ist dann $\dim \Lambda = d$. Ein Gitter heisst *integral*, falls alle inneren Produkte von Elementen in Λ ganze Zahlen sind, d.h.

$$\Lambda \quad \text{integral, falls} \qquad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \in \mathbb{Z} \quad \text{für alle } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Lambda. \tag{4.4.18}$$

Ein Gitter heisst *gerade*, falls

$$\Lambda \quad \text{gerade, falls} \qquad \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \in 2\mathbb{Z} \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \Lambda. \tag{4.4.19}$$

Jedes gerade Gitter ist integral, da nach Annahme

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) - \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} = 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \tag{4.4.20}$$

gerade ist, und daher $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ ganz sein muss. Das *duale* Gitter Λ^* eines Gitters Λ ist durch

$$\Lambda^* = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} \in \mathbb{Z} \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \Lambda \right\} . \tag{4.4.21}$$

Falls Λ integral ist, dann gilt offensichtlich

$$\Lambda \subseteq \Lambda^* . \tag{4.4.22}$$

Ein integrales Gitter heisst *selbst-dual* falls

$$\Lambda^* = \Lambda . \tag{4.4.23}$$

Gerade selbst-duale Euklidische Gitter gibt es nur für Dimensionen $\dim \Lambda = 8n$; das einfachste Beispiel ist das Wurzelgitter der Lie Algebra e_8.

Sei Λ nun ein gerades Gitter der Dimension d. Definiere die Oszillatoren α_n^i für $i = 1, \ldots, d$ und $n \in \mathbb{Z}$, die die Vertauschungsrelationen

$$[\alpha_n^i, \alpha_m^j] = n \, \delta^{ij} \, \delta_{m,-n} \tag{4.4.24}$$

erfüllen. (Diese definieren daher d vertauschende Kopien der obigen U(1) Theorie.) Der Raum der Zustände der mermomorphen konformen Feldtheorie wird durch die Wirkung dieser Oszillatoren auf Impulszuständen $|\mathbf{k}\rangle$ generiert, wobei $\mathbf{k} \in \Lambda$ und

$$\alpha^i_n \, |\mathbf{k}\rangle = \delta_{n,0} \, k^i \, |\mathbf{k}\rangle \qquad \text{für } n \geq 0 \tag{4.4.25}$$

gilt. Wir definieren zusätzlich den Operator $\mathbf{q}$ durch

$$e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{q}} \, |\mathbf{k}_2\rangle = |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2\rangle \, . \tag{4.4.26}$$

Um die zugehörigen Vertexoperatoren zu definieren, betrachten wir das formale Feld

$$X^j(z) = q^j - i \, \alpha^j_0 \, \log z + i \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha^j_n}{n} \, z^{-n} = q^j - i \, \alpha^j_0 \, \log z + X^j_< + X^j_> \, , \tag{4.4.27}$$

mit

$$X^j_< = i \sum_{n<0} \frac{\alpha^j_n}{n} \, z^{-n} \, , \qquad X^j_> = i \sum_{n>0} \frac{\alpha^j_n}{n} \, z^{-n} \, . \tag{4.4.28}$$

Der Vertex Operator für $|\mathbf{k}\rangle$ ist dann einfach

$$V(|\mathbf{k}\rangle, z) =: \exp\left(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}(z)\right) : \, c_{\mathbf{k}} \, , \tag{4.4.29}$$

wobei die Normalordnung hier bedeutet, dass

$$: \exp\left(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}(z)\right) := e^{ik^j X^j_<} \, e^{ik^j q^j} \, e^{k^j \alpha^j_0 \log(z)} \, e^{ik^j X^j_>} \tag{4.4.30}$$

und $c_{\mathbf{k}}$ ein Kozykelfaktor ist. Dies ist ein Operator, der mit allen Moden α^i_n vertauscht, und auf einem Impulszustand $|\mathbf{l}\rangle$ gerade die Phase

$$c_{\mathbf{k}} \, |\mathbf{l}\rangle = \epsilon(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \, |\mathbf{l}\rangle \tag{4.4.31}$$

ergibt. Die Einführung dieser Kozykelfaktoren ist notwendig, um die Lokalität zu garantieren. Man kann leicht zeigen, dass das Feld $V(|\mathbf{k}\rangle, z)$ lokal ist, falls die Operatoren $\hat{c}_{\mathbf{k}} = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}} c_{\mathbf{k}}$ die Identitäten

$$\hat{c}_{\mathbf{k}} \, \hat{c}_{\mathbf{l}} = \epsilon(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \, \hat{c}_{\mathbf{k}+\mathbf{l}} = (-1)^{\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} \, \hat{c}_{\mathbf{l}} \, \hat{c}_{\mathbf{k}} \tag{4.4.32}$$

erfüllen. Das ist dazu äquivalent, dass für $\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m} \in \Lambda$

$$\epsilon(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \epsilon(\mathbf{k} + \mathbf{l}, \mathbf{m}) = \epsilon(\mathbf{k}, \mathbf{l} + \mathbf{m}) \epsilon(\mathbf{l}, \mathbf{m}) \, , \qquad \epsilon(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = (-1)^{\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} \epsilon(\mathbf{l}, \mathbf{k}) \tag{4.4.33}$$

gilt. Die erste Gleichung impliziert, dass die Phasen $\epsilon(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ gerade einen 2-Kozykel definieren, und es ist nicht schwer zu zeigen, dass man immer einen solchen 2-Kozykel mit der letzten Eigenschaft finden kann. Dazu definieren wir für jeden Basisvektor $\mathbf{e}_i$ des Gitters Λ eine Gamma-Matrix γ_i, die die beiden Eigenschaften

$$\gamma_i^2 = 1 \, , \qquad \gamma_i \gamma_j = (-1)^{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j} \gamma_j \gamma_i \tag{4.4.34}$$

erfüllt. (Diese beiden Bedingungen sind miteinander kompatibel, da das Gitter gerade ist.) Zu jedem $\mathbf{k} = k_1\mathbf{e}_1 + \cdots + k_n\mathbf{e}_n$ definieren wir dann $\gamma_{\mathbf{k}}$ durch

$$\gamma_{\mathbf{k}} = \gamma_1^{k_1} \cdots \gamma_n^{k_n} \,. \tag{4.4.35}$$

Der Kozykel $\epsilon(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ ist dann durch die Gleichung

$$\gamma_{\mathbf{k}}\, \gamma_{\mathbf{l}} = \epsilon(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{l}} \tag{4.4.36}$$

festgelegt. Man prüft leicht nach, dass diese Definition gerade (4.4.33) erfüllt.

Vom Standpunkt der axiomatischen Beschreibung kann diese Theorie wie folgt charakterisiert werden. Der Vektorraum V' der primären Felder besteht aus d U(1)-Feldern, H^i, und den Feldern, die zu $|\mathbf{k}\rangle$ mit $\mathbf{k} \in \Lambda$ gehören. Die Amplituden, die nur U(1)-Felder enthalten, sind wie oben beschrieben. Jene, die sowohl U(1)-Felder, als auch Felder, die zu $|\mathbf{k}\rangle$ gehören, werden rekursiv durch

$$\begin{aligned} \langle H^r(z) \prod_j H^{i_j}(z_j) \prod_i V(\mathbf{k}_i, \zeta_i) \rangle \;\; &= \;\; \sum_j \frac{\delta^{r i_j}}{(z - z_j)^2} \langle \prod_{k \neq j} H^{i_k}(z_k) \prod_i V(\mathbf{k}_i, \zeta_i) \rangle \\ &\quad + \sum_i \frac{k^r}{(z - \zeta_i)} \langle \prod_j H^{i_k}(z_k) \prod_m V(\mathbf{k}_m, \zeta_m) \rangle \end{aligned}$$

definiert. Schliesslich sind die Amplituden, die nur Felder $V(\mathbf{k}_i, z_i)$ enthalten, durch

$$\langle V(\mathbf{k}_1, z_1) \cdots V(\mathbf{k}_n, z_n) \rangle = \epsilon(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n) \prod_{i<j} (z_i - z_j)^{\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{k}_j} \tag{4.4.37}$$

gegeben, falls $\mathbf{k}_1 + \cdots \mathbf{k}_n = \mathbf{0}$; andernfalls verschwinden diese Amplituden. Die Phase $\epsilon(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n)$ ist dabei die offensichtliche Verallgemeinerung der obigen Kozykelphase:

$$\gamma_{\mathbf{k}_1} \cdots \gamma_{\mathbf{k}_n} = \epsilon(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n) \gamma_{\mathbf{k}_1 + \cdots \mathbf{k}_n} \,. \tag{4.4.38}$$

Das Virasoro Feld kann durch

$$L(z) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \lim_{\zeta \to z} \left(H^i(\zeta)\, H^i(z) - \frac{1}{(z - \zeta)^2} \right) \tag{4.4.39}$$

definiert werden. Man kann leicht nachprüfen, dass die so definierten Amplituden alle gewünschten Eigenschaften besitzen.

4.4.3 Affine Theorien

Sei Λ das Wurzelgitter einer einfachen Lie Algebra vom Typ A-D-E. Dann ist die oben definierte Gittertheorie tatsächlich zu einer affinen Theorie isomorph, nämlich gerade zu der level $k = 1$ Theorie der zugehörigen Lie Algebra. Affine Theorien kann man am leichtestens mittels ihrer Amplituden definieren.

Sei $\mathbf{g}$ eine beliebige Lie Algebra, und seien die Matrizen t^a, $a = 1, \ldots, \dim(\mathbf{g})$ eine endlich-dimensionale Darstellung von $\mathbf{g}$, d.h. $[t^a, t^b] = f^{ab}_c t^c$, wobei die Konstanten f^{ab}_c die Strukturkonstanten von $\mathbf{g}$ sind. Der Raum V' von primären Feldern hat Dimension $\dim(\mathbf{g})$, und hat als Basis die Vektoren J^a mit $a = 1, \ldots, \dim(\mathbf{g})$. Wir bezeichnen den Vertex Operator, der zu J^a gehört einfach als $J^a(z) = V(J^a, z)$.

Sei K irgendeine Matrix, die mit allen t^a vertauscht. Dann definieren wir

$$\kappa^{a_1 a_2 \ldots a_m} = \mathrm{tr}(K t^{a_1} t^{a_2} \cdots t^{a_m}) . \tag{4.4.40}$$

Die $\kappa^{a_1 a_2 \ldots a_m}$ haben die Eigenschaften

$$\kappa^{a_1 a_2 a_3 \ldots a_{m-1} a_m} = \kappa^{a_2 a_3 \ldots a_{m-1} a_m a_1} \tag{4.4.41}$$

und

$$\kappa^{a_1 a_2 a_3 \ldots a_{m-1} a_m} - \kappa^{a_2 a_1 a_3 \ldots a_{m-1} a_m} = f^{a_1 a_2}{}_b \, \kappa^{b a_3 \ldots a_{m-1} a_m} . \tag{4.4.42}$$

Um nun die Amplitude $\langle J^{a_1}(z_1) J^{a_2}(z_2) \ldots J^{a_n}(z_n) \rangle$ zu definieren, betrachten wir die Menge der Permutation $\rho \in S_n$, die keine Fixpunkte haben, d.h. für die $\rho(i) \neq i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Jede solche Permutation kann als Produkt disjunkter Zykel (deren Zykluslänge mindestens zwei ist) geschrieben werden

$$\rho = \sigma_1 \, \sigma_2 \, \cdots \, \sigma_M . \tag{4.4.43}$$

Zu einem Zykel $\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_m) \equiv (i_2, \ldots, i_m, i_1)$ assoziieren wir die Funktion

$$f_\sigma^{a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_m}}(z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_m}) = - \frac{\kappa^{a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_m}}}{(z_{i_1} - z_{i_2})(z_{i_2} - z_{i_3}) \cdots (z_{i_{m-1}} - z_{i_m})(z_{i_m} - z_{i_1})} , \tag{4.4.44}$$

und zu der Permutation $\rho \in S_n$ das Produkt f_ρ der Funktionen $f_{\sigma_1} f_{\sigma_2} \ldots f_{\sigma_M}$. Dann definieren wir

$$\langle J^{a_1}(z_1) J^{a_2}(z_2) \ldots J^{a_n}(z_n) \rangle = \sum_{\rho \in \tilde{S}_n} f_\rho , \tag{4.4.45}$$

wobei sich die Summe über alle Permutationen erstreckt, die keinen Fixpunkt besitzen.

Graphisch können wir diese Amplituden wie folgt beschreiben. Zu jedem der n Felder $J^a(z)$ assoziieren wir einen Punkt. Wir betrachten dann alle gerichteten Graphen, die diese n Punkte verbinden, wobei an jedem Punkt eine Linie endet und eine beginnt. In jedem solchen Graph sind die Punkte dann in gerichteten Zykeln zusammengefasst. Zu jedem solchen Zykel assoziieren wir die Funktion f_σ, und zu dem Graph das Produkt dieser Funktionen. Die Amplitude ist dann die Summe über die Funktionen, die den verschiedenen Graphen zugeordnet werden.

Dies definiert die Amplituden für eine Basis von V'; die Amplituden für beliebige Elemente von V' werden durch Linearität fortgesetzt. Die Amplituden sind offensichtlich lokal und meromorph, und man kann leicht nachprüfen, dass sie die Möbius Kovarianz Eigenschaft erfüllen, wobei J^a konformes Gewicht $h = 1$ hat. Weiterhin kann man leicht die Clustereigenschaft nachweisen.

Die Amplituden implizieren, dass die Felder J^a die Operator Produkt Entwicklung

$$J^a(z)J^b(w) \sim \frac{\kappa^{ab}}{(z-w)^2} + \frac{f^{ab}{}_c \, J^c(w)}{(z-w)} + \mathcal{O}(1)\,, \tag{55}$$

besitzen. Die Moden J^a_n werden in der üblichen Weise definiert,

$$J^a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J^a_n z^{-n-1}\,, \tag{4.4.46}$$

und daher ist

$$J^a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint dz\, z^n J^a(z)\,. \tag{4.4.47}$$

Wie zuvor im Fall der U(1) Theorie, kann man aus dem singulären Teil der Operatorproduktentwicklung, die Kommutatoren der Moden ableiten. Mit denselben Argumenten wir dort findet man, dass

$$\begin{aligned} [J^a_m, J^b_n] &= \frac{1}{2\pi i}\oint_0 d\zeta\, \zeta^n \frac{1}{2\pi i}\oint_\zeta dz\, z^m \left(\frac{\kappa^{ab}}{(z-\zeta)^2} + \frac{f^{ab}{}_c\, J^c(\zeta)}{(z-\zeta)}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_0 d\zeta\, \left(m\kappa^{ab}\,\zeta^{n+m-1} + f^{ab}_c\,\zeta^{n+m} J^c(\zeta)\right) \\ &= m\,\kappa^{ab}\,\delta_{m,-n} + f^{ab}_c\, J^c_{m+n}\,. \end{aligned} \tag{4.4.48}$$

Dies ist (eine Darstellung) der affinen Lie Algebra $\hat{g}$. In dem Fall, dass g eine einfache Lie Algebra ist, kann man κ als

$$\kappa^{ab} = \mathrm{tr}(Kt^a t^b) = k\delta^{ab}\,, \tag{4.4.49}$$

schreiben, wobei eine geeignete Basis gewählt worden ist (und k eine im allgemeinen komplexe Konstante ist). Dann wird die obige Lie Algebra gerade

$$[J^a_m, J^b_n] = m\,k\,\delta^{ab} + f^{ab}_c J^c_{m+n}\,. \tag{4.4.50}$$

Die Moden des Virasoro Feldes werden durch die Sugawara Konstruktion definiert

$$L_n = \frac{1}{2(k+h^\vee)} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_a :J^a_m J^a_{n-m}:\,, \tag{4.4.51}$$

wobei die Normalordnung wie zuvor definiert ist,

$$:J^a_n J^b_m: := \begin{cases} J^a_n J^b_m & \text{falls } m \geq n, \\ J^b_m J^a_n & \text{falls } n > m, \end{cases} \tag{4.4.52}$$

und $h^\vee$ die duale Coxeter Zahl ist, d.h. der Wert des zweiten Casimir Operators in der adjungierten Darstellung von g. Diese Moden erfüllen

$$[L_m, J^a_n] = -nJ^a_{m+n}\,, \tag{4.4.53}$$

und definieren eine Virasoro Algebra mit zentraler Ladung (**Übungsaufgabe**)

$$c = \frac{k \dim g}{k + h^\vee} \,. \tag{4.4.54}$$

Für das folgende ist es wichtig, den Fockraum dieser Theorie ein wenig im Detail zu verstehen. Wir wissen, dass der Fockraum durch die Wirkung der Moden J^a_n auf das Vakuum generiert wird; ein allgemeiner Zustand dieser Form ist

$$J^{a_1}_{n_1} \cdots J^{a_l}_{n_l} \Omega \,. \tag{4.4.55}$$

Da die Moden die Vertauschungsrelationen (4.4.50) erfüllen, gibt es natürlich viele Relationen zwischen diesen Zuständen. Um diese Identifikationen zu berücksichtigen, definieren wir das das sogenannte *Vermamodul* wie folgt. Zunächst sei $\tilde{V}$ der freie komplexe Vektorraum, dessen Basisvektoren gerade alle Ausdrücke der Form (4.4.55) sind. Wir betrachten den Unterraum der Relationen, der durch

$$J^{a_1}_{n_1} \cdots (J^a_m J^b_n - J^b_n J^a_m - [J^a_m, J^b_n]) \cdots J^{a_l}_{n_l} \Omega \tag{4.4.56}$$

aufgespannt wird, wobei hier $[J^a_m, J^b_n]$ für die rechte Seite von (4.4.50) steht. Das Vermamodul ist dann einfach der Quotientenraum von $\tilde{V}$, wobei wir alle Relationen dieser Form herausteilen.

Man kann diese Relationen dazu benützen, eine sogenannte Poincaré-Birkhoff-Witt Basis für das Vermamodul zu finden. [Die folgende Konstruktion funktioniert nicht nur für affine Theorien, sondern im wesentlichen für alle (geeigneten) meromorphen konformen Feldtheorien.] Zunächst kann man die Indizes $n_1, \ldots, n_l$ 'ordnen', so dass $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_l$ ist — dies kann durch endlich viele Schritte erreicht werden, da bei jeder Anwendung des Kommutators die Anzahl der Moden sich verringert! Da das Vakuum von allen J^a_n mit $n \geq 0$ vernichtet wird, bedeutet das, dass das Vermamodul von Zuständen der Form

$$J^{a_1}_{-n_1} \cdots J^{a_l}_{-n_l} \Omega \tag{4.4.57}$$

aufgespannt wird, wobei $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_l$ ist. Weiterhin können wir auch eine Ordnung für die Adjungierte Darstellung der Lie Algebra g einführen, und darauf insistieren, dass falls $n_i = n_{i+1}$, $a_i \leq a_{i+1}$ ist. Diese geordneten Zustände bilden dann eine Basis (nämlich die Poincaré-Birkhoff-Witt Basis) für das Vermamodul.

Man könnte zunächst denken, dass der Fockraum der zugehörigen Theorie gerade mit dem Vermamodul übereinstimmt. Im allgemeinen ist das aber nicht der Fall. Um dies zu verstehen, ist es nützlich, ein Beispiel im Detail zu analysieren. Betrachte den einfachsten Fall, wobei $g =$su(2). Es ist bequem, die sogenannte Cartan-Weyl Basis der endlichen Lie Algebra zu benützen, in der wir 3 Generatoren, H und $J^\pm$ besitzen, deren nicht-triviale Vertauschungsrelationen durch

$$\begin{aligned} [H, J^\pm] &= \pm J^\pm \\ [J^+, J^-] &= 2H \end{aligned}$$

gegeben sind. In der entsprechenden Basis hat man dann für die affine Algebra die Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} [H_m, J_n^\pm] &= \pm J_{m+n}^\pm \\ [J_m^+, J_n^-] &= 2H_{m+n} + k\, m\, \delta_{m,-n} \\ [H_m, H_n] &= \frac{k}{2}\, m\, \delta_{m,-n}\,. \end{aligned} \tag{4.4.58}$$

Sei k nun eine ganze positive Zahl. Dann ist das Vermamodul nicht irreduzibel (als Darstellung der affinen Algebra), da der Raum, der von dem Vektor

$$\mathcal{N} = \left(J_{-1}^+\right)^{k+1} \Omega \tag{4.4.59}$$

erzeugt wird (d.h. der alle Vektoren enthält, die durch Wirkung von beliebigen Moden auf $\mathcal{N}$ erzeugt werden) ein invarianter echter Unterraum ist. Nach Konstruktion ist es offensichtlich, dass dieser Raum invariant ist; er definiert einen echten Unterraum, da

$$J_n^a \mathcal{N} = 0 \tag{4.4.60}$$

für alle $n > 0$; insbesondere enthält dieser Unterraum daher nicht das Vakuum. Ein Vektor, der wie in (4.4.60) von allen positiven Moden vernichtet wird, wird *singulärer* Vektor genannt.

Es ist nicht schwer, (4.4.60) explizit zu beweisen: falls $J_n^a = J_n^+$ ist die Aussage offensichtlich, da der J_n^+ Generator mit allen J_{-1}^+ vertauscht und das Vakuum vernichtet; falls $J_n^a = H_n$ erzeugt der Kommutator von H_n mit J_{-1}^+ nur Moden J_{n-1}^+, die wiederum mit allen J_{-1}^+ vertauschen und ebenfalls das Vakkum vernichten. Entsprechendes gilt dann auch falls $J_n^a = J_n^-$ für $n \geq 2$. Der einzig ein wenig kompliziertere Fall ist $J_n^a = J_1^-$, für den man berechnet

$$\begin{aligned} J_1^- \mathcal{N} &= \sum_{l=0}^{k} (J_{-1}^+)^l [J_1^-, J_{-1}^+] (J_{-1}^+)^{k-l} \Omega \\ &= \left[\sum_{l=0}^{k} k - 2 \sum_{l=0}^{k} (k-l) \right] (J_{-1}^+)^k \Omega \\ &= \left[k(k+1) - 2\frac{k(k+1)}{2} \right] (J_{-1}^+)^k \Omega = 0\,. \end{aligned} \tag{4.4.61}$$

Es folgt aus der Cluster Bedingung, dass $\mathcal{V}^{\mathcal{O}}$ keine invarianten Unterräume enthält: wegen

$$P_0 \prod_i V(\psi_i, z_i)\Psi = \Omega \left\langle \prod_i V(\psi_i, z_i)\Psi \right\rangle \tag{4.4.62}$$

enthält der Raum, der durch die Wirkung der Vertexoperatoren von Ψ genereriert wird, entweder das Vakuum (und ist daher kein echter Unterraum), oder alle Amplituden, die Ψ involvieren verschwinden, und daher ist $\Psi = 0$ in $\mathcal{V}^{\mathcal{O}}$. Auf den obigen Fall angewendet folgt daher, dass alle Amplituden, die $\mathcal{N}$ involvieren verschwinden; daher ist $\mathcal{N}$ ein *Nullvektor*, d.h. $\mathcal{N} = 0$ im Fockraum $\mathcal{F}$. Man kann zeigen, dass der Fockraum in diesem Fall gerade der Quotientenraum des Verma-Moduls ist, wobei alle Vektoren, die durch die Wirkung von J^a_n von $\mathcal{N}$ erzeugt werden, herausgeteilt werden. [Die Bedingung, dass $\mathcal{N} = 0$ ist also die einzige zusätzliche Bedingung, die man implementieren muss.]

4.4.4 Die Virasoro Theorie

Die Virasoro Theorie kann auf ähnliche Weise konstruiert werden. In diesem Fall ist V ein-dimensional, und wird von dem Vektor L mit konformen Gewicht 2 aufgespannt. Im Prinzip kann man die Theorie einfach rekursiv vermittels (v) definieren. Es ist jedoch möglich, auch eine geschlossene Formel für die so erzeugten Korrelatoren anzugeben; dies involviert wiederum eine graphische Entwicklung.

Zu jedem Feld assoziieren wir wiederum einen Punkt. Nun betrachten wir alle Graphen, bei denen jeder Punkt durch zwei (gerichtete) Linien mit anderen Punkten verbunden ist. Jeder solche Graph kann in geschlossene Zykel aufgeteilt werden; zu jedem solchen Zykel assoziieren wir die Funktion

$$f_\ell(z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_m}) = \frac{c/2}{(z_{i_1} - z_{i_2})^2 (z_{i_2} - z_{i_3})^2 \cdots (z_{i_{m-1}} - z_{i_m})^2 (z_{i_m} - z_{i_1})^2}\,, \tag{4.4.63}$$

wobei c eine (komplexe) Zahl ist. Zu jedem Graph assoziieren wir das Produkt der Funktionen, die den Zykeln zugeordnet werden. Die Amplitude $\langle L(z_1) L(z_2) \ldots L(z_n)\rangle$ ist dann die Summe der Funktionen, die den verschiedenen Graphen zugeordnet sind. [Beachte, dass Graphen, die durch das Umkehren der Orientierung der Linien eines Zykel ineinander übergehen, den gleichen Beitrag leisten.]

Diese Amplituden implizieren, dass die Operator Produkt Entwicklung des L Feldes gerade durch

$$L(z)L(\zeta) \sim \frac{c/2}{(z-\zeta)^4} + \frac{2L(\zeta)}{(z-\zeta)^2} + \frac{L'(\zeta)}{z-\zeta} + O(1) \tag{4.4.64}$$

gegeben ist. Mit dem nun vertrauten Kontourargument führt das zu den Vertauschungsregeln

$$\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= \frac{1}{2\pi i} \oint_0 d\zeta\, \zeta^{n+1} \frac{1}{2\pi i} \oint_\zeta dz\, z^{m+1} \left[\frac{c/2}{(z-\zeta)^4} + \frac{2L(\zeta)}{(z-\zeta)^2} + \frac{L'(\zeta)}{z-\zeta} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_0 d\zeta\, \left[\frac{c}{12} m(m^2-1)\, \zeta^{n+m-1} + 2\,(m+1) L(\zeta)\, \zeta^{n+m+1} + L'(\zeta)\, \zeta^{n+m+2} \right] \\
&= \frac{c}{12} m(m^2-1)\, \delta_{m,-n} + 2\,(m+1)\, L_{m+n} + (-n-m-2)\, L_{m+n} \\
&= \frac{c}{12} m(m^2-1)\, \delta_{m,-n} + (m-n)\, L_{m+n}\,,
\end{aligned} \tag{4.4.65}$$

wobei wir in der vorletzten Zeile benützt haben, dass

$$L'(\zeta) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-l-2)\, \zeta^{-l-3}\, L_l\,. \tag{4.4.66}$$

Die Moden des Feldes L erfüllen daher wiederum die Virasoro Algebra.

5 Darstellungen meromorpher konformer Feldtheorien

Wir haben nun die meromorphe konforme Feldtheorie im Detail beschrieben. Die meromorphen Felder bilden natürlich nur einen kleinen Teil der vollständigen Theorie; sie beschreiben jedoch die 'Symmetrie' der Theorie, und die übrigen Felder lassen sich in Darstellungen der beiden meromorphen Feldtheorien (die durch die chiralen und antichiralen Felder erzeugt werden) organisieren. Als nächstes müssen wir daher Darstellungen von meromorphen konformen Feldtheorien studieren.

5.1 Eine axiomatische Beschreibung

Sei eine meromorphe Feldtheorie gegeben. Insbesondere haben wir dann (i) einen Fock Raum $\mathcal{F}$, der ein dichter Unterraum der Räume $\mathcal{V}^{\mathcal{O}}$ für jedes offene $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ ist; sowie (ii) Vertexoperatoren $V(\psi, z)$, die für beliebige Zustände $\psi \in V$ definiert sind, wobei V der (endlich-dimensionale) Raum der generierenden quasi-primären Felder ist.

Eine Darstellung dieser meromorphen konformen Feldtheorie kann nun wie folgt definiert werden. Seien W_α und W_β zwei endlich-dimensionale komplexe Vektorräume. (W_α und W_β sind geeignete Unterräume der Höchstgewichtsvektoren der Darstellung und ihrer konjugierten.) Für jede Kollektion von Vektoren $\psi_i \in V_{h_i}$ und $\phi_1 \in W_\alpha$, $\phi_2 \in W_\beta$, sowie $z_1, \ldots z_n \in \mathbb{C}$ und $u_1, u_2 \in \mathbb{C}$ haben wir Amplituden

$$\begin{aligned} & g(\psi_1, \ \ldots \ , \psi_n; z_1, \ldots, z_n; \phi_1, \phi_2; u_1, u_2) \\ & \quad \equiv \ \langle V(\psi_1, z_1) V(\psi_2, z_2) \cdots V(\psi_n, z_n) W_\alpha(\phi_1, u_1) W_\beta(\phi_2, u_2) \rangle \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

welche die folgenden Eigenschaften besitzen:

(i) Die Amplituden sind multi-linear in den ψ_i und ϕ_j, und invariant unter dem Austausch von (ψ_i, z_i) mit (ψ_j, z_j). Wir schreiben daher auch

$$g(\psi_1, \ldots, \psi_n; z_1, \ldots, z_n; \phi_1, \phi_2; u_1, u_2) = \langle \prod_{i=1}^{n} V(\psi_i, z_i) W_\alpha(\phi_1, u_1) W_\beta(\phi_2, u_2) \rangle \, . \tag{5.1.2}$$

(ii) Die Amplituden sind analytisch in den z_i und u_j, abgesehen von möglichen Polen endlicher Ordnung bei $z_i = z_j$ für $i \neq j$ und bei $z_i = u_j$. Als Funktion von u_1 und u_2 sind diese Amplituden analytisch, abgesehen von möglichen Polen bei $u_i = z_j$ und einem möglichen 'branch cut' bei $u_1 = u_2$.

(iii) Die Amplituden sind Möbius-invariant, wobei das konforme Gewicht von ϕ_i gerade $r_i \in \mathbb{R}$ ist: für jede Möbiustransformation $\gamma(z)$ gilt

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_{j=1}^{n} V(\psi_j, z_j) W_\alpha(\phi_1, u_1) W_\beta(\phi_2, u_2) \right\rangle \ &= \ \prod_{j=1}^{n} (\gamma'(z_j))^{h_j} \prod_{l=1}^{2} (\gamma'(u_l))^{r_l} \times \\ & \times \left\langle \prod_{j=1}^{n} V(\psi_j, \gamma(z_j)) W_\alpha(\phi_1, \gamma(u_1)) W_\beta(\phi_2, \gamma(u_2)) \right\rangle \, . \end{aligned}$$

(iv) Die Amplituden erfüllen die *konforme Höchstgewichtsbedingung*: sie erfüllen das Analogon von (v) in 4.3, nämlich

$$\begin{aligned}
\langle L(w) \quad \prod_{j=1}^m \quad & L(w_j) \prod_{i=1}^n V(\psi_i, z_i) W_\alpha(\phi_1, u_1) W_\beta(\phi_2, u_2)\rangle \\
= \qquad & \sum_{k=1}^m \frac{2}{(w-w_k)^2} \langle \prod_{j=1}^m L(w_j) \prod_{i=1}^n V(\psi_i, z_i) W_\alpha(\phi_1, u_1) W_\beta(\phi_2, u_2)\rangle \\
+ \qquad & \sum_{l=1}^n \frac{h_l}{(w-z_l)^2} \langle \prod_{j=1}^m L(w_j) \prod_{i=1}^n V(\psi_i, z_i) W_\alpha(\phi_1, u_1) W_\beta(\phi_2, u_2)\rangle \\
+ \qquad & \sum_{s=1}^2 \frac{r_s}{(w-u_s)^2} \langle \prod_{j=1}^m L(w_j) \prod_{i=1}^n V(\psi_i, z_i) W_\alpha(\phi_1, u_1) W_\beta(\phi_2, u_2)\rangle \\
+ \qquad & \sum_{k=1}^m \frac{1}{(w-w_k)} \frac{d}{dw_k} \langle \prod_{j=1}^m L(w_j) \prod_{i=1}^n V(\psi_i, z_i) W_\alpha(\phi_1, u_1) W_\beta(\phi_2, u_2)\rangle \\
+ \qquad & \sum_{l=1}^n \frac{1}{(w-z_l)} \frac{d}{dz_l} \langle \prod_{j=1}^m L(w_j) \prod_{i=1}^n V(\psi_i, z_i) W_\alpha(\phi_1, u_1) W_\beta(\phi_2, u_2)\rangle \\
+ \qquad & \sum_{s=1}^2 \frac{1}{(w-u_s)} \frac{d}{du_s} \langle \prod_{j=1}^m L(w_j) \prod_{i=1}^n V(\psi_i, z_i) W_\alpha(\phi_1, u_1) W_\beta(\phi_2, u_2)\rangle \\
+ \qquad & \sum_{k=1}^m \frac{c/2}{(w-w_k)^4} \langle \prod_{j\neq k} L(w_j) \prod_{i=1}^n V(\psi_i, z_i) W_\alpha(\phi_1, u_1) W_\beta(\phi_2, u_2)\rangle \,.
\end{aligned}$$

Falls weiterhin in der Amplitude

$$\langle V(\psi_1, z_1) V(\psi_2, z_2) \cdots V(\psi_n, z_n) W_\alpha(\phi_1, u_1) W_\beta(\phi_2, u_2)\rangle \tag{5.1.3}$$

der Pol für $z_i = u_j$ höchstens von Ordnung h_i ist (für alle $\psi \in V$), erfüllen die Amplituden die *allgemeine Höchstgewichtsbedingung*.

(v) Die Amplituden definieren eine *Darstellung* der meromorphen konformen Feldtheorie: für jedes $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ gibt es einen Zustand $\Sigma(\phi_1, \phi_2; u_1, u_2) \in \mathcal{V}^{\mathcal{O}}$, so dass

$$\langle \prod_{i=1}^n V(\psi_i, z_i) W_\alpha(\phi_1, u_1) W_\beta(\phi_2, u_2)\rangle = \langle \prod_{i=1}^n V(\psi_i, z_i) \Sigma(\phi_1, \phi_2; u_1, u_2)\rangle \,, \tag{5.1.4}$$

wobei $z_i \in \mathcal{O}$.

Die letzte Bedingung garantiert, dass alle Relationen, die in der meromorphen konformen Feldtheorie gelten (zum Beispiel die Dualitätsrelation (4.2.36), *etc.*) auch in den Amplituden, die ϕ_1 und ϕ_2 involvieren, erfüllt sind. In diesem Sinn definieren daher diese Amplituden eine Darstellung der meromorphen konformen Feldtheorie.

Es ist relativ offensichtlich, dass man wie zuvor topologische Vektorräume $\mathcal{V}_\alpha^{\mathcal{O}}$ und $\mathcal{V}_\beta^{\mathcal{O}}$ konstruieren kann, und dass die Vertexoperatoren $V(\psi, z)$ kontinuierliche Operatoren auf diesen Räumen definieren. Entsprechend kann man dann auch die Fockräume $\mathcal{F}_\alpha$

und $\mathcal{F}_\beta$ definieren; diese werden durch die Wirkung von $V_n(\psi)$ von $\phi_1 \in W_\alpha$ und $\phi_2 \in W_\beta$ generiert. Im folgenden werden wir uns wiederum hauptsächlich mit diesen Fockräumen beschäftigen.

Ein zentraler Punkt, der häufig nicht besonders klar gemacht wird, ist dass die Darstellungsbedingung (zusammen mit der allgemeinen Höchstgewichtsbedingung) die Menge der Höchstgewichtsdarstellungen dramatisch einschränkt. Um dies zu verstehen, ist es nützlich ein Beispiel im Detail zu erklären.

5.2 Darstellungen der SU(2) Theorie

Betrachten wir das Beispiel der affinen SU(2) Theorie mit level k. Wie wir in Kapitel 4.4 gesehen haben, enthält in diesem Fall das Vermamodul der Vakuumdarstellung den Nullvektor

$$\mathcal{N} = \left(J^+_{-1}\right)^{k+1} \Omega\,. \tag{5.2.1}$$

Wie wir dort erklärt haben, verschwindet der diesem Zustand zugeordnete Vertexoperator in jeder Amplitude der meromorphen Theorie. Die Darstellungsbedingung (v) impliziert daher, dass dieser Vertexoperator auch auf dem Fockraum $\mathcal{F}_\alpha$ verschwinden muss. Insbesondere bedeutet das auch, dass jeder seiner Moden $V_n(\mathcal{N})$ auf dem Fockraum verschwinden muss. Mit Hilfe der Dualitätsrelation können wir diese Moden durch die Moden J^+_l ausdrücken; insbesondere findet man, dass

$$V_0(\mathcal{N}) = \left(J^+_0\right)^{k+1} + \sum_{l_1+\cdots l_{k+1}=0} c_{\mathbf{l}} \prod_{i=1}^{k+1} J^+_{l_i}\,, \tag{5.2.2}$$

wobei $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_{k+1})$ und $c_{\mathbf{l}}$ Konstanten sind (mit $c_{0,\ldots,0} = 0$), die im Prinzip bestimmt werden können.

Nun wollen wir annehmen, dass die Darstellung die allgemeine Höchstgewichtsbedingung erfüllt. Mit $\psi = J^+$ gilt dann, dass der Pol in

$$J^+(z)\phi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{-n-1}\, J^+_n\, \phi \tag{5.2.3}$$

höchstens von erster Ordnung ist. Dies impliziert gerade, dass

$$J^+_n \phi = 0 \qquad \text{für alle } n > 0. \tag{5.2.4}$$

[Falls die Darstellung die allgemeine Höchstgewichstbedingung erfüllt gilt mit demselben Argument, dass

$$V_n(\psi)\phi = 0 \qquad \text{für alle } n > 0. \tag{5.2.5}$$

für alle $\psi \in V$. Vektoren ϕ, die diese Eigenschaft erfüllen, werden Höchstgewichtsvektoren genannt.] Mit (5.2.2) gilt daher dann

$$V_0(\mathcal{N})\phi = \left(J^+_0\right)^{k+1} \phi = 0\,, \tag{5.2.6}$$

da die übrigen Terme in (5.2.2) alle zumindest einen Mode J_l^+ mit $l > 0$ enthalten. Der Zustand ϕ generiert eine Darstellung der (endlichen) Lie Algebra von SU(2) durch die Wirkung von J_0^a. Alle Vektoren dieser Darstellung erfüllen die 'Höchstgewichtsbedingung' (5.2.4), da $[J_n^a, J_0^b] = f_c^{ab} J_n^c$. Daher muss auch (5.2.6) für alle Vektoren dieser Darstellung gelten. Dies impliziert dann, dass der Spin dieser Darstellung halbganz sein muss, und dass weiterhin $j \leq k/2$. Man kann relativ leicht sehen, dass die Höchstgewichtsdarstellung durch die SU(2) Darstellung auf den Höchstgewichtszuständen eindeutig festgelegt ist. Die obige Analyse impliziert daher, dass die SU(2) Theorie für positives ganzes k nur endlich viele Höchstgewichtsdarstellungen besitzt. Meromorphe Theorien mit dieser Eigenschaft werden üblicherweise *rational* genannt.

Die Höchstgewichtsdarstellungen, deren Höchstgewichtszustände eine SU(2) Darstellung mit $j \leq k/2$ definieren, sind auch gerade dadurch ausgezeichnet, dass sie die einzigen unitären Höchstgewichtsdarstellungen der affinen SU(2) Algebra mit level k sind, bezüglich dessen Skalarprodukt die hermitische Konjugation gerade durch

$$\left(J_n^{\pm}\right)^\dagger = J_{-n}^{\mp} \qquad (H_n)^\dagger = H_{-n} \tag{5.2.7}$$

gegeben ist. [Obgleich ein solcher Zusammenhang für alle (?) rationalen unitären meromorphen konformen Feldtheorien zu bestehen scheint, gibt es bislang dafür kein allgemeines Argument.] Der Umstand, dass $j \leq k/2$ eine notwendige Bedingung ist, kann leicht gezeigt werden. Sei ϕ ein Höchstgewichtszustand mit $\langle \phi, \phi \rangle > 0$ und $H_0 \phi = j\phi$. Dann gilt

$$||J_{-1}^+ \phi||^2 = \langle \phi, J_1^- J_{-1}^+ \phi \rangle = \langle \phi, (k - 2H_0)\phi \rangle = (k - 2j)\langle \phi, \phi \rangle \,, \tag{5.2.8}$$

wobei wir ausgenützt haben, dass $J_1^- \phi = 0$ (wegen der Höchstgewichtsbedingung). Falls $j > k/2$ für irgendeinen Höchstgewichtszustand wäre, dann wäre (5.2.8) negativ, und das Skalarprodukt wäre nicht positiv definit.

5.3 Die Zhu'sche Algebra

Die obige Analyse kann formalisiert werden; dies ist der Inhalt der Konstruktion der sogenannten *Zhu'schen Algebra*. Sei eine Darstellung gegeben, die die allgemeine Höchstgewichtsbedingung erfüllt. Für das folgende ist es bequem $u_1 = \infty$ und $u_2 = -1$ zu wählen; dies kann zum Beispiel durch die Möbiustransformation

$$\gamma(z) = \frac{u_1 - u_2}{z - u_1} \tag{5.3.1}$$

erreicht werden. [Da $\gamma'(z) = \frac{(u_2 - u_1)}{(z - u_1)^2}$ ist, verhalten sich die Amplituden im Limes $u_1 \to \infty$ wie $u_1^{-2r_1}$; die Amplituden für $u_1 = \infty$ können daher auch durch

$$\langle \phi_1 | \prod_{j=1}^{n} V(\psi_i, z_i) W_\beta(\phi_2, u_2) \rangle \equiv \lim_{u_1 \to \infty} u_1^{2r_1} \langle \prod_{j=1}^{n} V(\psi_i, z_i) W_\alpha(\phi_1, u_1) \, W_\beta(\phi_2, u_2) \rangle \tag{5.3.2}$$

definiert werden. Wir haben hier die (übliche) Konvention benützt, Vektoren bei $u = \infty$ als bra-Vektoren zu schreiben.]

Die Darstellungsbedingung (v) impliziert, dass diese Amplituden einen Zustand $\Sigma(\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{V}^{\mathcal{O}}$ definieren, wobei $\mathcal{O}$ so gewählt werden kann, dass es eine offene Umgebung des Ursprungs enthält. Der Zustand $\Sigma(\phi_1, \phi_2)$ definiert insbesondere ein lineares Funktional auf dem Fockraum $\mathcal{F}$. Die Idee der Zhu'schen Analyse ist es, den Unterraum des Fockraumes zu charakterisieren, auf dem dieses Funktional verschwindet. Seien ψ und χ zwei Elemente des Fockraumes, wobei ψ konformes Gewicht h hat. Dann definieren wir $V^{(N)}(\psi)\chi \in \mathcal{F}$ durch

$$V^{(N)}(\psi)\chi = \oint_0 \frac{dw}{w^{N+1}} (w+1)^h \, V(\psi, w) \, \chi \,, \tag{5.3.3}$$

wobei N eine beliebige ganze Zahl ist, und das Linienintegral entlang eines kleinen Kreises (mit Radius kleiner als eins) um $w = 0$ genommen wird. Falls die Darstellung die allgemeine Höchstgewichtsbedingung erfüllt, dann gilt

$$\langle \Sigma(\phi_1, \phi_2) \;\; V^{(N)}(\psi)\chi \rangle = 0 \qquad \text{für } N > 0. \tag{5.3.4}$$

Dies folgt einfach daher, dass der Integrand in (5.3.4) keine Pole bei $w = -1$ oder $w = \infty$ hat.

Wir definieren dann den Unterraum $O(\mathcal{F})$ von $\mathcal{F}$, der durch alle Zustände der Form (5.3.3) mit $N > 0$ generiert wird, und weiterhin den Quotientenraum

$$A(\mathcal{F}) = \mathcal{F}/O(\mathcal{F}) \,. \tag{5.3.5}$$

Nach Konstruktion definiert jede allgemeine Höchstgewichtsdarstellung ein lineares Funktional auf $A(\mathcal{F})$. Falls zwei Darstellungen dasselbe Funktional definieren, beschreiben sie äquivalente Darstellungen; die Anzahl der Höchstgewichtsdarstellungen ist daher durch die Dimension von $A(\mathcal{F})$ majorisiert. (Wie wir weiter unten sehen werden, ist die Zahl der inäquivalenten Darstellungen im allgemeinen tatsächlich kleiner.) Insbesondere ist die Theorie rational, falls $A(\mathcal{F})$ endlich dimensional ist.

Der Quotientenraum $A(\mathcal{F})$ hat allerdings noch eine weitere Struktur: er definiert nämlich eine *assoziative Algebra*, wobei das Produkt durch

$$\psi * \chi \equiv V^{(0)}(\psi)\chi \tag{5.3.6}$$

definiert ist. Bezüglich des Zustandes $\Sigma(\phi_1, \phi_2)$ hat dieses Produkt eine einfache Interpretation: es folgt aus (5.3.3), dass

$$\langle \Sigma(\phi_1, \phi_2) \;\; V^{(0)}(\psi)\chi \rangle = \langle \Sigma(V_0(\psi)\phi_1, \phi_2) \;\; \chi \rangle \,. \tag{5.3.7}$$

Um die Algebraeigenschaft zu beweisen, ist es am einfachsten, eine zweite Wirkung zu definieren, bei der die Rollen von u_1 und u_2 vertauscht sind. Dazu definieren wir

$$V_c^{(N)}(\psi) = (-1)^N \oint \frac{dw}{w} \frac{1}{(w+1)} \left(\frac{w+1}{w}\right)^N (w+1)^h \, V(\psi, w) \;, \tag{5.3.8}$$

wobei wir angenommen haben, dass ψ wiederum konformes Gewicht h hat. Wie zuvor definieren wir dann den Unterraum $O_c(\mathcal{F})$, der durch Vektoren der Form $V_c^{(N)}(\psi)\chi$ mit $N > 0$ aufgespannt wird. Dieser Unterraum stimmt tatsächlich mit $O(\mathcal{F})$ überein. Um dies zu sehen, beobachten wir zunächst, dass $V^{(1)}(\psi) = -V_c^{(1)}(\psi)$, und wir bezeichnen diesen Operator mit $N(\psi)$, d.h. $N(\psi) = V^{(1)}(\psi) = -V_c^{(1)}(\psi)$. Falls ψ konformes Gewicht h_ψ hat, dann gilt

$$\begin{aligned} V^{(N)}(L_{-1}\psi) &= \oint_0 \frac{dw}{w^{N+1}} (w+1)^{h_\psi+1} \frac{dV(\psi,w)}{dw} \\ &= -\oint_0 dw \frac{d}{dw}\left(\frac{(w+1)^{h_\psi+1}}{w^{N+1}}\right) V(\psi,w) \\ &= (N-h_\psi)\, V^{(N)}(\psi) + (N+1)\, V^{(N+1)}(\psi)\,, \end{aligned} \tag{5.3.9}$$

und daher gilt, für $N \neq -1$,

$$V^{(N+1)}(\psi) = \frac{1}{N+1}\, V^{(N)}(L_{-1}\psi) - \frac{N-h_\psi}{N+1}\, V^{(N)}(\psi)\,. \tag{5.3.10}$$

Entsprechend gilt

$$V_c^{(N+1)}(\psi) = -\frac{1}{N+1}\, V_c^{(N)}(L_{-1}\psi) - \frac{N+h_\psi}{N+1}\, V_c^{(N)}(\psi)\,. \tag{5.3.11}$$

Wegen (5.3.10) wird $O(\mathcal{F})$ von den Zuständen der Form $N(\psi)\chi$ aufgespannt, und das gleiche gilt auch für $O_c(\mathcal{F})$ wegen (5.3.11); diese beiden Unterräume stimmen daher überein.

Dies impliziert insbesondere, dass (5.3.4) auch gilt, falls $V^{(N)}(\psi)$ durch $V_c^{(N)}(\psi)$ ersetzt wird. Ausserdem folgt direkt aus der Definition von $V_c^{(N)}(\psi)$, dass das Analogon von (5.3.7) nun

$$\langle \Sigma(\phi_1,\phi_2)\; V_c^{(0)}(\psi)\chi\rangle = \langle \Sigma(\phi_1, V_0(\psi)\phi_2)\;\chi\rangle \tag{5.3.12}$$

ist. Man sollte daher erwarten, dass die Wirkung von $V_L(\psi) \equiv V^{(0)}(\psi)$ und $V_R(\psi) \equiv V_c^{(0)}(\chi)$ bis auf Operatoren der Form $N(\mathcal{F})$ miteinander vertauschen. Um dies zu beweisen, betrachte den Fall, dass ψ und χ konformes Gewicht h_ψ und h_χ haben. Dann gilt

$$\begin{aligned} [V_L(\psi), V_R(\chi)] &= \oint\oint_{|\zeta|>|w|} \frac{d\zeta}{\zeta}(\zeta+1)^{h_\psi}\frac{dw}{w}(w+1)^{h_\chi-1}V(\psi,\zeta)V(\chi,w) \\ &\qquad - \oint\oint_{|z|>|\zeta|} \frac{dw}{w}(w+1)^{h_\chi-1}\frac{d\zeta}{\zeta}(\zeta+1)^{h_\psi}V(\chi,w)V(\psi,\zeta) \\ &= \oint_0 \left\{\oint_w \frac{d\zeta}{\zeta}(\zeta+1)^{h_\psi}V(\psi,\zeta)V(\chi,w)\right\}\frac{dw}{w}(w+1)^{h_\chi-1} \\ &= \sum_n \oint_0 \left\{\oint_w \frac{d\zeta}{\zeta}(\zeta+1)^{h_\psi}V(V_n(\psi)\chi,w)(\zeta-w)^{-n-h_\psi}\right\}\frac{dw}{w}(w+1)^{h_\chi-1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{h_\chi \geq n \geq -h_\psi+1} \sum_{l=0}^{n+h_\psi-1} (-1)^l \binom{h_\psi}{l+1-n} \\
&\qquad \oint_0 \frac{dw}{w(w+1)} \left(\frac{w+1}{w}\right)^{l+1} (w+1)^{h_\chi - n} V(V_n(\psi)\chi, w) \\
&\in \; N(\mathcal{H})\,.
\end{aligned} \tag{5.3.13}
$$

Wegen (5.3.11), kann jedes Element in $N(\mathcal{F})$ als $V_R(\phi)$ für ein geeignetes ϕ geschrieben werden. Daher impliziert (5.3.13), dass $[V_L(\psi), V^{(N)}(\chi)] \in N(\mathcal{F})$ für $N > 0$; daher definiert $V_L(\psi)$ einen Endomorphismus von $A(\mathcal{F})$.

Seien Φ_1 und Φ_2 zwei Endomorphismen von $\mathcal{F}$, die $O(\mathcal{F})$ in sich abbilden (und daher einen Endomorphismus von $A(\mathcal{F})$ definieren). Wir nennen zwei solche Endomorphismen äquivalent, $\Phi_1 \approx \Phi_2$, falls sie als Endomorphismen von $A(\mathcal{F})$ übereinstimmen, d.h. falls $(\Phi_1 - \Phi_2)\mathcal{F} \subset O(\mathcal{F})$. Entsprechend schreiben wir $\phi \approx 0$ falls $\phi \in O(\mathcal{F})$.

Es gilt nun das folgende Eindeutigkeitstheorem (das analog zu dem Eindeutigkeitstheorem für Vertexoperatoren ist):

Eindeutigkeitstheorem für Zhu'sche Moden: Sei Φ ein Endomorphismus von $\mathcal{F}$, der $O(\mathcal{F})$ in sich abbildet. Falls Φ die beiden Eigenschaften (a) $\Phi\Omega = \psi$; und (b) $[\Phi, V_R(\chi)] \in N(\mathcal{F})$ für alle $\chi \in \mathcal{F}$ hat, dann gilt $\Phi \approx V_L(\psi)$.

Beweis: Dies folgt einfach aus der Rechnung

$$
\Phi\,\chi = \Phi\, V_R(\chi)\Omega \approx V_R(\chi)\,\Phi\,\Omega = V_R(\chi)\psi = V_L(\psi)\chi\,. \tag{5.3.14}
$$

Hier haben wir benützt, dass $V_R(\psi)\Omega = V_L(\psi)\Omega = \psi$.

Es folgt nun direkt, dass

$$
V_L(V_L(\psi)\chi) \approx V_L(\psi)V_L(\chi)\,, \tag{5.3.15}
$$

und insbesondere daher, dass $V_L(N(\psi)\chi) \approx N(\psi)V_L(\chi)$.

Dieses letzte Resultat impliziert, dass das Produkt $\phi *_L \psi$ eine assoziatives Produkt auf $A(\mathcal{F})$ definiert, d.h. dass

$$
(\phi * \psi) * \chi = \phi * (\psi * \chi)\;. \tag{5.3.16}
$$

$A(\mathcal{F})$ ist daher eine Algebra. Wegen (5.3.7) ist es klar, dass zwei Funktionale, die sich durch die Wirkung von $V^{(0)}(\psi)$ unterscheiden, dieselbe Darstellung definieren. In der Tat kann man beweisen, dass die Höchstgewichtsdarstellungen der meromorphen konformen Feldtheorie in eins zu eins Korrespondenz zu den Darstellungen der Zhu'schen Algebra stehen. Insbesondere ist daher eine meromorphe konforme Feldtheorie rational, falls die Zhu'sche Algebra endlich dimensional ist.

5.3.1 Nochmals das SU(2) Beispiel

Es ist instruktiv, die Analyse für die SU(2) Theorie nochmals im Rahmen des Zhu'schen Formalismus zu beschreiben. Da das Feld J^a konformes Gewicht $h = 1$ hat, gilt

$$
V^{(N)}(J^a) = \oint_0 \frac{dw}{w^{N+1}}\,(w+1)\;J^a(w) = \oint_0 \frac{dw}{w^{N+1}}\,J^a(w) + \oint_0 \frac{dw}{w^N}\,J^a(w) = J^a_{-N-1} + J^a_{-N}\,. \tag{5.3.17}
$$

Insbesondere ist daher also

$$V^{(0)}(J^a) = J^a_{-1} + J^a_0 \,, \tag{5.3.18}$$

und man findet

$$\begin{aligned}
[V^{(0)}(J^a), V^{(0)}(J^b)] &= [J^a_{-1} + J^a_0, J^b_{-1} + J^b_0] \\
&= f^{ab}_c \left[J^c_{-2} + 2J^c_{-1} + J^c_0 \right] \\
&= f^{ab}_c \left[V^{(1)}(J^c) + V^{(0)}(J^c) \right] \\
&\approx f^{ab}_c V^{(0)}(J^c) \,.
\end{aligned} \tag{5.3.19}$$

Weiterhin ist

$$\mathcal{N} = \left(V^{(0)}(J^+) \right)^{k+1} \Omega \tag{5.3.20}$$

wiederum null. Die Darstellungen der Zhu'schen Algebra sind daher wiederum gerade die Darstellungen von SU(2) mit $j \leq k/2$.

5.3.2 Die Yang-Lee Theorie

Ein andere Klasse von interessanten Beispielen sind die sogenannten *minimalen Modelle*. Die meromorphe konforme Feldtheorie ist in diesem Fall einfach die Virasoro Theorie so wie sie in 4.4.4 beschrieben wurde. Diese Theorie ist rational falls die zentrale Ladung c spezielle Werte annimmt, nämlich, wenn

$$c = c_{p,q} = 1 - \frac{6(p-q)^2}{pq} \,, \tag{5.3.21}$$

wobei p und q zwei relativ prime positive ganze Zahlen sind. Das einfachste minimale Modell ist die sogenannte Yang-Lee Theorie, für die $(p,q) = (2,5)$; dies führt zu $c = -\frac{22}{5}$. [Diese Theorie ist übrigens nicht unitär, da c negativ ist, und daher der Zustand $L_{-2}\Omega$ negative Norm hat. Die unitären minimalen Modelle sind genau die Untermenge der obigen Theorien, für die $q = p + 1$.]

Der Grund dafür, dass diese Theorien rational sind, liegt darin, dass der Fockraum $\mathcal{F}$ zusätzlich zu dem 'trivialen' singulären Vektor $\mathcal{N}_1 = L_{-1}\Omega$ noch einen weiteren singulären Vektor besitzt. Dieser tritt bei konformem Gewicht $h = (p-1)(q-1)$ auf. Für den Fall der Yang-Lee Theorie ist $h = 4$, und der singuläre Vektor ist explizit durch

$$\mathcal{N} = \left(L_{-4} - \frac{5}{3} L_{-2}^2 \right) \Omega \tag{5.3.22}$$

gegeben. Für das Virasoro Feld sind die Zhu Moden gerade

$$\begin{aligned}
V^{(0)}(L) &= (L_0 + 2L_{-1} + L_{-2}) \\
V^{(1)}(L) &= (L_{-1} + 2L_{-2} + L_{-3}) \\
V^{(2)}(L) &= (L_{-2} + 2L_{-3} + L_{-4}) \,,
\end{aligned} \tag{5.3.23}$$

wie man leicht aus (5.3.3) berechnet. Um den Quotientenraum $A(\mathcal{F})$ zu berechnen, können wir alle Zustände der Form $V^{(N)}(L)\psi$ mit $N > 0$ wegwerfen; wir können daher jeden Zustand der Form $L_{-n}\psi$ mit $n \geq 3$ durch eine Linearkombination von Zuständen der Form $L_{-m}\psi$ mit $m < n$ ersetzen. Rekursives Anwenden dieses Argumentes zeigt, dass wir annehmen können, dass $A(\mathcal{F})$ von Zuständen der Form

$$L_{-2}^{l}\Omega \tag{5.3.24}$$

aufgespannt wird, wobei $l = 0, 1, 2, \ldots$. Wegen des Nullvektors (5.3.22) können wir schliesslich den Zustand mit $l = 2$ durch $L_{-4}\Omega$ ersetzen, und wiederum das obige Argument anwenden. Dies beweist, dass $A(\mathcal{F})$ höchstens zwei-dimensional ist, und dass $A(\mathcal{F})$ von (5.3.24) mit $l = 0, 1$, aufgespannt wird.

Schliesslich wollen wir die Algebrastruktur verstehen. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} L * L &= V^{(0)}(L)L_{-2}\Omega \\ &= \left(L_{-2}^2 + 2L_{-1}L_{-2} + L_0 L_{-2}\right)\Omega \\ &= \left(\frac{3}{5}L_{-4} + 2L_{-3} + 2L_{-2}\right)\Omega\,, \end{aligned} \tag{5.3.25}$$

wobei wir die Nullvektorrelation (5.3.22) benützt haben, sowie $L_{-1}\Omega = 0$ in der letzten Zeile. Schliesslich können wir ausnützen, dass wir Zustände der Form $V^{(N)}(L)\psi$ mit $N > 0$ wegwerfen können:

$$\begin{aligned} L * L &\cong \left(\frac{3}{5}L_{-4} + 2L_{-3} + 2L_{-2}\right)\Omega - \frac{3}{5}V^{(2)}(L)\Omega \\ &= \left(\frac{3}{5}L_{-4} + 2L_{-3} + 2L_{-2}\right)\Omega - \frac{3}{5}\left(L_{-4} + 2L_{-3} + L_{-2}\right)\Omega \\ &= \left(\frac{4}{5}L_{-3} + \frac{7}{5}L_{-2}\right)\Omega \\ &\cong \left(\frac{4}{5}L_{-3} + \frac{7}{5}L_{-2}\right)\Omega - \frac{4}{5}V^{(1)}(L)\Omega \\ &= \left(\frac{4}{5}L_{-3} + \frac{7}{5}L_{-2}\right)\Omega - \frac{4}{5}\left(L_{-3} + 2L_{-2} + L_{-1}\right)\Omega \\ &= -\frac{1}{5}L_{-2}\Omega\,. \end{aligned} \tag{5.3.26}$$

Diese Rechnung zeigt, dass wir in der Zhu'schen Algebra die Relation

$$L * L + \frac{1}{5}L = L * \left(L + \frac{1}{5}\right) = 0 \tag{5.3.27}$$

haben. Die einzigen irreduziblen Darstellung dieser Algebra (und daher der zugehörigen meromorphen konformen Feldtheorie) sind daher durch

$$\begin{aligned} h &= 0 \qquad\qquad \text{(Vakuum)} \\ h &= -\frac{1}{5} \end{aligned} \tag{5.3.28}$$

gegeben, d.h. der Höchstgewichtsvektor ist ein Eigenvektor von L_0 mit Eigenwert $h = 0$ oder $h = -1/5$. Dies reproduziert gerade die Darstellungen der sogenannten Kac Liste für den Fall des $(2,5)$ Models. [In der Kac Liste sind gerade diejenigen Höchstgewichtsdarstellungen enthalten, die zwei unabhängige nicht-trivale singuläre Vektoren besitzen.] Für das (p,q) minimale Modell enthält die Kac Liste gerade die Höchstgewichtsdarstellungen, für die h durch

$$h_{r,s} = \frac{(rq - sp)^2 - (p-q)^2}{4pq} \tag{5.3.29}$$

gegeben ist, wobei $1 \leq r \leq p-1$, $1 \leq s \leq q-1$ und $h_{r,s} = h_{p-r,q-s}$. Für $(p,q) = (2,5)$, gilt deshalb $h_{1,1} = h_{1,4} = 0$ und $h_{1,2} = h_{1,3} = -\frac{1}{5}$.

Übungsaufgabe: Reproduziere diese Analyse für den Fall des einfachsten unitären minimalen Modells, des sogenannten Ising Modells mit $(p,q) = (3,4)$.

5.4 Das C_2 Kriterium

Die Zhu'sche Algebra beschreibt einen grossen Teil der Struktur der meromorphen konformen Feldtheorie. In der Praxis ist es jedoch oftmals schwierig, die Zhu'sche Algebra explizit zu berechnen. Die rationalen Theorien sind dadurch charakterisiert, dass sie nur endlich viele inäquivalente irreduzible Höchstgewichtsdarstellungen besitzen; dies ist dazu äquivalent, dass die Zhu'sche Algebra endlich dimensional ist. Es ist daher von Interesse, ein einfaches Kriterium zu haben, dass zumindest impliziert, dass die Zhu'sche Algebra endlich dimensional ist. Ein solches Kriterium ist das sogenannote C_2 Kriterium von Zhu.

Das C_2 Kriterium ist ein Spezialfall einer ganzen Klasse von Kriterien. Sei p eine ganze positive Zahl. Wir definieren den Unterraum O_p von $\mathcal{F}$, der durch die Vektoren der Form

$$V_{-h_\psi - n}(\psi)\chi \qquad n \geq p-1 \tag{5.4.1}$$

aufgespannt wird. Die meromorphe konforme Feldtheorie erfüllt dann das C_p Kriterium, falls der Quotientenraum

$$A_p(\mathcal{F}) = \mathcal{F}/O_p \tag{5.4.2}$$

endlich dimensional ist. Es ist offensichtlich, dass jede meromorphe konforme Feldtheorie das C_1 Kriterium erfüllt, da $\psi = V_{-h_\psi}(\psi)\Omega$, und daher $O_1 = \mathcal{F}$. Ausserdem ist klar, dass falls die Theorie das C_p Kriterium erfüllt, sie auch das C_q Kriterium mit $q \leq p$ erfüllt. Eine besondere Rolle nimmt das C_2 Kriterium ein, da man zeigen kann [Gaberdiel & Neitzke], dass es das C_p Kriterium für jedes $p \geq 2$ impliziert! Ausserdem impliziert das C_2 Kriterium, dass die Zhu'sche Algebra endlich dimensional ist. Um dies zu sehen, wertet man (5.3.3) explizit aus

$$V^{(N)}(\psi) = \sum_{l=0}^{h} \binom{h}{l} V_{-h-N+l}(\psi)\,. \tag{5.4.3}$$

Der führende Term in $V^{(N)}(\psi)$ (d.h. der Term mit der negativsten Mode) ist gerade $V_{-h-N}(\psi)$; alle Zustände der Form $V_{-h-N}(\psi)\chi$ liegen in O_2, und ein einfaches Induktionsargument zeigt dann, dass das C_2 Kriterium impliziert, dass auch $A(\mathcal{F})$ endlich dimensional sein muss.

Es wird vermutet, dass auch die Umkehrung stimmt, d.h. dass das C_2 Kriterium erfüllt ist, falls die Zhu'sche Algebra endlich dimensional ist, aber bislang konnte das noch nicht bewiesen werden. Für viele rationale Theorien gilt übrigens, dass

$$\dim(A(\mathcal{F})) = \dim(A_2(\mathcal{F})) , \tag{5.4.4}$$

aber diese Beziehung ist im allgemeinen nicht richtig; das einfachste Gegenbeispiel ist die e_8 affine Theorie mit $k = 1$ für die $\dim(A(\mathcal{F})) = 1$, aber $\dim(A_2(\mathcal{F})) \geq 249$.

Das C_2 Kriterium impliziert auch, dass der Charakter jeder Höchstgewichtsdarstellung (in einem geeigneten Bereich) konvergiert. Dies ist für die Beschreibung der modularen Eigenschaften einer rationalen meromorphen konformen Feldtheorie von zentraler Bedeutung.

5.5 Charaktere und modulare Eigenschaften

Die Charaktere (und ihre modularen Eigenschaften) sind für die meisten rationalen konformen Feldtheorien bekannt. In vielen Fällen (zum Beispiel für die affinen Theorien oder die minimalen Modelle) basiert ihre Ableitung jedoch auf relativ tiefen Ergebnissen der Darstellungstheorie der zugehörigen Algebren (im Fall der affinen Theorie zum Beispiel berechnet man die Charaktere mit Hilfe der sogenannoten Kac-Weyl Charakter Formel). Um zu verstehen, wie man Charaktere im Prinzip ausrechnet, ist es daher vermutlich instruktiver, ein einfacheres Beispiel zu besprechen, für das alles sehr explizit und direkt ausgewertet werden kann. Zum Beispiel ist dies für die Gittertheorien der Fall.

Sei also Λ ein gerades Gitter der Dimension d. Die zugehörige meromorphe konforme Feldtheorie haben wir in Kapitel 4.4.2 eingeführt. Wie wir dort erklärt haben, ist der Fockraum der Theorie $\mathcal{H}_0 = \mathcal{F}$ gerade

$$\mathcal{H}_0 = \bigoplus_{\mathbf{k}\in\Lambda} \mathcal{F}_{\mathbf{k}} , \tag{5.5.1}$$

wobei $\mathcal{F}_{\mathbf{k}}$ der Raum der Zustände ist, die durch die Wirkung der d Oszillatoren α^i_{-n}, $i = 1, \ldots, d$ auf dem Grundzustand $|\mathbf{k}\rangle$ erzeugt werden. Dabei ist der Grundzustand $|\mathbf{k}\rangle$ dadurch charakterisiert, dass

$$\alpha^i_n \, |\mathbf{k}\rangle = \delta_{n,0} \, k^i \, |\mathbf{k}\rangle \qquad \text{für } n \geq 0. \tag{5.5.2}$$

Da diese Zustände durch die Wirkung der Operatoren $V_n(\psi)$ vom Vakuum Ω erzeugt werden, nennt man $\mathcal{H}_0$ auch häufig die Vakuumdarstellung.

Wie wir oben erklärt haben, sind die Höchstgewichtsdarstellungen dieser Theorie durch die Darstellungen der Zhu'schen Algebra charakterisiert. Wir wollen diese Analyse nicht im Detail für den vorliegenden Fall besprechen, sondern lediglich das Resultat erklären. [Die Analyse der Zhu'schen Algebra in diesem Fall ist übrigens relativ kompliziert.] Dazu benötigen wir das duale Gitter Λ^*,

$$\Lambda^* := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x} \cdot \mathbf{k} \in \mathbb{Z} \text{ für alle } \mathbf{k} \in \Lambda\}\,, \tag{5.5.3}$$

das wir bereits in Kapitel 4.4.2 eingeführt haben. Wie wir dort auch erklärt haben, ist Λ integral, da Λ gerade ist, und daher ist $\Lambda \subseteq \Lambda^*$. Wir können daher Λ^* nach Λ zerlegen, d.h. wir schreiben

$$\Lambda^* = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} (\mathbf{x}_i + \Lambda)\ , \tag{5.5.4}$$

wobei $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j \notin \Lambda$ falls $i \neq j$. Die Menge $\mathcal{I}$ kann natürlicherweise mit dem Quotientenraum

$$\mathcal{I} = \Lambda^*/\Lambda \tag{5.5.5}$$

identifiziert werden. $\mathcal{I}$ bildet natürlicherweise eine Gruppe (bezüglich Addition). Die Menge $\mathcal{I}$ ist endlich, da wir ihre Kardinalität wie folgt berechnen können: für eine Basis $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ von Λ [d.h. jedes Element von Λ kann als Linearkombination der $\mathbf{e}_i$ geschrieben werden, wobei die Koeffizienten alle ganze Zahlen sind] betrachten wir die Matrix der inneren Produkte,

$$M(\Lambda)_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j\,. \tag{5.5.6}$$

Dann ist

$$|\mathcal{I}| = \det(M(\Lambda))\,. \tag{5.5.7}$$

Die Determinante $\det(M(\Lambda))$ ist übrigens gerade das Quadrat des Volumens $\mathrm{Vol}(\Lambda)$ einer Einheitszelle von Λ; daher gilt $|\mathcal{I}| = \mathrm{Vol}^2(\Lambda)$.

Um diese Resultate zu illustrieren, betrachte den einfachsten Fall, für den das Gitter gerade das ein-dimensionale gerade Gitter ist, das durch

$$\Lambda = \{\sqrt{2}\,m : m \in \mathbb{Z}\} \tag{5.5.8}$$

definiert wird. Das duale Gitter ist in diesem Fall

$$\Lambda^* = \left\{\frac{n}{\sqrt{2}} : n \in \mathbb{Z}\right\}\ , \tag{5.5.9}$$

und die obige Zerlegung ist gerade

$$\Lambda^* = \Lambda + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \Lambda\right)\ . \tag{5.5.10}$$

In diesem Fall enthält $\mathcal{I}$ also gerade zwei Elemente, nämlich $\mathbf{x}_0 = 0$ und $\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Die innere Produktmatrix von Λ ist die 1×1 Matrix (d.h. die Zahl) $M(\Lambda) = 2$, und ihre Determinante ist in der Tat $\det M(\Lambda) = 2 = |\mathcal{I}|$.

Nach diesen Vorbereitungen können wir jetzt die Darstellungstheorie dieser meromorphen konformen Feldtheorie erklären. Die Theorie ist rational, d.h. es gibt nur endlich viele irreduzible Höchstgewichtsdarstellungen, und die verschiedenen Höchstgewichtsdarstellungen werden gerade durch die Elemente von $\mathcal{I}$ parametrisiert. Für $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ ist die zugehörige Darstellung gerade die Vakuumdarstellung, und für $i > 0$ ist ihr Fockraum einfach

$$\mathcal{H}_i = \bigoplus_{\mathbf{y}-\mathbf{x}_i \in \Lambda} \mathcal{F}_{\mathbf{y}} \,, \tag{5.5.11}$$

wobei $\mathcal{F}_{\mathbf{y}}$ der Fockraum ist, der durch die Wirkung der Oszillatoren α^i_{-n} von dem Grundzustand $|\mathbf{y}\rangle$ erzeugt wird, wobei $|\mathbf{y}\rangle$ genau wie (5.5.2) charakterisert ist, d.h.

$$\alpha^i_n \,|\mathbf{y}\rangle = \delta_{n,0}\, y^i \,|\mathbf{y}\rangle \qquad \text{für } n \geq 0. \tag{5.5.12}$$

Für jede Höchstgewichtsdarstellung definieren wir nun den *Charakter* durch

$$\chi_i(\tau) \equiv \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_i} \left(q^{L_0 - \frac{c}{24}} \right) \,, \tag{5.5.13}$$

wobei $q = e^{2\pi i \tau}$. Hier ist c die zentrale Ladung, die im gegebenen Fall gerade $c = d$ ist, und L_0 ist der Skalenoperator. Die Wirkung von L_0 auf $\mathcal{H}_i$ ist eindeutig durch

$$[L_0, \alpha^i_n] = -n\alpha^i_n \qquad L_0\,|\mathbf{y}\rangle = \frac{1}{2}\,\mathbf{y}^2\,|\mathbf{y}\rangle \tag{5.5.14}$$

beschrieben. Zum Beispiel gilt

$$L_0\, \alpha^{i_1}_{-n_1} \cdots \alpha^{i_l}_{-n_l} |\mathbf{y}\rangle = \left(\frac{1}{2}\mathbf{y}^2 + \sum_{r=1}^{l} n_r \right) \alpha^{i_1}_{-n_1} \cdots \alpha^{i_l}_{-n_l} |\mathbf{y}\rangle \,. \tag{5.5.15}$$

Der Charakter kann nun wie folgt berechnet werden. Zunächst bemerken wir, dass für jedes $\mathbf{y}$, der Fockraum $\mathcal{F}_{\mathbf{y}}$ gerade mit dem Vermamodul (bezüglich der Wirkung der d U(1) Algebren) übereinstimmt, d.h. dass eine Basis für $\mathcal{F}_{\mathbf{y}}$ gerade durch die Vektoren

$$\alpha^{i_1}_{-n_1} \cdots \alpha^{i_l}_{-n_l} |\mathbf{y}\rangle \tag{5.5.16}$$

gegeben ist, wobei $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_l$, und falls $n_r = n_{r+1}$ dann gilt $i_r \geq i_{r+1}$. Wir definieren nun die sogenannte *Dedekind eta-Funktion* durch

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \,. \tag{5.5.17}$$

Dann ist

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{F}_{\mathbf{y}}} \left(q^{L_0 - \frac{c}{24}} \right) = \frac{q^{\frac{1}{2}\mathbf{y}^2}}{\eta^d(\tau)} \,. \tag{5.5.18}$$

Der Vorfaktor $q^{\frac{1}{2}\mathbf{y}^2}$ trägt dem L_0-Eigenwert von $|\mathbf{y}\rangle$ Rechnung; wegen $d = c$ ist $q^{-c/24} = q^{-d/24}$ und daher stimmt $q^{-c/24}$ mit dem Vorfaktor der eta-Funktion überein. Schliesslich schreiben wir für jeden Term in der η-Funktion

$$\frac{1}{(1 - q^n)} = \sum_{l=0}^{\infty} q^{ln} \,. \tag{5.5.19}$$

Dieser Term beschreibt dann den Beitrag der Mode α_{-n} zum L_0-Eigenwert der Vektoren, in denen sie auftritt; dabei zählt l gerade die Anzahl der α_{-n} Moden, die in einem bestimmten Vektor auftreten. Das Produkt über alle n beschreibt dann alle Moden α_{-n} für alle positiven n, und die d-te Potenz trägt dem Umstand Rechnung, dass es d solche Moden gibt.

Wegen (5.5.18) können wir nun den Charakter jeder irreduziblen Darstellung direkt ausrechnen; es gilt nun einfach, dass

$$\chi_i(\tau) = \frac{1}{\eta^d(\tau)} \sum_{\mathbf{y}-\mathbf{x}_i\in\Lambda} q^{\frac{1}{2}\mathbf{y}^2} = \frac{1}{\eta^d(\tau)} \sum_{\mathbf{x}\in\Lambda} q^{\frac{1}{2}(\mathbf{x}+\mathbf{x}_i)^2} . \tag{5.5.20}$$

Wir wollen nun zeigen, dass der Raum aller dieser Charaktere gerade eine Darstellung der sogenannten *Modularen Gruppe* bildet; dies ist eine wichtige Eigenschaft aller rationaler konformer Feldtheorien. Wie wir später noch genauer erklären werden, ist sie wesentlich dafür verantwortlich, dass man konforme Feldtheorien auch konsistent auf Riemann'schen Flächen höheren Genus (insbesondere auf dem Torus) definieren kann. Dies ist wiederum für eine konsistente Stringinterpretation von grosser Wichtigkeit.

Um diese Eigenschaft zu beschreiben, müssen wir zunächst etwas ausholen, und Äquivalenzklassen von zwei-dimensionalen Tori beschreiben. Jeder zwei-dimensionale Torus T^2 kann als $T^2 = \mathbb{R}^2/\Lambda_\tau = \mathbb{C}/\Lambda_\tau$ gschrieben werden, wobei Λ_τ ein zwei-dimensionales (Euklidisches) Gitter ist. Zwei Tori, die sich durch eine Rotation oder Reskalieren des Gitters unterscheiden, beschreiben (konform) äquivalente Tori. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir daher annehmen, dass einer der beiden Basisvektoren von Λ_τ gerade $z = 1$ ist; wir bezeichnen dann den zweiten Basisvektor durch τ, wobei wir annehmen können, dass τ in der oberen Halbebene liegen muss. (Da $z = \tau$ und $z = 1$ linear unabhängig sein müssen, kann τ nicht reell sein. Falls τ in der unteren Halbebene liegt, können wir das Gitter durch τ^{-1} reskalieren und rotieren; danach sind die beiden Basisvektoren $z = \tau^{-1}$ und $z = 1$, und ersterer liegt in der oberen Halbebene.)

Zunächst könnte man denken, dass zwei Tori, die durch τ_1 und τ_2 beschrieben sind (wobei τ_1 und τ_2 in der oberen Halbebene liegen) genau dann äquivalent sind, falls $\tau_1 = \tau_2$. Dies stimmt jedoch nicht. Zum einen ist es klar, dass τ und $\tau + 1$ äquivalente Tori beschreiben, da das Gitter Λ_τ ebenso gut durch $\{z = 1, z = \tau\}$ oder aber durch $\{z = 1, z = \tau + 1\}$ aufgespannt wird; es ist üblich diese Transformation von τ als T-Transformation zu bezeichnen:

$$T : \tau \mapsto \tau + 1 . \tag{5.5.21}$$

Die zweite Äquivalenz rührt daher, dass wir die Basisvektoren $z = 1$ und $z = \tau$ durch $-1/\tau$ rotieren und reskalieren können; die resultierenden Basisvektoren sind dann $z = -1$ und $z = -1/\tau$. Da wir natürlich jeden Basisvektor durch sein negatives ersetzen können ohne das Gitter zu modifizieren, folgt daraus, dass auch das durch $-1/\tau$ beschriebene Gitter äquivalent zu dem ursprünglichen Gitter ist. Es ist üblich, diese Transformation von τ als S-Transformation zu bezeichnen:

$$S : \tau \mapsto -1/\tau . \tag{5.5.22}$$

Die beiden Transformationen T und S generieren gerade die Gruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, wobei die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \tag{5.5.23}$$

auf τ gerade durch

$$\tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \tag{5.5.24}$$

wirkt. Insbesondere entsprechen T und S daher den Matrizen

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.5.25}$$

Man kann nun zeigen, dass zwei Tori, die durch τ_1 und τ_2 beschrieben werden, genau dann äquivalent sind, falls $\tau_1 = M\tau_2$ ist, wobei M eine Matrix in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ ist. Der Parameter τ, der (bis auf diese Mehrdeutigkeit) Tori charakterisiert, wird üblicherweise *modularer Parameter* genannt, und die Gruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ die Modulare Gruppe.

Wie wir später sehen werden, ist der Parameter τ, der in der Definition der Charaktere auftritt, tatsächlich der modulare Parameter eines Torus. Es ist daher interessant zu bestimmen, wie sich die Charaktere unter modularen Transformationen verhalten. Die Transformation unter T ist relativ einfach, da

$$T : q^h \mapsto e^{2\pi i h} q^h . \tag{5.5.26}$$

Insbesondere transformiert sich daher $\eta(\tau)$ einfach als

$$\eta(\tau + 1) = e^{\frac{2\pi i}{24}} \eta(\tau) . \tag{5.5.27}$$

Weiterhin beobachten wir, dass zwei Vektoren $\mathbf{y}_1$ und $\mathbf{y}_2$, die beide in demselben Koset der Form $\mathbf{x}_i + \Lambda$ liegen, Quadrate besitzen, die sich um eine gerade ganze Zahl unterscheiden: da unter dieser Annahme $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2 + \mathbf{x}$, wobei $\mathbf{x} \in \Lambda$, gilt

$$\mathbf{y}_1^2 = (\mathbf{y}_2 + \mathbf{x})^2 = \mathbf{y}_2^2 + 2\mathbf{y}_2 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{x}^2 . \tag{5.5.28}$$

Die Behauptung folgt dann daraus, dass $\mathbf{y}_2 \cdot \mathbf{x} \in \mathbb{Z}$ (da nach Konstruktion $\mathbf{y}_2 \in \Lambda^*$), und $\mathbf{x}^2 \in 2\mathbb{Z}$ (da Λ gerade ist). Dies impliziert, dass alle Terme in der Summe unter T den gleichen Phasenfaktor haben, nämlich

$$T : \sum_{\mathbf{y}-\mathbf{x}_i \in \Lambda} q^{\frac{1}{2}\mathbf{y}^2} \mapsto e^{\pi i \mathbf{x}_i^2} \sum_{\mathbf{y}-\mathbf{x}_i \in \Lambda} q^{\frac{1}{2}\mathbf{y}^2} . \tag{5.5.29}$$

Zusammen mit (5.5.27) gilt dann, dass

$$\chi_i(\tau + 1) = e^{\pi i \left(\mathbf{x}_i^2 - \frac{d}{12}\right)} \chi_i(\tau) . \tag{5.5.30}$$

Der Umstand, dass T auf den Charakteren der irreduziblen Darstellungen diagonal wirkt, gilt generisch für alle (rationalen) konformen Feldtheorien; dies reflektiert einfach den Umstand, dass die verschiedenen Zustände in einer irreduziblen Darstellung durch Moden $V_n(\psi)$ aufeinander abgebildet werden können, und dass sich daher ihre konformen Gewichte immer nur um ganze Zahlen unterscheiden.

Die Transformation unter der S-Transformation ist deutlich komplizierter (aber auch interessanter). Es ist ein klassisches Resultat der Mathematik, dass sich die Dedekind eta-Funktion unter der S-Transformation wie

$$\eta(-1/\tau) = (-i\tau)^{\frac{1}{2}}\eta(\tau) \tag{5.5.31}$$

transformiert. Weiterhin haben wir (wie auf dem Übungsblatt 9 bewiesen) die sogenannte *Poisson Resummierungsformel*, die besagt, dass

$$\sum_{\mathbf{x}\in\Lambda} e^{\frac{-2\pi i}{\tau}\frac{1}{2}\mathbf{x}^2+2\pi i\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}} = \frac{1}{\mathrm{Vol}(\Lambda)}(-i\tau)^{\frac{d}{2}}\sum_{\mathbf{p}\in\Lambda^*} e^{2\pi i\tau\frac{1}{2}(\mathbf{p}+\mathbf{a})^2}\,. \tag{5.5.32}$$

Um diese hier anwenden zu können, ersetzen wir Λ durch Λ^* und τ durch $-1/\tau$, und vertauschen die Rollen von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{p}$. Dann wird obige Formel gerade

$$\sum_{\mathbf{x}\in\Lambda} e^{-\frac{2\pi i}{\tau}\frac{1}{2}(\mathbf{x}+\mathbf{x}_i)^2} = \frac{1}{\mathrm{Vol}(\Lambda)}(-i\tau)^{\frac{d}{2}}\sum_{\mathbf{p}\in\Lambda^*} e^{2\pi i\tau\frac{1}{2}\mathbf{p}^2}\, e^{2\pi i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}_i}\,. \tag{5.5.33}$$

Zusammen mit (5.5.31) folgt daher, dass

$$\chi_i(-1/\tau) = \frac{1}{\mathrm{Vol}(\Lambda)}\frac{1}{\eta^d(\tau)}\sum_{\mathbf{p}\in\Lambda^*} e^{2\pi i\tau\frac{1}{2}\mathbf{p}^2}\, e^{2\pi i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}_i}\,. \tag{5.5.34}$$

Nun zerlegen wir die Summe über alle $\mathbf{p}\in\Lambda^*$ in die verschiedenen Kosets wie in (5.5.4); da $\mathbf{x}_i\in\Lambda^*$, ist die Phase $\exp(-2\pi i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}_i)$ für alle $\mathbf{p}$, die in dem Koset $\mathbf{x}_j+\Lambda$ liegen gleich, nämlich $\exp(-2\pi i\mathbf{x}_j\cdot\mathbf{x}_i)$. Es folgt daher, dass

$$\chi_i(-1/\tau) = \frac{1}{\sqrt{|\mathcal{I}|}}\sum_{j\in\mathcal{I}} e^{2\pi i\mathbf{x}_j\cdot\mathbf{x}_i}\,\chi_j(\tau)\,. \tag{5.5.35}$$

Wir haben damit gezeigt, dass sich unter der S-Transformation, die Charaktere der irreduziblen Darstellungen gerade untereinander transformieren. In der Basis, die durch diese Charaktere definiert wird, kann man S daher als Matrix schreiben, deren Matrixelemente durch

$$S_{ij} = \frac{1}{\sqrt{|\mathcal{I}|}}e^{2\pi i\mathbf{x}_j\cdot\mathbf{x}_i} \tag{5.5.36}$$

gegeben sind.

Wir haben hier diese S-Matrix in einem speziellen Fall direkt abgeleitet; die generelle Struktur, nämlich, dass

$$\chi_i(-1/\tau) = \sum_{j\in\mathcal{I}} S_{ij}\chi_j(\tau)\,, \tag{5.5.37}$$

wobei $\mathcal{I}$ die Menge der irreduziblen Höchstgewichtsdarstellungen beschreibt, und S_{ij} (komplexe) Konstanten sind, gilt für allgemeine rationale konforme Feldtheorien. Dies ist ein tiefes Resultat, das zuerst (in grosser Allgemeinheit) von Zhu bewiesen wurde.

In dem obigen Fall ist die Matrix S eine *unitäre* Matrix, da gilt

$$\sum_{j\in\mathcal{I}} S_{ij} S^*_{lj} = \frac{1}{|\mathcal{I}|} \sum_{j\in\mathcal{I}} e^{2\pi i \mathbf{x}_j\cdot(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_l)} = \delta_{il}\,. \tag{5.5.38}$$

In der letzten Gleichung haben wir benützt, dass $x_i \cdot x_j \in \mathbb{Z}$ nur falls $\mathbf{x}_i$ oder $\mathbf{x}_j$ in Λ liegen (d.h. falls $i = 0$ oder $j = 0$), da das duale Gitter des dualen Gitters gerade wieder das ursprüngiche Gitter ist, $(\Lambda^*)^* = \Lambda$. Falls $i \neq l$, dann ist $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_l \notin \Lambda$, und daher sind die Phasen $e^{-2\pi i \mathbf{x}_j\cdot(\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_l)}$ (mit Ausnahme des Falles $j = 0$) alle nicht-trivial. Wegen der Gruppenstruktur auf $\mathcal{I}$ ist es dann leicht zu sehen, dass in diesem Fall die obige Summe gerade die Summe über alle Einheitswurzeln ist, und daher verschwinden muss.

Ausserdem ist die Matrix S offensichtlich *symmetrisch.* Beide Eigenschaften gelten sehr allgemein für (unitäre) rationale konforme Feldtheorien, obgleich es meines Wissens nach kein befriedigendes Argument dafür im allgemeinen gibt.

Weiterhin kann man zeigen, dass die Einträge von S besondere zahlentheoretische Eigenschaften besitzen. (Sie müssen in bestimmen zyklotomischen Zahlenfeldern liegen.) Dies ist eine Folge daraus, dass die S-Matrix via der Verlinde Formel die Fusionsregeln der Theorie beschreibt. Das soll nun diskutiert werden.

5.6 Fusion und die Verlinde Formel

Bis anhin haben wir die meromorphe konforme Feldtheorie (die durch die chiralen Felder erzeugt wird), sowie ihre Darstellungen diskutiert. Vom Standpunkt der Amplituden sind die Darstellungen gerade durch jene Amplituden charakterisiert, für die zwei der Felder (deren Koordinaten wir durch $(u_j, \bar{u}_j)$ beschrieben haben) nicht chiral sind. [In unserer Analyse der zugehörigen Amplituden hatten wir die Abhängigkeit dieser beiden Felder nach der $\bar{u}_j$ Koordinate unterdrückt.] Wir wollen nun die Struktur der Amplituden verstehen, bei denen eine beliebige Anzahl der Felder nicht chiral sind. Wie zuvor betrachten wir diese Amplituden zunächst lediglich als Funktion der u_j und z_i Variablen, d.h. wir ignorieren ihre Abhängigkeit von $\bar{u}_j$.

Die funktionale Abhängigkeit dieser Amplituden von u_j (und z_i) ist im allgemeinen sehr kompliziert. Sie ist im Prinzip durch Differentialgleichungen bestimmt, die aus den Ward-Identitäten der konformen Symmetrie folgen. In vielen Fällen können diese explizit gelöst werden (das soll zum Beispiel für den Fall des Ising Modells auf einem Übungsblatt diskutiert werden), aber für viele Belange genügt es auch, weniger zu wissen, nämlich wieviele verschiedene Lösungen der Differentialgleichung es gibt. Diese Zahl hat eine natürliche darstellungstheoretische Interpretation. Um diese zu verstehen, betrachten wir zunächst den Fall dreier nicht-chiraler Felder. Betrachte weiterhin den Limes, in dem eines der drei Felder nach unendlich geschickt wird. Die Amplitude verschwindet dann nicht, falls das Produkt der anderen beiden Felder die Darstellung enthält, die zu dem dritten Feld konjungiert ist. Da alle nicht-chiralen Felder durch ihre

Darstellung (bezüglich der meromorphen Theorie) charakterisiert sind, suggeriert dies, dass man das Operator Produkt der beiden nicht-chiralen Felder als eine Art Tensorprodukt interpretieren kann. Dieses Tensorprodukt wird üblicherweise *Fusionsprodukt* genannt. Die obige Amplitude dreier nicht-chiraler Felder ist dann nicht trivial, falls die konjungierte Darstellung des dritten Feldes in dem Fusionsprodukt der anderen beiden Felder enthalten ist. Das Fusionsprodukt wird häufig als

$$\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_j = \sum_{k \in \mathcal{I}} N_{ij}{}^k \, \mathcal{H}_k \tag{5.6.1}$$

geschrieben, und die nicht-negativen ganzen Zahlen N_{ij}^k werden die *Fusionsregeln* genannt. In dieser Notation ist dann die Amplitude der drei (nicht-chiralen) Felder ϕ_i, ϕ_j und ϕ_k nicht trivial, falls

$$N_{ijk} \equiv N_{ij}{}^{k^*} \tag{5.6.2}$$

von null verschieden ist; hier haben wir durch k^* die zu k konjugierte Darstellung bezeichnet. Nach Konstruktion ist N_{ijk} unter Permutationen von i, j und k symmetrisch. Das Fusionsprodukt ist assoziativ, d.h.

$$\mathcal{H}_i \otimes (\mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_l) = (\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_j) \otimes \mathcal{H}_l \,, \tag{5.6.3}$$

und daher gilt

$$\sum_k N_{ij}{}^k N_{kl}{}^m = \sum_k N_{ik}{}^m N_{jl}{}^k \,. \tag{5.6.4}$$

Weiterhin kann man auf diese Weise sukzessiv die Anzahl der nicht-trivialen Amplituden für eine beliebige Konfiguration nicht-chiraler Felder beschreiben; zum Beispiel beschreibt (5.6.4) gerade die Anzahl der nicht-trivialen Amplituden, die die Felder ϕ_i, ϕ_j, ϕ_l und ϕ_{m^*} enthalten. Die Verallgemeinerung zu einer beliebigen Konfiguration nicht-chiraler Felder ist (hoffentlich) offensichtlich.

Die Fusionsregeln $N_{ij}{}^k$ haben eine interessante Struktur. Um diese zu verstehen, betrachten wir die Matrizen $\mathbf{N}_i$, deren Matrixelemente durch

$$(\mathbf{N}_i)_j^k \equiv N_{ij}{}^k \tag{5.6.5}$$

definiert sind. Die Bedingung (5.6.4) kann dann als

$$\sum_k (\mathbf{N}_i)_j^k \, (\mathbf{N}_l)_k^m = \sum_k (\mathbf{N}_l)_j^k \, (\mathbf{N}_i)_k^m \,, \tag{5.6.6}$$

geschrieben werden. Hier haben wir benützt, dass $N_{kl}{}^m = N_{lk}{}^m$ (was aus der Symmetrie von (5.6.2) folgt). Diese Gleichung impliziert daher, dass die Matrizen $\mathbf{N}_i$ miteinander vertauschen,

$$\mathbf{N}_i \, \mathbf{N}_j = \mathbf{N}_j \, \mathbf{N}_i \,. \tag{5.6.7}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{N}_i^\dagger\right)_k^j &= N_{ij}{}^k = N_{ijk^*} \\ &= N_{i^*j^*k} \\ &= N_{i^*k}{}^j \\ &= (\mathbf{N}_{i^*})_k^j \,, \end{aligned} \tag{5.6.8}$$

wobei wir benützt haben, dass das Fusionsprodukt konjugierter Darstellungen gerade das Konjugierte des Fusionsprodukts ist. Daher ist

$$\mathbf{N}_i^\dagger = \mathbf{N}_{i^*} \,. \tag{5.6.9}$$

Zusammen mit (5.6.7) folgt dann, dass die Matrizen *normal* sind, d.h. dass sie mit ihrer Adjungierten (oder Transponierten) vertauschen. Solche Matrizen können immer diagonalisiert werden. Da die verschiedenen Matrizen $\mathbf{N}_i$ miteinander vertauschen, können alle gleichzeitig diagonalisiert werden; wir nennen die diagonalisierende Matrix S. Falls wir die verschiedenen Eigenwerte von $\mathbf{N}_i$ durch $\lambda_i^{(l)}$ bezeichnen, haben wir dann

$$N_{ij}{}^k = \sum_{lm} S_{jl}\, \lambda_i^{(l)} \delta_l^m \left(S^{-1}\right)_{mk} = \sum_l S_{jl}\, \lambda_i^{(l)} \left(S^{-1}\right)_{lk} \,. \tag{5.6.10}$$

Falls j die Vakuumdarstellung ist, *i.e.* $j = 0$, dann gilt (nach Konstruktion)

$$N_{i0}{}^k = \delta_i^k \,, \tag{5.6.11}$$

da alle Darstellungen irreduzibel sind. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_k N_{i0}{}^k S_{kn} = S_{in} &= \sum_{lk} S_{0l}\, \lambda_i^{(l)} \left(S^{-1}\right)_{lk} S_{kn} \\ &= \sum_l S_{0l}\, \lambda_i^{(l)}\, \delta_{ln} \\ &= S_{0n}\, \lambda_i^{(n)} \,, \end{aligned} \tag{5.6.12}$$

und daher gilt

$$\lambda_i^{(n)} = \frac{S_{in}}{S_{0n}} \,. \tag{5.6.13}$$

Wir können daher (5.6.10) als

$$N_{ij}{}^k = \sum_l \frac{S_{jl} S_{il} \left(S^{-1}\right)_{lk}}{S_{0l}} \tag{5.6.14}$$

schreiben.

Bis jetzt haben wir nur ein paar (recht einfachte) Umformungen vorgenommen. (Insbesondere ist die Eigenschaft, dass es eine diagonalisierende Matrix S geben muss, relativ offensichtlich.) Die tiefe Einsicht von Verlinde war es, zu postulieren, dass diese Matrix S gerade mit der (unitären) S-Matrix, die in der Beschreibung der modularen Transformationen der Charaktere auftritt, übereinstimmt. Da diese Matrix unitär ist, kann man dann (5.6.14) in der vertrauteren Form

$$N_{ij}{}^k = \sum_l \frac{S_{jl} S_{il} S_{kl}^*}{S_{0l}} \tag{5.6.15}$$

schreiben; dies ist die berühmte *Verlinde Formel*. Soweit ich weiss, gibt es noch keinen wirklich allgemeinen und befriedigenden Beweis für diese Formel. Die Formel ist jedoch in unzähligen Fällen nachgeprüft worden, und wo immer sie anwendbar ist (d.h. für rationale konforme Feldtheorien, deren Fusionsprodukte vollständig zerlegbar sind) ist sie korrekt!

Wie schon oben angedeutet schränkt diese Formel auch die S-Matrix von rationalen konformen Feldtheorien stark ein: die rechte Seite von (5.6.15) ist eine ganze positive Zahl, und dies impliziert, dass die Matrixelemente in gewissen zyklotomischen Zahlenfeldern liegen müssen.

Die Fusionsmatrizen erfüllen noch eine weitere interessante Eigenschaft, die aus dem Perron-Frobenius Theorem folgt: sei A eine Matrix, deren Einträge alle nicht-negativ sind. Dann besitzt die Matrix A einen nicht-trivialen Eigenvektor $\mathbf{x}$, dessen Einträge ebenfalls nicht-negativ sind, d.h. $x_i \geq 0$. Weiterhin ist der zugehörige Eigenwert $A_{ij}x_j = \rho x_i$ ebenfalls nicht-negativ, $\rho \geq 0$, und alle anderen Eigenwerte λ von A sind im Betrag kleiner als ρ, $|\lambda| \leq \rho$.

Die obige Analyse impliziert, dass die Eigenvektoren $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(d)}$ der nicht-negativen Matrizen $\mathbf{N}_i$ gerade durch

$$x_i^{(l)} = S_{il} \tag{5.6.16}$$

gegeben sind, und dass ihre Eigenwerte gerade

$$\mathbf{N}_i \mathbf{x}^{(l)} = \frac{S_{il}}{S_{0l}} \mathbf{x}^{(l)} \tag{5.6.17}$$

sind. Wegen des Perron-Frobenius Theorems muss es daher ein l geben, für das alle Brüche $S_{il}/S_{0l} \geq 0$ für alle i. Das zugehörige l beschreibt immer die Darstellung, deren Höchstgewichtsvektoren geringstes konformes Gewicht haben. (Im folgenden nehmen wir an, dass wie eine unitäre Theorie betrachten; in diesem Fall ist die Darstellung mit minimalem konformen Gewicht gerade die Vakuumdarstellung, $l = 0$.) Diese positive Zahl wird üblicherweise die *Quantendimension* der Darstellung i genannt,

$$q_i \equiv \frac{S_{i0}}{S_{00}} \,. \tag{5.6.18}$$

Sie ist ein Mass für die Grösse der Darstellung $\mathcal{H}_i$. Um dies zu verstehen, betrachten wir den Charakter

$$\chi_i(\tau) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_i} \left(q^{L_0 - \frac{c}{24}} \right) \,, \tag{5.6.19}$$

wobei $q = e^{2\pi i \tau}$. Formal definieren wir dann

$$q_i = \frac{\dim(\mathcal{H}_i)}{\dim(\mathcal{H}_0)} = \frac{\lim_{\tau\to 0} \chi_i(\tau)}{\lim_{\tau\to 0} \chi_0(\tau)} \,. \tag{5.6.20}$$

Um die Limites auszurechnen, benützen wir jetzt die modulare S-Transformation,

$$\begin{aligned} \lim_{\tau\to 0} \chi_i(\tau) &= \lim_{\tau\to 0} \sum_j S_{ij} \chi_j(-1/\tau) \\ &= \sum_j S_{ij} \lim_{\tau'\to i\infty} \chi_j(\tau') \\ &\sim S_{i0}\, e^{-2\pi i \tau' \frac{c}{24}} \,, \end{aligned} \tag{5.6.21}$$

und entsprechend für $\lim_{\tau\to 0}\chi_0(\tau)$. Hier haben wir benützt, dass der führende Beitrag immer von $j=0$ kommt. Dies führt dann gerade zu (5.6.18).

5.6.1 Fusionsregeln für Gittertheorien

In Kapitel 5.5 haben wir die modulare S-Matrix für die Theorie, die zu einem geraden Euklidischen Gitter assoziiert werden kann, bestimmt. Mit den dort eingeführten Notationen, war diese Matrix durch

$$S_{ij} = \frac{1}{\sqrt{|\mathcal{I}|}} e^{2\pi i \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j} \tag{5.6.22}$$

gegeben. Wir wollen nun daraus die Fusionsregeln (vermittels der Verlinde Formel) bestimmen. Zunächst ist klar, dass $S_{0l} = 1/\sqrt{|\mathcal{I}|}$ für alle l. Daher ist die Verlinde Formel in diesem Fall einfach

$$\begin{aligned} N_{ij}{}^{k} &= \frac{1}{|\mathcal{I}|} \sum_{l\in\mathcal{I}} \exp\left[2\pi i \mathbf{x}_l \cdot (\mathbf{x}_j + \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k)\right] \\ &= \delta\left(\mathbf{x}_j + \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k\right) , \end{aligned} \tag{5.6.23}$$

wobei $\delta(\mathbf{x}) = 0$ falls $\mathbf{x} \notin \Lambda$ und $\delta(\mathbf{x}) = 1$ andernfalls. Die letzte Identität folgt wiederum mit denselben Argumenten wie der Beweis der Unitarität von S.

Man kann relativ leicht zeigen, dass die konjugierte Darstellung von $\mathbf{x}_i$ die durch $-\mathbf{x}_i$ definierte Darstellung ist. Die obige Formel für die Fusionsregeln sagt deshalb voraus, dass die Amplitude dreier nicht-chiraler Felder (die durch $\mathbf{x}_i \in \Lambda^*$ parametrisiert sind), nur dann nicht-trivial sein können, falls $\sum_i \mathbf{x}_i \in \Lambda$. Dies kann auch relativ leicht direkt bewiesen werden.

5.6.2 Charaktere, modulare Transformationen und Fusionsregeln für SU(2)

Es ist vielleicht auch instruktiv, ein ein wenig komplizierteres (aber dennoch recht einfachtes) Beispiel zu diskutieren. Betrachte dazu die su(2) Theorie, wobei wir annehmen, dass k eine positive ganze Zahl ist. Wie wir zuvor erklärt haben, definiert dies eine rationale konforme Feldtheorie. Insbesondere sind die erlaubten Höchstgewichtsdarstellungen dieser meromorphen konformen Feldtheorie dadurch charakterisiert, dass der Raum der Höchstgewichtszustände eine SU(2) Darstellung mit halbganzem Spin j definiert, wobei $j \leq k/2$ ist

Da alle Darstellungen singuläre Vektoren enthalten, ist es nicht ganz einfach, die Charaktere dieser Darstellungen direkt auszurechnen. Man kann sie jedoch (mit Hilfe der Kac-Weyl Charakterformel) berechnen, und daraus die S-modulare Matrix berechnen (siehe Übungsblatt):

$$S_{lj} = \sqrt{\frac{2}{k+2}} \sin\left(\pi \frac{(2l+1)(2j+1)}{(k+2)}\right) . \tag{5.6.24}$$

Zum Beispiel ist für $k=1$

$$S=\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}\sin(\pi/3) & \sin(2\pi/3)\\ \sin(2\pi/3) & \sin(4\pi/3)\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}. \tag{5.6.25}$$

Diese Matrix ist offensichtlich symmetrisch und unitär. Man rechnet leicht nach, dass die Verlinde Formel daraus die Fusionsregeln

$$\begin{aligned}[0]\otimes[0] &= [0]\\ [0]\otimes[1/2] &= [1/2]\\ [1/2]\otimes[1/2] &= [0]\end{aligned} \tag{5.6.26}$$

bestimmt. In der Tat sind die zugehörigen **N** Matrizen dann

$$\mathbf{N}_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{N}_{\frac{1}{2}}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \tag{5.6.27}$$

und diese werden von S diagonalisiert,

$$S\,\mathbf{N}_0\,S^*=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad S\,\mathbf{N}_{\frac{1}{2}}\,S^*=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \tag{5.6.28}$$

wobei die Eigenwerte gerade S_{ij}/S_{0j} sind.

Die Fusionsregeln (sowie die S-Matrix) stimmen für $k=1$ übrigens gerade mit der ein-dimensionalen Gittertheorie überein (für die wir die Zerlegung von Λ^* nach Λ in Kapitel 5.5 diskutiert haben); dies ist kein Zufall, da die konforme su(2) Theorie mit $k=1$ gerade zu dieser Gittertheorie äquivalent ist.

Zur Vollständigkeit geben wir auch die Fusionsregeln im allgemeinen Fall (die zum Beispiel durch die Verlinde Formel, aber auch direkt ausgerechnet werden können):

$$[j_1]\otimes[j_2]=\bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{\min(j_1+j_2,k-j_1-j_2)}[j], \tag{5.6.29}$$

wobei die Schrittweite in der Summe eins beträgt, d.h. $j=|j_1-j_2|,|j_1-j_2|+1,\ldots$. Die Fusionsregeln sind daher Trunkierungen der Clebsch-Gordon Koeffizienten von SU(2), d.h. das Fusionsprodukt enthält nur eine Darstellung, falls das gewöhnliche Tensorprodukt der Höchstgewichtsdarstellungen die entsprechende Höchstgewichtsdarstellung enthält.

6 Modular invariante konforme Feldtheorien

Zum Abschluss dieser Vorlesungen wollen wir jetzt erklären, wie wir die verschiedenen Strukturen, die wir besprochen haben, zu einer konsistenten (lokalen) Theorie zusammensetzen können.

6.1 Die allgemeine Struktur der lokalen Theorie

In gewissem Sinn war unser bisheriger Zugang reduktionistisch. Wir haben zunächst die meromorphen Untertheorien einer gegebenen konformen Feldtheorie beschrieben. Diese beschreiben die Symmetrien, bezüglich derer wir die gesamte Theorie zerlegt haben. Wie wir bereits mehrfach erwähnt haben, transformieren sich nämlich die übrigen Zustände der Theorie in Darstellungen dieser beiden meromorphen Theorien. Bis anhin haben wir uns nur auf eine der beiden meromorphen konformen Feldtheorien konzentriert; jetzt wollen wir beide Symmetrien gleichzeitig betrachten, und die gesamte Theorie aus diesen Bausteinen rekonstruieren.

Zunächst bemerken wir, dass die beiden Symmetrien (die durch die chiralen und die anti-chirale meromorphe konformen Feldtheorien beschrieben werden) miteinander vertauschen; wir können daher die Zustände der Theorie gleichzeitig nach ihren chiralen und anti-chiralen Symmetrien zerlegen. Dies bedeutet, dass der Zustandsraum der gesamten Theorie von der Form ist

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i,j} M_{ij} \left(\mathcal{H}_i \otimes \bar{\mathcal{H}}_j \right) , \tag{6.1.1}$$

wobei $\mathcal{H}_i$ die irreduziblen Darstellungen der chiralen, und $\bar{\mathcal{H}}_j$ die irreduziblen Darstellungen der anit-chiralen meromorphen konformen Feldtheorie bezeichnen. [Hier bezeichnet '$\otimes$' wirklich das Tensorprodukt von Darstellungen, nicht das Fusionsprodukt.] Die Zahlen M_{ij} sind nicht-negative ganze Zahlen, die die Multiplizität beschreiben, mit der das Tensorprodukt $\mathcal{H}_i \otimes \bar{\mathcal{H}}_j$ tatsächlich im Zustandsraum auftritt. Falls die beiden meromophen konformen Feldtheorien rational sind, sind die Summen über i und j endlich.

Nicht jede Kombination von Multiplizitäten M_{ij} korrespondiert zu einer konsistenten Theorie. Um eine solche zu konstruieren, muss man eigentlich Amplituden für alle Zustände in $\mathcal{H}$ konstruieren; diese müssen dann entsprechende Eigenschaften (insbesondere Lokalität) erfüllen. Die explizite Konstruktion dieser Amplituden verlangt detaillierte Kenntnis der Struktur der chiralen Korrelationsfunktionen; diese ist nur in den wenigsten Fällen tatsächlich verfügbar. [Das Problem, aus den oben beschriebenen chiralen (und anti-chiralen) Daten lokale Amplituden zusammenzusetzen wird oft als *conformal bootstrap* bezeichnet.]

Man kann jedoch mit Hilfe eines Tricks zumindest notwendige Bedingungen an M_{ij} ableiten. In der Stringtheorie sind wir hauptsächlich an konformen Feldtheorien interessiert, die nicht nur auf der Riemann'schen Kugel (die wir bisher betrachtet haben) definiert sind, sondern auch auf Riemann'schen Flächen beliebigen Genus. Die Riemann'sche Kugel hat Genus $g = 0$, und die Fläche für $g = 1$ ist der Torus. Die einfachste

Amplitude, die wir auf dem Torus berechnen können ist die Vakuumamplitude, d.h. die Amplitude, bei der überhaupt keine Vertexoperatoren vorhanden sind. Diese kann aus den obigen Daten wie folgt bestimmt werden.

Nehmen wir also an, die Weltfläche des Strings sei ein Torus mit modularem Parameter τ. (Wie wir bereits in Kapitel 5.5 diskutiert haben werden komplexe Tori durch den modularen Parameter τ beschrieben, wobei zwei Tori konform äquivalent sind, falls ihre modularen Parameter durch die Wirkung der modularen Gruppe ineinander abgebildet werden können.) Um die Vakuumamplitude berechnen zu können schneiden wir den Torus entlang eines Kreises auf; die resultierende Fläche ist dann ein Zylinder (oder ein Kreisring). Für eine gegebene Wahl von τ ist es natürlich, den Torus so aufzuschneiden, dass der modulare Parameter des resultierenden Kreisrings gerade $q = e^{2\pi i\tau}$ ist. [Dies bedeutet, dass die beiden Ringe bei $|z| = |q|$ und $z = 1$ liegen; die komplexe Phase in q beschreibt den Drehwinkel, mit dem die Parametrisierungen der beiden Ränder zueinander in Beziehung stehen.]

Der Kreisring ist eine Untermenge der komplexen Ebene, und von daher wissen wir aus der Analyse der Theorie auf der Kugel, welche Zustände darauf propagieren — das sind genau die durch $\mathcal{H}$ beschriebenen Zustände. Um aus dem Kreisring wiederum den Torus zu bilden müssen wir die beiden Enden zusammenkleben. In der Sprache der konformen Feldtheorie bedeutet das, dass wir über eine Zerlegung der 1 summieren müssen. Die resultierende Amplitude ist daher einfach

$$\mathcal{A} = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left(\mathcal{O}(q)\right) , \qquad \text{wobei} \qquad \mathcal{O}(q) = q^{L_0 - \frac{c}{24}}\, \bar{q}^{\bar{L}_0 - \frac{\bar{c}}{24}} . \tag{6.1.2}$$

Wegen der obigen Zerlegung können wir $\mathcal{A}$ daher als

$$\mathcal{A} = \sum_{ij} M_{ij}\, \chi_i(\tau)\, \chi_{\bar{j}}(-\bar{\tau}) \tag{6.1.3}$$

schreiben.

Der zentrale Punkt ist nun der folgende: die obige Rechnung hängt zumindest offenbar von τ ab (nämlich von der Art, wie wir den Torus aufgeschnitten haben); die tatsächliche Vakuumamplitude darf aber nur von der konformen Äquivalenzklasse von Tori abhängen. Dies bedeutet, dass die obige Amplitude $\mathcal{A}$ unter den modularen Transformationen $\tau \mapsto A\tau$ mit $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ *invariant* sein muss.

Wie wir in Kapitel 5.5 gesehen haben, transformieren sich die Charaktere $\chi_i(\tau)$ relativ einfach unter den beiden generierenden modularen Transformationen T und S. Diese sind oft explizit bekannt, und wir können daher zumindest im Prinzip bestimmen, welche Multiplizitätsmatrizen M_{ij} gerade zu einem modular invarianten $\mathcal{A}$ führen. Diese Bedingung ist typischerweise sehr restriktiv, und man kann (zumindest für gewisse Klassen von Theorien) die möglichen Multiplizitätsmatrizen M_{ij} (und damit die möglichen Spektren) explizit bestimmen. Zum Beispiel ist das für die affinen Theorien und für die minimalen Modelle gelungen.

Für den Fall, dass die chirale und die anti-chirale meromorphe Theorie äquivalent sind, kann man immer zumindest eine Theorie finden, die zu einer modular invarianten

Torusamplitude führt. Diese Theorie ist die sogenannte *ladungskonjugierte* Theorie; ihr Spektrum ist einfach durch

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{H}_i \otimes \bar{\mathcal{H}}_{i^*}\,, \tag{6.1.4}$$

beschrieben, d.h. die links-laufende und die rechts-laufende Darstellung sind gerade konjugierte Darstellungen der chiralen meromorphen Theorie. Man kann relativ leicht sehen, dass die zugehörige Torusvakuumamplitude in der Tat modular invariant ist. Betrachte zunächst die T-Transformation, unter der

$$\chi_i(\tau+1) = e^{2\pi i(h_i - \frac{c}{24})}\,\chi_i(\tau)\,, \tag{6.1.5}$$

wobei h_i das konforme Gewicht eines Höchstgewichtsvektors in $\mathcal{H}_i$ ist. Das konforme Gewicht eines Höchstgewichtsvektors der konjugierten Darstellung $\mathcal{H}_{i^*}$ stimmt mit dem von $\mathcal{H}_i$ überein, $h_i = h_{i^*}$; dies impliziert, dass unter der T-Transformation

$$\chi_{i^*}(-\bar\tau - 1) = e^{-2\pi i(h_i - \frac{c}{24})}\,\chi_{i^*}(-\bar\tau)\,. \tag{6.1.6}$$

Das Produkt, das in $\mathcal{A}$ auftritt, ist daher unter der T-transformation invariant.

Die Analyse für die S-Transformation ist ähnlich: unter der S-Transformation gilt

$$\chi_i(-1/\tau) = \sum_j S_{ij}\,\chi_j(\tau)\,, \tag{6.1.7}$$

und

$$\chi_{i^*}(1/\bar\tau) = \sum_l S_{i^*l^*}\,\chi_{l^*}(-\bar\tau)\,. \tag{6.1.8}$$

Da die Konjugation wie komplexe Konjugation wirkt gilt weiterhin

$$S_{i^*l^*} = S^*_{il}\,. \tag{6.1.9}$$

Unter der S-Transformation wird daher aus $\mathcal{A}$ gerade

$$\sum_i \sum_j \sum_l S_{ij}\,S^*_{il}\,\chi_j(\tau)\,\chi_{l^*}(-\bar\tau)\,. \tag{6.1.10}$$

Da S unitär ist, führt die i-Summe gerade zu δ_{jl}, und wir erhalten daher gerade wieder $\mathcal{A}$. Dies beweist, dass das Spektrum (6.1.4) immer zu einer modular invarianten Torus Vakuumamplitude führt.

6.1.1 Ein letztes Mal: SU(2) bzw. SO(3)

Häufig ist jedoch das obige Spektrum nicht die einzige Möglichkeit, eine modular invariante Torus Vakuumamplitude zu erhalten. Dies soll wiederum am Beispiel der SU(2) Theorie illustriert werden.

Die ladungskonjugierte Theorie, deren Spektrum wir oben angegeben haben, beschreibt Strings, die auf der einfach-zusammenhängenden Gruppenmannigfaltigkeit von

SU(2) propagieren. Diese Theorie kann übrigens auch durch eine Wirkung beschrieben werden, nämlich durch die sogenannte Wess-Zumino-Witten Wirkung

$$\mathcal{S}[g] = -\frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{M}} \left\langle g^{-1}dg, g^{-1}dg \right\rangle - \frac{k}{24\pi}\int_{\mathcal{B}} \left\langle \tilde{g}^{-1}d\tilde{g}, [\tilde{g}^{-1}d\tilde{g}, \tilde{g}^{-1}d\tilde{g}] \right\rangle \, . \tag{6.1.11}$$

Hier definiert das Feld g eine Abbildung von der Weltfläche $\mathcal{M}$ in die Gruppe G =SU(2), und $\tilde{g}$ ist eine Erweiterung von g von $\mathcal{M}$ zu $\mathcal{B}$, wobei $\partial\mathcal{B} = \mathcal{M}$. [Eine natürliche Wahl für $\mathcal{M}$ ist zum Beispiel $\mathcal{M} = S^1 \times \mathbb{R}$. Der zweite Term ist nicht völlig von der gewählten Erweiterung $\tilde{g}$ unabhängig; verschiedene Wahlen unterscheiden sich jedoch um ganzzahlige Vielfache von $2\pi k$, und spielen daher, falls k eine ganze Zahl ist, für die Berechnung des Pfadintegrals keine Rolle.] Das innere Produkt $\langle .,. \rangle$ ist die Killing Form auf der Lie Algebra g von G, und $[.,.]$ beschreibt den Kommutator. Der zweite Term wird oft als *Wess-Zumino* Term bezeichnet.

Das Zentrum von SU(2) ist gerade $\mathbb{Z}_2$, und es gibt daher noch eine zweite Gruppe, deren einfach zusammenhängende Überlagerungsgruppe gerade SU(2) ist. Dies ist die Gruppe SO(3)=SU(2)/$\mathbb{Z}_2$. Da diese Gruppe dieselbe Lie Algebra wie SU(2) besitzt, sollte String Theorie auf SO(3) sich auch durch die affine SU(2) Theorie beschreiben lassen. Dies ist in der Tat der Fall: die Theorie, die SO(3) beschreibt, korrespondiert einfach zu einer weiteren modularen Zustandssumme der affinen SU(2) Theorie.

Falls G= SO(3) ist der Wess-Zumino Term nur dann eindeutig definiert, falls k gerade ist; wir sollten daher erwarten, dass die zweite modulare Zustandssumme nur für gerade k existiert, und das ist in der Tat auch der Fall. Die explizite Formel für diese zweite Zustandssumme hängt dann davon ab, ob k durch 4 teilbar ist oder nicht. Im ersten Fall, d.h. falls $k = 4m$ mit $m \in \mathbb{Z}$, ist

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{j=0}^{k/4-1} \left(\mathcal{H}_j \oplus \mathcal{H}_{k/2-j}\right) \otimes \left(\bar{\mathcal{H}}_j \oplus \bar{\mathcal{H}}_{k/2-j}\right) \oplus 2\,\mathcal{H}_{k/4} \otimes \bar{\mathcal{H}}_{k/4}\,, \tag{6.1.12}$$

wobei die Summe nur über $j \in \mathbb{N}_0$ läuft. Falls k nicht durch 4 teilbar ist, gilt andererseits

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{j=0}^{k/2} \mathcal{H}_j \otimes \bar{\mathcal{H}}_j \;\oplus\; \bigoplus_{j=1}^{k/2} \mathcal{H}_{j-1/2} \otimes \bar{\mathcal{H}}_{k/2+1/2-j}\,, \tag{6.1.13}$$

wobei wiederum in den beiden Summen $j \in \mathbb{N}_0$. Mit der obigen Formel für S kann man leicht nachprüfen, dass die zugehörige Vakuum Torusamplitude unter S invariant ist; um die Invarianz unter T nachzuprüfen muss man zusätzlich wissen, dass das konforme Gewicht der Höchstgewichtsvektoren der Darstellung j gerade

$$h_j = \frac{j(j+1)}{(k+2)} \tag{6.1.14}$$

ist. [Insbesondere gilt dann, dass $h_{k/2-j} = h_j + (k/4 - j)$.]

Übrigens kann man beweisen, dass für die SU(2) Theorie die ladungskonjugierte Zustandssumme und die obigen SO(3) Zustandssummen im wesentlichen die einzigen

Kombinationen von affinen SU(2) Darstellungen sind, die zu einer modular invarianten Torus Vakuumamplitude führen. Die einzigen Ausnahmen sind die drei exzeptionellen Theorien, die nur für einzelne Werte von k auftreten, nämlich für $k = 10$, $k = 16$ und $k = 28$. Ihre Zustandssummen sind für $k = 10$:

$$\mathcal{H} = (\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_3) \otimes (\bar{\mathcal{H}}_0 \oplus \bar{\mathcal{H}}_3) \bigoplus (\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_5) \otimes (\bar{\mathcal{H}}_2 \oplus \bar{\mathcal{H}}_5) \bigoplus (\mathcal{H}_{3/2} \oplus \mathcal{H}_{7/2}) \otimes (\bar{\mathcal{H}}_{3/2} \oplus \bar{\mathcal{H}}_{7/2}) \,, \tag{6.1.15}$$

für $k = 16$:

$$\mathcal{H} = (\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_3) \otimes (\bar{\mathcal{H}}_0 \oplus \bar{\mathcal{H}}_3) \bigoplus (\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_5) \otimes (\bar{\mathcal{H}}_2 \oplus \bar{\mathcal{H}}_5) \bigoplus (\mathcal{H}_{3/2} \oplus \mathcal{H}_{7/2}) \otimes (\bar{\mathcal{H}}_{3/2} \oplus \bar{\mathcal{H}}_{7/2}) \,, \tag{6.1.16}$$

und schliesslich für $k = 28$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \Big(\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_5 + \mathcal{H}_9 + \mathcal{H}_{14}\Big) \otimes \Big(\bar{\mathcal{H}}_0 + \bar{\mathcal{H}}_5 + \bar{\mathcal{H}}_9 + \bar{\mathcal{H}}_{14}\Big) \\ &\quad \bigoplus \Big(\mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_6 + \mathcal{H}_8 + \mathcal{H}_{11}\Big) \otimes \Big(\bar{\mathcal{H}}_3 + \bar{\mathcal{H}}_6 + \bar{\mathcal{H}}_8 + \bar{\mathcal{H}}_{11}\Big) \,. \end{aligned} \tag{6.1.17}$$

Die vollständige Liste der modular invarianten Zustandssummen wird daher durch das sogenannte ADE Muster beschrieben, wobei $h = k + 2$ gerade die (duale) Coxeter Zahl der entsprechenden einfach geschnürten Lie Algebra ist. So entsprechen die ladungskonjugierten Zustandssummen den Lie Algebren A_n mit $n \geq 1$ (für die $h^\vee(A_n) = n + 1$); die obigen SO(3) Zustandssummen entsprechen D_n mit $n \geq 3$ (für die $h^\vee(D_n) = 2n - 2$); und die drei exzeptionellen Theorien entsprechen E_6 ($h^\vee(E_6) = 12$), E_7 ($h^\vee(E_7) = 18$) und E_8 ($h^\vee(E_8) = 30$).

7 Zusammenfassung

In diesen Vorlesungen haben wir versucht, die wichtigsten Elemente zwei-dimensionaler konformer Feldtheorie zu beschreiben. Unser Zugang war reduktionistisch insofern als wir die gesamte Theorie vermittels der Darstellungstheorie der beiden meromorphen Untertheorien zerlegt haben.

Wir haben natürlich auch vieles ausgelassen, was interessant gewesen wäre zu behandeln. Unter den 'klassischen Themen' von konformer Feldtheorie haben wir insbesondere nicht behandeln können:

1. Äquivalenzrelationen zwischen meromorphen konformen Feldtheorien: insbesondere die Vertex Operator Konstruktion von Frenkel, Kac und Siegel, die zeigt, dass die affinen Theorien einfach geschnürter Lie Algebren bei $k = 1$ gerade durch (freie) Gittertheorien beschrieben werden; die freie Fermionen Konstruktion der so(n) Theorien bei $k = 1$, und die Äquivalenz dieser beiden Beschreibungen (das 'Symmetric Space Theorem' von Goddard, Nahm und Olive). [Diese Dings sind sehr gut in dem Review Papier von Goddard und Olive, das in [GO] abgedruckt ist, nachzulesen.]

2. Generelle Konstruktionen konformer Feldtheorien, insbesondere die Coset Konstrution und die Orbifold Konstruktion.

In neuerer Zeit, insbesondere durch den Advent von D-branen in String Theorie, hat die Analyse von konformen Feldtheorien auf Weltflächen mit Rändern an grosser Bedeutung gewonnen. Leider haben wir auch keine Zeit gehabt, die dabei auftretenden Konstruktionen zu besprechen. [Allerdings sollten die Besucher dieser Vorlesung jetzt in der Lage sein, eine der dazu einführenden Abhandlungen zu verstehen.]

References

[DMS] P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Sénéchal, *Conformal field theory*, Springer Verlag New York 1997 ISBN 0-387-94785-X.

[Kaku] M. Kaku, *Strings, conformal fields and M-theory*, Springer Verlag New York 1999 (2nd ed) ISBN 0-387-98892-0.

[Kac] V.G. Kac, *Vertex algebras for beginners*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island 1996 ISBN 0-8218-0643-2.

[Ketov] S.V. Ketov, *Conformal field theory*, World Scientific Singapore 1995 ISBN 981-02-1608-4.

[GO] P. Goddard, D.I. Olive (eds.), *Kac-Moody and Virasoro algebras*, a reprint volume for physicists, World Scientific Singapore 1988 ISBN 9971-50-419-7.

[G] P. Goddard, *Meromorphic conformal field theory* in *Infinite dimensional Lie algebras and Lie groups: Proceedings of the CIRM Luminy Conference, 1988* (World Scientific, Singapore, 1989) 556.

[GG] M.R. Gaberdiel, P. Goddard, *Axiomatic Conformal Field Theory*, Commun. Math. Phys. **209**, 549-594 (2000); hep-th/9810019.

[Ga] M.R. Gaberdiel, *An introduction to conformal field theory*, Rep. Prog. Phys. **63**, 607-667 (2000); hep-th/9910156.