

Elektrodynamik

Vorlesungsfolien, Kapitel 14

ETH Zürich, 2024 FS

PROF. N. BEISERT

© 2014–2024 Niklas Beisert.

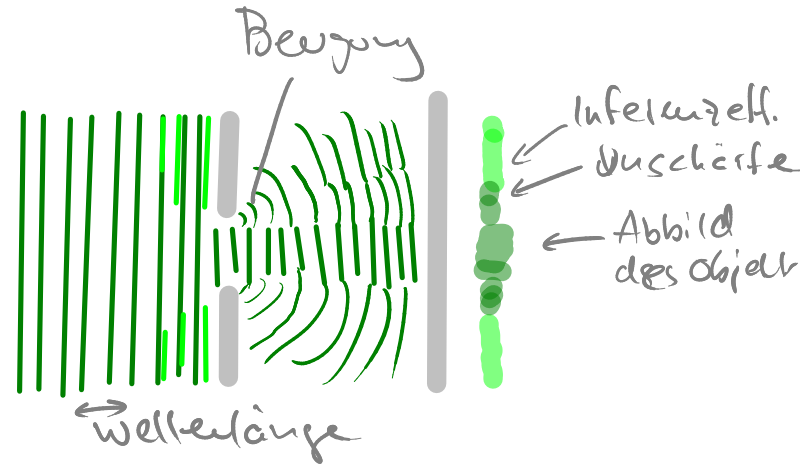
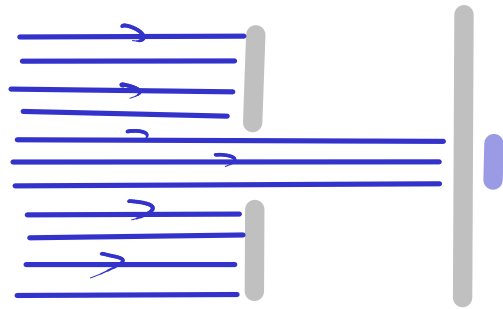
Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Dieses Werk ist lizenziert unter der Creative Commons Lizenz „Namensnennung – Nicht kommerziell – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International“ (CC BY-NC-SA 4.0).



Die Lizenz kann eingesehen werden unter:
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>.

Die aktuelle Version dieses Werks befindet sich unter:
<http://people.phys.ethz.ch/~nbeisert/lectures/>.

14 Wellenoptik

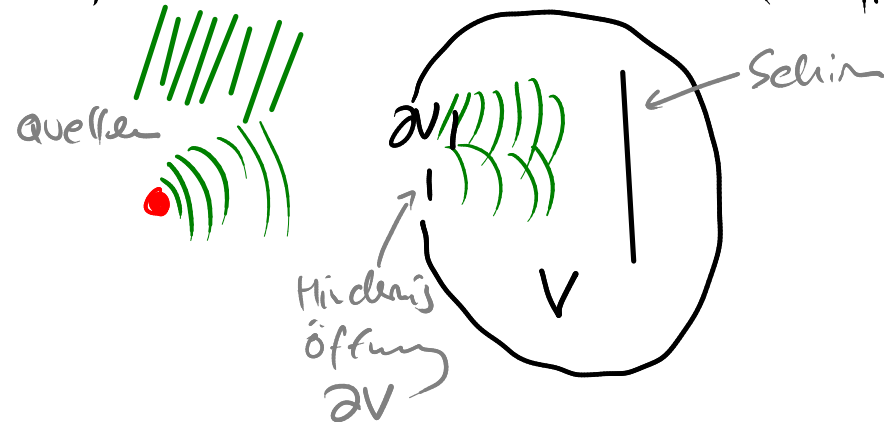


14.1 Kirchhoffsche Beugungstheorie

Skalares Feld ψ , $\Delta\psi = 0$, Objekte als Randbed z.B. $\psi = 0$ / Rand

Aufteilung des Problems in zwei Zone

- Gebiet der Quellen (vor Hindernis)
- Gebiet der Beugung (nach Hindernis)



Ausatz: Zeit-Translationssinv. \Rightarrow Zerlegung nach Freq, ω fest Wellenzahl

$$\psi \sim e^{-i\omega t}$$

$$0 = \square \psi = \Delta \psi + \frac{\omega^2}{c^2} \psi = \Delta \psi + k^2 \psi$$

Greensche Fkt $G(x, y) = \frac{e^{ik\|x-y\|}}{4\pi\|x-y\|}$ in freiem Raum

freie Ausbreitung im Quellgebiet, Streuung mit Rand ∂V , Ausbleiten im Zielgel.

\Rightarrow Kirchhoffsche Formel

Feld im Quellraum

$$\psi(x) = \oint_{\partial V} d\gamma^2 \vec{n} \cdot \left(\frac{e^{ik\|x-y\|}}{4\pi\|x-y\|} \vec{\partial}_y \psi_0(y) - \psi_0(y) \vec{\partial}_y \frac{e^{ik\|x-y\|}}{4\pi\|x-y\|} \right)$$

im Zielgebiet ∂V

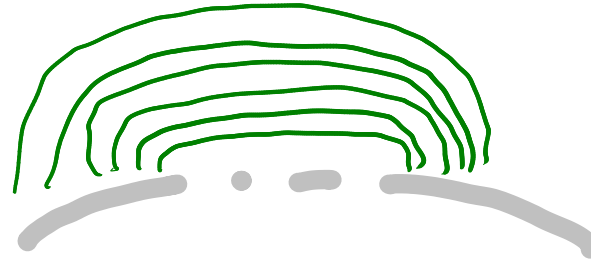
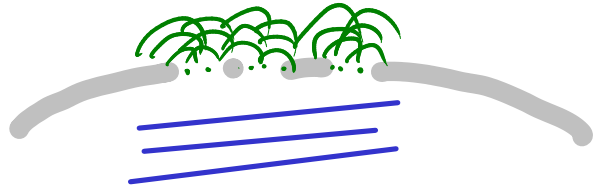
Feld $\psi(x)$ erfüllt die Feldgleichung $(\Delta \psi + k^2 \psi) = 0$.

Erfüllt nicht die Randbed genau ψ_0 , $\vec{n} \cdot \vec{\partial} \psi_0$ können nicht gleichzeitig erfüllt werden
 k. Näherung: $\psi_0 = \vec{n} \cdot \vec{\partial} \psi_0 = 0$ auf ∂V ohne Öffnung

\bullet ψ_0 und $\vec{n} \cdot \vec{\partial} \psi_0$ mit Öffnung werden durch Quellfelder gegeben

14.2. Interferenz und Huygens-Prinzip

Huygens-Prinzip:

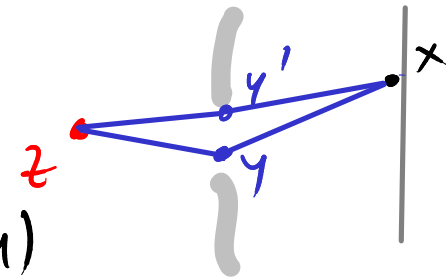


An der Öffnung entstehen kugelwellen, die sich überlagern und in Zielgebiet neue Wellenfronten erzeugen, die dort die Beugung (gut) beschreiben.

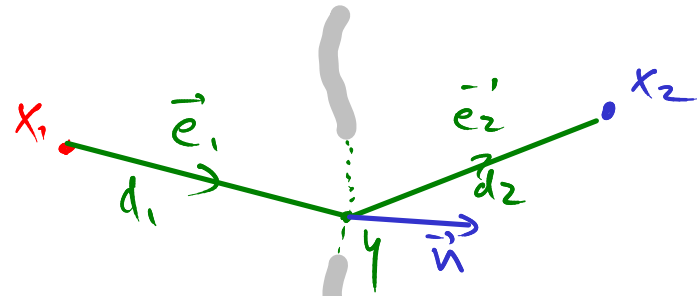
Optische Weglänge L Betrachtete Phase in Kirchhoff Formel und den geraden Weg von (Punkt) Quelle z zu Ziel x

$$\psi(x) \sim \int dy^2 e^{ik\|x-y\|} e^{i\|y-z\|k}$$

$$L_y(x, z) = \|x-y\| + \|y-z\|; \text{ Äquivalent } L_y = \int dy n(y)$$



14.3 Fraunhofer- und Fresnel-Beugung



Tem aus Kirchhoff'schen Formel

$$\vec{n} \cdot \left(\frac{e^{ikd_1}}{4\pi d_1} \vec{\partial}_y - \frac{e^{ikd_2}}{4\pi d_2} \vec{\partial}_y \right)$$

$$= \frac{e^{ikd_1 + ikd_2}}{16\pi^2 d_1 d_2} \left(\left(-\frac{1}{d_2} + ik \right) \vec{e}_2 + \left(\frac{1}{d_1} - ik \right) \vec{e}_1 \right) \cdot \vec{n}$$

$$\approx \frac{e^{ikd_1 + ikd_2} ik}{16\pi^2 d_1 d_2} (\vec{e}_2 - \vec{e}_1) \cdot \vec{n} \quad \text{für } d_1, d_2 \gg \lambda \sim 1/k$$

$$\vec{e}_{1,2} \cdot \vec{n} = \cos \alpha_{1,2} \quad \frac{e^{ik(d_1 + d_2)} ik}{16\pi^2 d_1 d_2} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)$$

Fraunhofer-Biegung

für Quelle, Detektor in einiger Entfernung vom Objekt

⇒ entwickle d_1, d_2

$$d_1 + d_2 = \sqrt{(\vec{x}_1 - \vec{y})^2} + \sqrt{(\vec{y} - \vec{x}_2)^2}$$

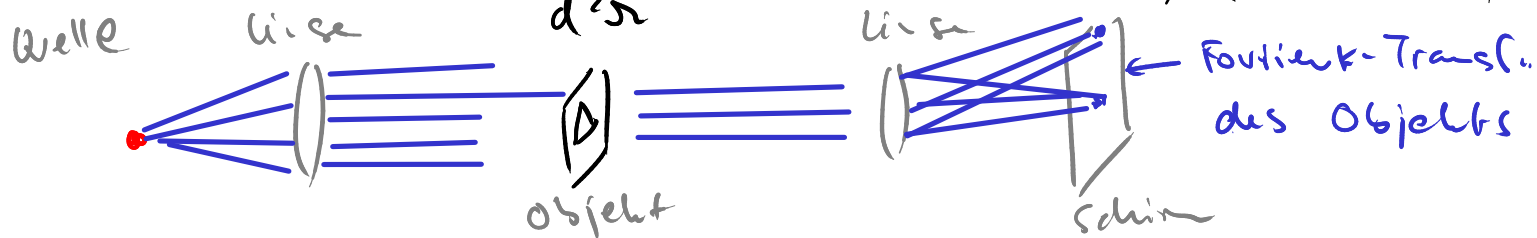
$$= r_1 - \frac{\vec{x}_1 \cdot \vec{y}}{r_1} + r_2 - \frac{\vec{x}_2 \cdot \vec{y}}{r_2} + \dots \quad \|\vec{y}\| \ll r_1, r_2$$

$$\psi(x) \approx k (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \frac{e^{ik(r_1+r_2)}}{r_1 r_2} \int dy^2 e^{ik(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \cdot \vec{y}}$$

\uparrow
 $F(\vec{n})$
 Fourier-Transformierte von Obj.

Fraunhofer-Biegung: Abbild erscheint als FourierTransf. des Obj.

diffr. Streuquerschnitt $\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega} \sim k^2 (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)^2 |F(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)|^2$

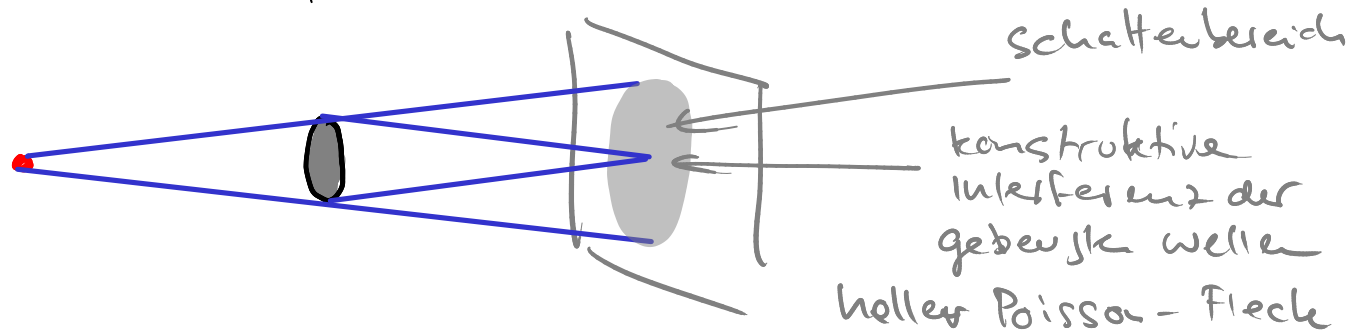


Fresnel - Beugung

Quelle oder Detektor in Nähe des Objekts

=> benötigt exakte Phase allgemein nicht in geschl. Form integrierbar.

Beispiele: Kreisscheibe,



kreisförmige Öffnung:

Intensität oszilliert mit Abstand $\sim \sin^2 \left(\frac{ka^2}{2\rho} \right)$

Abstand \downarrow Radius \downarrow
Wellenzahl \uparrow

Intensitätsminima + maxima