Elektrodynamik

Vorlesungsfolien, Kapitel 13

ETH Zürich, 2024 FS

Prof. N. Beisert

Die aktuelle Version dieses Werks befindet sich unter:
`http://people.phys.ethz.ch/~nbeisert/lectures/`.

13 Wellenleiter

13.1 Wellen in Leitern

Leiter: $\vec{E}$ erzeugt Strom $\vec{j}$ über $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ σ spez. Widerstand.

Ladungsdichte ρ in einem Leiter klingt exponentiell ab:

$$\partial_t \rho = -\vec{\partial} \cdot \vec{j} = -\sigma \vec{\partial} \cdot \vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \rho \longrightarrow \text{nach charakt. Zeit } \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

nach einiger Zeit gilt $\rho \approx 0$.

Für Dynamik: Maxwell-Gl. durch Kombination DGl. für $\vec{E}$

$$\mu_0 \sigma \partial_t \vec{E} = \mu_0 \partial_t \vec{j} = \vec{\partial} \times \partial_t \vec{B} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E}$$

$$= -\vec{\partial} \times (\vec{\partial} \times \vec{E}) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E}$$

$$= \Delta \vec{E} - \vec{\partial} (\vec{\partial} \cdot \vec{E}) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E} \qquad \vec{\partial} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

$$= \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E}$$

Telegraphen Gl. $\quad \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E} - \mu_0 \sigma \partial_t \vec{E} = 0$

Lösung mittels mon. eb. Wellen

$$\Delta \psi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \psi - \mu_0 \sigma \partial_t \psi \qquad \psi = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t}$$

$$\rightarrow \quad -\vec{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} + i \omega \mu_0 \sigma = 0 \qquad \text{algebraisch}$$

komplexe Gleichung ~ Dissipation / el. Widerstand

komplexe Lsg.

2 Fälle $\quad k$ reell, ω komplex

k komplex, ω reell

Zeitlich abklingende Welle k reell ω komplex

$$\omega = -\frac{i}{2}\mu_0 \sigma c^2 \pm \sqrt{\vec{k}^2 c^2 - \frac{1}{4}\mu_0^2 \sigma^2 c^4} = \omega_r + i\omega_i$$

mit $\omega_i < 0 \Rightarrow \psi = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t} = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega_r t}\, e^{\omega_i t}$

Räumlich abklingende Welle ω reell k komplex

⇒ Zeitlich konstante Amplitude
Räumlich Welle mit exponentieller Abhängigkeit

z.B. entlang z-Achse: $\vec{k} = (k_r + i k_i)\vec{e}_z$

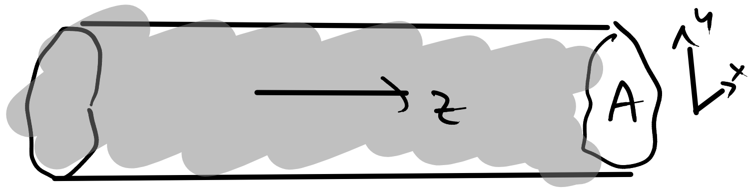
$$-k_r^2 - 2i k_r k_i + k_i^2 + \frac{\omega^2}{c^2} + \mu_0 \sigma i\omega = 0 \Rightarrow k_i = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2k_r}$$

$$-k_r^2 + \frac{\mu_0^2 \sigma^2 \omega^2}{4k_r^2} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \qquad k_r^2 = \frac{\omega^2}{2c^2} \pm \sqrt{\frac{\omega^4}{4c^4} + \frac{1}{4}\mu_0^2 \sigma^2 \omega^2}$$

1/kr ist Eindringtiefe in Leiter

13.2 Wellenleiter

Hohlleiter berandet von id. Leiter



Reduktion auf 2 Dim

Translationsinvarianz in z, t $\sim e^{ikz-i\omega t}$ ω: Kreisfreq.
k: Wellenzahl

$$F(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\left[\overset{\in\mathbb{C}}{F(x,y)}\, e^{ikz} e^{-i\omega t}\right] \qquad \partial_t F = -i\omega F$$

vektorielle Grösse $\vec F_3$ zerfällt in $\vec F, f$ $\vec F\cdot\vec e_z = 0$ $f = \vec F_3\cdot\vec e_z$

$$\vec F_3 = \vec F + \vec e_z f \qquad \vec x_3 = \vec x + \vec e_z z$$

$$\vec F_3\cdot\vec G_3 = \vec F\cdot\vec G + fg \qquad \vec\partial_3\cdot\vec F_3 = \vec\partial\cdot\vec F + ikf$$

Dualer Vektor

$$\vec F^{\times} = \vec F\times\vec e_z = \begin{pmatrix} F_y \\ -F_x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(Rotation um } 90^\circ\text{)}$$

Rechenregeln für duale Vektoren

$$\vec{F}^{\times} \cdot \vec{e}_z = \vec{F}^{\times} \cdot \vec{F} = 0$$

$$\vec{F}^{\times\times} = - \vec{F}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{G}^{\times} = - \vec{F}^{\times} \cdot \vec{G} = F_x G_y - F_y G_x$$

$$\vec{\partial}_3 \times \vec{F}_3 = -ik \vec{F}^{\times} + \vec{\partial}^{\times} F + \vec{e}_z \vec{\partial} \cdot \vec{F}^{\times}$$

$$\vec{F}_3 \times \vec{G}_3 = f \vec{G}^{\times} + g \vec{F}^{\times} + \vec{e}_z \vec{F} \cdot \vec{G}^{\times}$$

Maxwell-Gl von 3D → 2D.

Wellengleichung $\Box_{3+1} \psi = 0 \qquad \psi = \vec{E}, \vec{B}, e, b$

$$0 = \Box_{3+1} \psi = \Delta_3 \psi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \psi = \Delta_2 \psi - k^2 \psi + \frac{\omega^2}{c^2} \psi$$

$$\Delta \psi = - \lambda \psi \qquad \lambda := \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$$

keine Quellen, indiv. M.G.

$$0 = \vec{\partial}_3 \cdot \vec{E}_3 = \vec{\partial} \cdot \vec{E} + ike$$

Skalaren:

$$0 = \vec{\partial}_3 \vec{B}_3 = \vec{\partial} \cdot \vec{B} + ikb$$

vektorielle:

$$0 = -ik\vec{E}^{\times} + \vec{\partial}^{\times} e - i\omega \vec{B} \qquad 0 = \vec{\partial} \cdot \vec{E}^{\times} - i\omega b$$

$$0 = -ik\vec{B}^{\times} + \vec{\partial}^{\times} b + \frac{i\omega}{c^2} \vec{E} \qquad 0 = \vec{\partial} \cdot \vec{B}^{\times} + \frac{i\omega}{c^2} e$$

insgesamt $\quad \Delta\varphi = -\lambda\varphi$ $\quad \lambda$ fest $\quad$ Annahme $k \neq 0 \quad \omega \neq 0$

Lösung:

$$e = \frac{i}{k} \vec{\partial} \cdot \vec{E} \qquad b = -\frac{i}{\omega} \vec{\partial} \cdot \vec{E}^{\times}$$

$$\vec{B} = -\frac{k}{\omega} \vec{E}^{\times} + \frac{1}{k\omega} \vec{\partial}^{\times} (\vec{\partial} \cdot \vec{E})$$

Laplace Problem in 2D

Randbedingungen auf ∂A: Feld dringt (fast) nicht ein.

$$\vec{E}_3 \parallel \vec{n} \qquad \vec{B} \perp \vec{n} \qquad \vec{n} \cdot \vec{e}_z = 0$$

$$0 = \vec{n} \times \vec{E}_3 = \vec{n}^\times e + \vec{e}_z (\vec{n} \cdot \vec{E}^\times)$$

$$0 = \vec{n} \cdot \vec{B}_3 = \vec{n} \cdot \vec{B}$$

Auf ∂A: $\quad e = 0 \qquad \vec{n} \cdot \vec{E}^\times = 0 \qquad \vec{n} \cdot \vec{B} = 0$

$$e = \frac{i}{k} \vec{\partial} \cdot \vec{E} \quad \rightarrow \quad \vec{\partial} \cdot \vec{E} = 0 \qquad \vec{n} \cdot \vec{B} = 0 \Leftarrow \vec{n} \cdot \vec{E}^\times = 0$$

$$\Delta \vec{E} = -\lambda \vec{E} \qquad \vec{n} \cdot \vec{E}^\times \big|_{\partial A} = 0 \qquad \vec{\partial} \cdot \vec{E} \big|_{\partial A} = 0$$

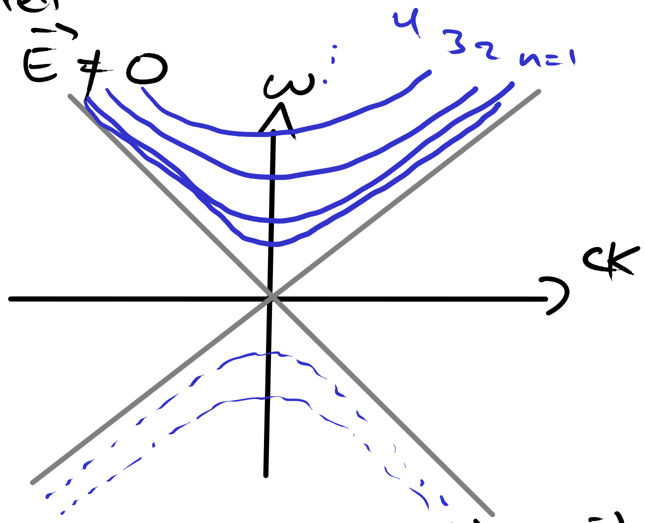
Dirichlet RB für $\vec{n} \cdot \vec{E}^\times$ }
Neumann-RB für $\vec{n} \cdot \vec{E}$ } legt Lösung eindeutig fest

Eigenwertproblem

$\Delta \vec{E} = -\lambda \vec{E}$ mit D/N RB für festes λ; Lsg ist eindeutig.

Lösung ist $\vec{E} = 0$ in der Regel

Ausnahmen für gewisse $\lambda = \lambda_n$ (diskret) mit $\vec{E} \neq 0$



Beziehung zwischen ω und k

$$\omega = c\sqrt{\lambda_n + k^2}$$

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \lambda_n}$$

Spektrum der erlaubten Werte (Eigenwerte) λ_n von $\Delta \vec{E} = \lambda \vec{E}$ hängt nur von Geometrie vom Gebiet A ab.

$$e = \frac{i}{k}\vec\partial\cdot\vec E \qquad b = -\frac{i}{\omega}\vec\partial\cdot\vec E^{\times} \qquad \vec B = -\frac{k}{\omega}\vec E^{\times} + \frac{1}{k\omega}\vec\partial^{\times}(\vec\partial\cdot\vec E)$$

$$\Delta\vec E = -\lambda\vec E \qquad \lambda = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \qquad \lambda\in\{\lambda_n\} \qquad e = 0|_{\partial A} \qquad \vec n\cdot\vec E^{\times} = 0|_{\partial A}$$

Ziel: $\lambda \geq 0$ Annahme: Lsg $\vec E$ zu $\Delta\vec E = -\lambda\vec E$ und R.B.

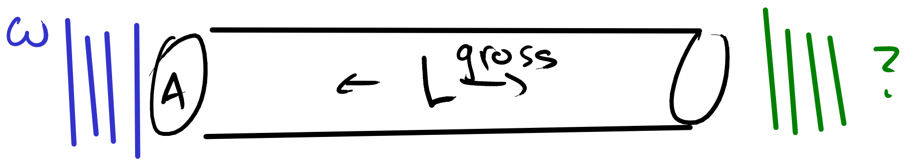
Greensche Identität (2D Vektorfeld in $\mathbb{C}$)

$$\mathrm{Re}\oint_{\partial A} dx\,\vec n\cdot\Big(\vec E\,\overbrace{(\vec\partial\cdot\vec E^{*})}^{=0} + \overbrace{\vec E^{\times}}^{=0}(\vec\partial\cdot\vec E^{\times *})\Big)$$

$$= \int_A dx^2\Big(|\vec\partial\cdot\vec E|^2 + |\vec\partial\cdot\vec E^{\times}|^2 + \mathrm{Re}\,(\vec E\cdot\overbrace{\Delta\vec E}^{-\lambda})\Big)$$

$$\Rightarrow \int_A dx^2\Big(|\vec\partial\cdot\vec E|^2 + |\vec\partial\cdot\vec E^{\times}|^2 - \lambda\|\vec E\|^2\Big) = 0$$

Positivität der Terme $\Longrightarrow$ $\lambda \geq 0$



ω fest, k durch λ_n gegeben $\quad k_n = \sqrt{\omega^2/c^2 - \lambda_n}$

$\frac{\omega}{c} > \sqrt{\lambda_n} \Rightarrow k_n \in \mathbb{R}$, räumlich oszillierende Welle, volle Amplitude am Ende

$\frac{\omega}{c} < \sqrt{\lambda_n} \Rightarrow k_n \in i\mathbb{R}$, räumlich exp. abfallende Welle
Intensität gedämpft durch
$\exp(-2|k_n| \cdot L)$

Für gegebenes ω werden nur endlich viele Moden mit $\lambda_n < \frac{\omega^2}{c^2}$ weit übertragen

Fall $\lambda > 0$: TE-/TM-Moden

TE: transversal elektrisch $\Leftrightarrow$ $e = 0$

TM: transversal magnetisch $\Leftrightarrow$ $b = 0$

Einschränkungen möglich da alle MG nach e, b gelöst werden können

$$\vec{E} = \frac{ik}{\lambda}\vec{\partial} e + \frac{i\omega}{\lambda}\vec{\partial}^{\times} b$$

$$\vec{B} = -\frac{i\omega}{c^2\lambda}\vec{\partial}^{\times} e + \frac{ik}{\lambda}\vec{\partial} b$$

$\Leftarrow \lambda \neq 0$

zu lösende Problem $\Delta e = -\lambda e$ $\Delta b = -\lambda b$

DRB $e = 0|_{\partial A}$ NRB $\vec{n}\cdot\vec{\partial} b = 0|_{\partial A}$

2 Probleme für e, b entkoppeln.

Fall $\lambda = 0$: TEM-Moden

Greensche Id.

$$\int_A dx^2 \Big(|\underbrace{\vec{\partial}\cdot\vec{E}}_{e}|^2 + |\underbrace{\vec{\partial}\cdot\vec{E}^{\times}}_{b}|^2 \Big) = 0$$

Positivität $\Rightarrow$ $e = b = 0$ $\quad \vec{\partial}\cdot\vec{E} = 0 \quad \vec{\partial}\cdot\vec{E}^{\times} = 0$

transversal elektrisch, magnetische Mode (TEM) RB $\vec{n}\cdot\vec{E}^{\times} = 0\big|_{\partial A}$

Lösungen existieren nicht für alle A insbesondere nicht
für einfach zush. A

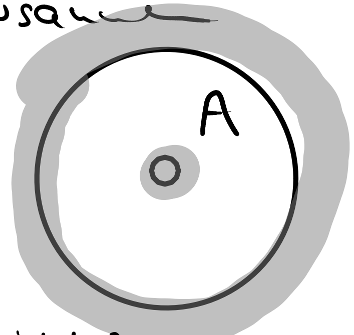
Beweis: nicht zush. A gilt $\vec{E} = -\vec{\partial}\Phi$

DGl: $\Delta\phi = 0 \Rightarrow e = b = 0$ $\quad$ RB $\vec{n}\cdot\vec{E}^{\times} \Rightarrow \phi = \mathrm{const}\big|_{\partial A}$

für einfach zush. A einen zush. Rand ∂A

laplace problem hat eindeutige Lsg $\Rightarrow \phi = \mathrm{const}\big|_A$
$\Rightarrow \vec{E} = 0$

Lösungen hängen mit der Topologie von A zusammen



Es gibt eine TEM-Mode für jedes Loch in A

Begründung ist analog:

können Ansatz $\vec{E} = -\vec{\partial}\phi$ machen (RB $\vec{n}\cdot\vec{E}^{x} = 0$ wichtig)

Laplace Problem mit $\phi = \text{const}$ auf jeder Komponente des Rand ∂A

1 Freiheitsgrad je Rand komp. -1 Freiheitsgrad für triv Lsg

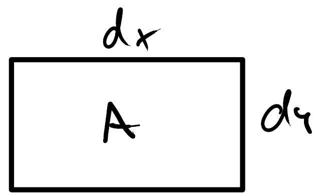
$\phi = \text{const}\,|_A$

Wichtig: TEM sind nicht-dispersiv

$$\omega = kc \qquad \text{(kein minimales } \omega\text{)}$$

- Alle Freq ω können über lange Strecken übertragen werden
- Wird die Form des Signals nicht verformt

Rechteckige Hohlleiter



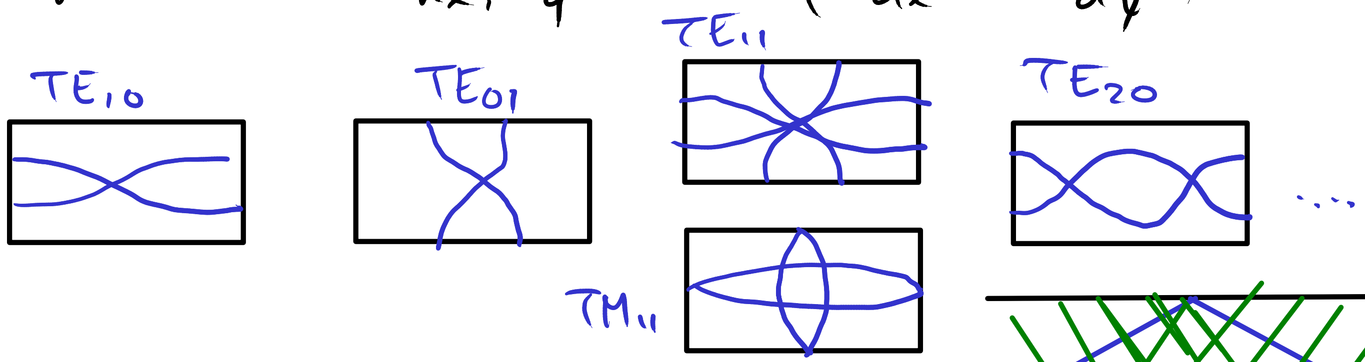
$$A = [0, d_x] \times [0, d_y]$$

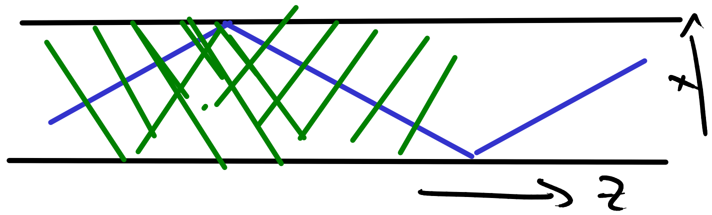
$$n_{x,y} \in \mathbb{Z}_0^+$$

TE_{n_x,n_y}: $b_{n_x,n_y} \sim \cos \dfrac{\pi n_x x}{d_x} \cos \dfrac{\pi n_y y}{d_y}$ $\quad n_x > 0$ od. $n_y > 0$

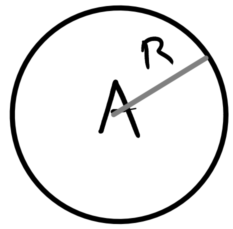
TM_{n_x,n_y}: $e_{n_x,n_y} \sim \sin \dfrac{\pi n_x x}{d_x} \sin \dfrac{\pi n_y y}{d_y}$ $\quad n_x > 0$ und $n_y > 0$

Eigenwerte $\quad \lambda_{n_x,n_y} = \pi^2 \left(\dfrac{n_x^2}{d_x^2} + \dfrac{n_y^2}{d_y^2} \right)$





Kreisförmige Hohlleiter



Problem in Radialkoordinaten r, φ lösen!

$$e, b \sim f(r)\, e^{im\varphi}$$

DGl $$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r} f\right) - \frac{m^2}{r^2} f + \lambda f = 0$$

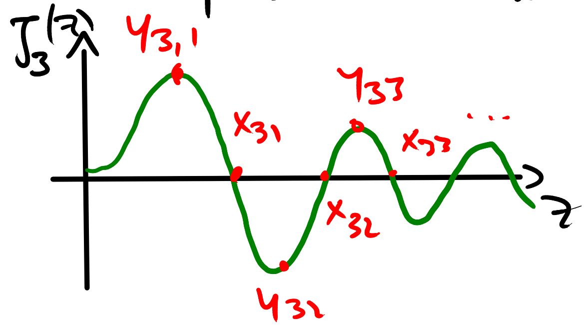
Bessel Funktionen $\quad f \sim J_m(\sqrt{\lambda}\, r)$

Randbed bei $r = R$ $\Rightarrow$ TM $\quad f$: Nullstelle

TE $\quad f$: Wendepunkt

Nullst. $x_{m,n}$ von $J_m(x)$ $\quad$ Wendepunkt $y_{m,n}$ von $J_m(x)$

$\Rightarrow \quad \lambda^{TE}_{m,n} = \frac{y^2_{m,n}}{R^2} \qquad \lambda^{TE}_{m,n} = \frac{x^2_{m,n}}{R^2}$



Energiefluss in WL

rel. Grössen: Energie je Länge dW/dz, übertragene Leistung P

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\varepsilon_0}{4} \int_A dx^2 \left(\|\vec{E}\|^2 + |e|^2 + \|\vec{B}\|^2 + |b|^2 \right)$$

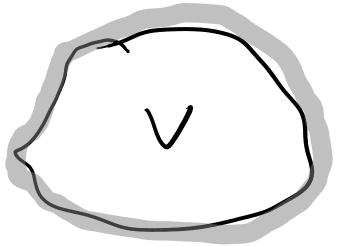
$$= \ldots = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_A dx^2 \left(\|E\|^2 + \frac{1}{k^2} |\vec{\partial} \cdot \vec{E}|^2 \right)$$

$$P = \frac{1}{2\mu_0} \int_A dx^2 \, \vec{e}_z \cdot \vec{S}_3 = \frac{1}{2\mu_0} \int_A dx^2 \, \mathrm{Re} \left(\vec{E} \cdot \vec{B}^{*} \right)$$

$$= \ldots = \frac{k}{2\mu_0 \omega} \int_A dx^2 \left(\|\vec{E}\|^2 + \frac{1}{k^2} |\vec{\partial} \cdot \vec{E}|^2 \right) = \frac{k}{\omega} c^2 \frac{dW}{dz}$$

$$V_{str.} = \frac{k}{\omega} c^2 = \frac{2kc^2}{2\omega} = \frac{d\omega}{dk} = V_g \qquad \omega = c\sqrt{\lambda_n + k^2}$$

13.3 Kavitäten



∂V ist Leiter

Welche Wellen sind in V erlaubt?

$$\Delta_3 \psi = -\lambda \psi \qquad \lambda = \frac{\omega^2}{c^2}$$

V kompakt $\Rightarrow$ λ diskrete Lösungen

Geometrie von V bestimmt Spektrum $\{\lambda_n\}$

Terminierter Wellenleiter

$$V = A \times [0, d_z]$$

∂V ist Leiter

A bei $z = 0, d_z$

Damit RB bei $z = 0, d_z$ erfüllt sind $\Rightarrow$ Wellenzahl $k_z = \pm \frac{\pi n_z}{d}$

Randbed $\vec{E} = 0$ und $b = 0$

TE $\quad b(z) \sim \sin \frac{\pi n_z z}{d_z} \quad n_z > 0$

TM $\quad e(z) \sim \cos \frac{\pi n_z z}{d_z} \quad n_z \geq 0$

$$\omega_{n, n_z}^{TE/M} = c \sqrt{\lambda_n^{TE/M} + \frac{\pi^2 n_z^2}{d_z^2}}$$