Elektrodynamik

Vorlesungsfolien, Kapitel 12

ETH Zürich, 2024 FS

Prof. N. Beisert

12 Elektrodynamik mit Materie

Effekte: Dispersion, Reflexion und Brechung, Streuung

12.1 Wellen im Medium

Übertragung der Statik mit Materie auf Dynamik

Maxwell-Gl.

$$\vec{\partial}\cdot\vec{D} = \rho, \qquad \vec{\partial}\times\vec{H} - \partial_t\vec{D} = \vec{j},$$

$$\vec{\partial}\cdot\vec{B} = 0, \qquad \vec{\partial}\times\vec{E} + \partial_t\vec{B} = 0.$$

Erhaltene Größen: $w = \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B} + \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$ $\qquad \vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$

$$\vec{\pi} = \vec{D}\times\vec{B} \qquad T_{ij} = D_i E_j + B_i H_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B}\right)$$

Materiebeziehungen zwischen $(D, H) \Leftrightarrow (E, B)$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \varepsilon_r\varepsilon_0\vec{E} \qquad \vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_r\mu_0\vec{H}$$

(ε_r:) rel. konstanten $\qquad$ (μ_r:) rel konstanten (numerisch)

Ebene monochromatische Wellen

Ergeben sich aus Vak-Wellen durch Ersetzen von $\varepsilon_0 \to \varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$
$\mu_0 \to \mu = \mu_r \mu_0$

Ausbreitungsgeschw. von Wellen im Medium

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} = \frac{c}{n}$$

Brechungsindex des M.

$$n := \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$$

Felder $\quad \vec{E} = \mathrm{Re}\left(\vec{E}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t}\right) \quad \vec{B} = \mathrm{Re}\left(\vec{B}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t}\right)$

Relationen:

$$\|\vec{k}\| = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega n}{c}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = \vec{k} \cdot \vec{B}_0 = \vec{E}_0 \cdot \vec{B}_0 = 0$$

$$\vec{B}_0 = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}_0$$

gemittelte Strom/Dichte

$$w = \frac{\|E_0\|^2}{2\mu v^2} = \frac{n^2}{2\mu_0 c^2} \|E_0\|^2 \qquad \vec{S} = \frac{1}{\mu v} \frac{\vec{k}}{\|k\|} \|E_0\|^2 = \frac{c}{n} \frac{\vec{k}}{\|k\|} w$$

Dispersion

$$D = \varepsilon_0 E + P \quad \text{und} \quad E \qquad (\text{analog für } H, M, P)$$

P ist Reaktion des Mediums auf E

$D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E$ gilt nur für lange Zeiten bzw klein Freq. ω

für höher Freq (lineare Näherung, klein Amplituden)

$$D(\omega) = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) E(\omega) \qquad \varepsilon_r \text{ Frequenzabh.}$$

Relationen:

$$\|k\| = \frac{\omega}{c} n(\omega) \quad \Leftrightarrow$$

Dispersionsrelation

$\omega = \omega(\|k\|)$

nicht-linear

Dispersion im Medium

zwei kenngrössen: Phasengeschw. $\dfrac{\omega(\|k\|)}{\|k\|}$

Gruppengeschw. $\dfrac{d\omega(\|k\|)}{d\|k\|} < c$

12.2 Reflexion und Brechung

Wie verhalten sich dynamische Felder/Wellen an Grenzflächen

Stetigkeitsbed. sind bekannt aus Statik.

Es gilt weiterhin: $\vec{E}_{\parallel}, \vec{H}_{\parallel}, D_{\perp}, B_{\perp}$ stetig!

bestimmen die Felder hinter Grenzfläche eindeutig (zusammen mit $D = \varepsilon E$, $B = \mu H$)

Normalenvektor $\rightarrow \vec{n} \times \Delta \vec{E} = \vec{n} \times \Delta \vec{H} = 0 \qquad \vec{n} \cdot \Delta \vec{D} = \vec{n} \cdot \Delta \vec{B} = 0$

Einlaufende und auslaufende Welle

Welle trifft auf Grenzfläche,

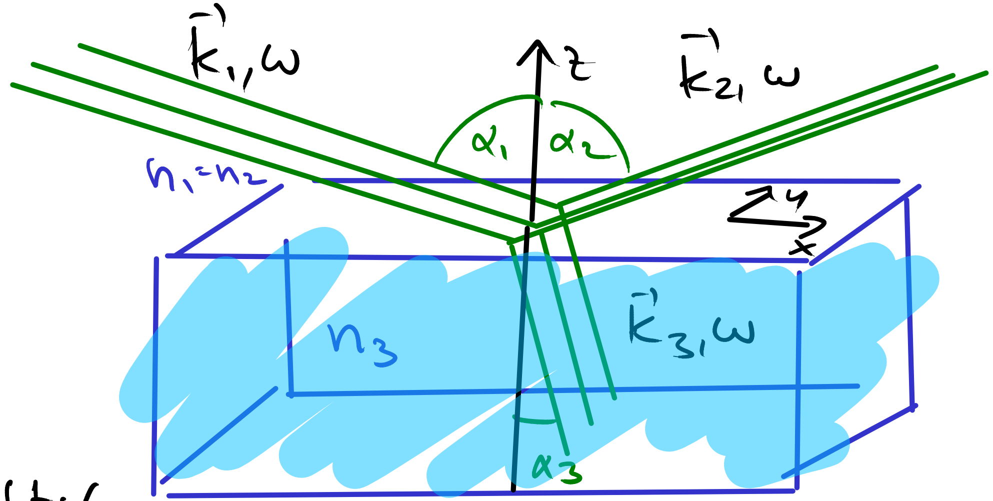
Linearität, Translationsinvarianz (entlang Fläche, Zeit)

können monochromatische Ebene Wellen betrachten.

können ω und $\vec{k}_{\parallel}$ eindeutig festlegen, $k_{\perp}$ aber nicht aber $k_{\perp}(\omega, k_{\parallel})$

$$\vec{k}_{1\parallel} = \vec{k}_{2\parallel} = \vec{k}_{3\parallel}$$

$$k_{1\perp} \neq k_{2\perp} \neq k_{3\perp}$$



Alle (komplexe) Felder schwingen mit gemeinsamem Faktor

$$\exp\left(i\vec{k}_\parallel \cdot \vec{x}_\parallel - i\omega t\right)$$

$$\vec{k}_1 = k_1 \begin{pmatrix} \sin\alpha_1 \\ 0 \\ -\cos\alpha_1 \end{pmatrix} \qquad \vec{k}_2 = k_2 \begin{pmatrix} \sin\alpha_2 \\ 0 \\ \cos\alpha_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{k}_3 = k_3 \begin{pmatrix} \sin\alpha_3 \\ 0 \\ -\cos\alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{k}_{1\parallel} = \vec{k}_{2\parallel} = \vec{k}_{3\parallel} : \qquad k_1 \sin\alpha_1 = k_2 \sin\alpha_2 = k_3 \sin\alpha_3$$

Dispersionsrel.
$\omega_1(k_1) = \omega_2(k_2) = \omega_3(k_3)$

$$k_1 = \frac{\omega n_1}{c}, \qquad k_2 = \frac{\omega n_1}{c}, \qquad k_3 = \frac{\omega n_3}{c}$$

Zusammen: $k_1 = k_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$, $\frac{k_3}{k_1} = \frac{n_3}{n_1}$, $\frac{\sin\alpha_3}{\sin\alpha_1} = \frac{n_1}{n_3}$

Snellius Gesetz $$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_3} = \frac{n_3}{n_1} =: n$$

Elektromagnetische Felder

$$\vec{E}_{z>0} = \mathrm{Re}\left(\left(\vec{E}_1 e^{i\vec{k}_1\cdot\vec{x}} + \vec{E}_2 e^{i\vec{k}_2\cdot\vec{x}} \right) e^{-i\omega t} \right)$$
$$\vec{E}_{z<0} = \mathrm{Re}\left(\vec{E}_3 e^{i\vec{k}_3\cdot\vec{x}} e^{-i\omega t} \right)$$

$\vec{E}_1$ vorgegeben $\Rightarrow$ E_2, E_3, B_1, B_2, B_3

Annahme: $\mu_r = 1$ überall rel. Brechungsindex $n := n_3/n_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r,3}}{\varepsilon_{r,1}}}$

$$\vec{B}_j = \frac{1}{\omega} \vec{k}_j \times \vec{E}_j \qquad \|B_j\| = \frac{k_j}{\omega}\|E_j\| = \frac{n_j}{c}\|E_j\|$$

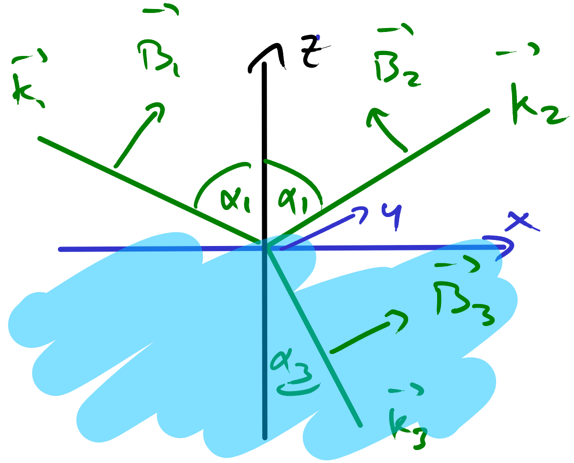
Stetigkeit an der Grenzfläche $z=0$ $\quad \vec{k}\cdot\vec{x} = \vec{k}_{\parallel}\cdot\vec{x}_{\parallel}$

$$\vec{e}_z \times (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 - \vec{E}_3) = 0$$

$$\vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \vec{B}_3$$

$$\vec{e}_z \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 - n^2\vec{E}_3) = 0$$

Zerlegung nach Polarisationen von $\vec{E}_1$



Transversal Elektrische Mode

$$\vec{E}_n = \vec{e}_y E_n$$

$$\Rightarrow \quad E_1 + E_2 = E_3$$

$$\|B_n\| = \frac{n_n}{c} |E_n|$$

$$\frac{n_1}{c} E_1 \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 \\ 0 \\ \sin\alpha_1 \end{pmatrix} + \frac{n_1}{c} E_2 \begin{pmatrix} -\cos\alpha_1 \\ 0 \\ \sin\alpha_1 \end{pmatrix} = \frac{n_3}{c} E_3 \begin{pmatrix} \cos\alpha_3 \\ 0 \\ \sin\alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \frac{\cos\alpha_1 - n\cos\alpha_3}{\cos\alpha_1 + n\cos\alpha_3}\,E_1 \qquad E_3 = \frac{2\cos\alpha_1}{\cos\alpha_1 + n\cos\alpha_3}\,E_1$$

Energiebilanz: Reflexions / Transmissions koeff.

$$R = -\frac{\vec{S}_2\cdot\vec{e}_z}{\vec{S}_1\cdot e_z} = \frac{w_2}{w_1} = \frac{\|E_2\|^2}{\|E_1\|^2} = \left(\frac{\cos\alpha_1 - n\cos\alpha_3}{\cos\alpha_1 + n\cos\alpha_3}\right)^2$$

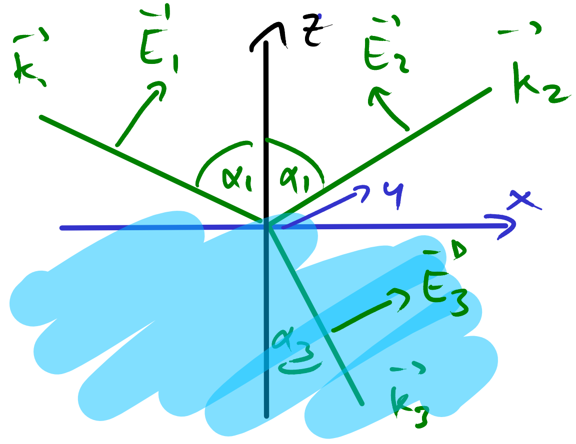
$$T = \frac{\vec{S}_3\cdot\vec{e}_z}{\vec{S}_1\cdot\vec{e}_z} = \frac{\cos\alpha_3}{n\cos\alpha_1}\,\frac{w_3}{w_1} = \frac{n\cos\alpha_3}{\cos\alpha_1}\,\frac{\|E_3\|^2}{\|E_1\|^2}$$

$$= \frac{4n\cos\alpha_1\cos\alpha_3}{(\cos\alpha_1 + n\cos\alpha_3)^2}$$

Es gilt $\quad 0 \le R, T \le 1\,, \qquad R + T = 1$

Transversal magnetische Mode

$$\vec{B}_n = \vec{e}_y B_n$$



$$B_1 + B_2 = B_3$$

$$\| E_n \| = \frac{c}{n_n} |B_n|$$

$$\frac{c}{n_1} B_1 \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 \\ 0 \\ \sin\alpha_1 \end{pmatrix} + \frac{c}{n_1} B_2 \begin{pmatrix} -\cos\alpha_1 \\ 0 \\ \sin\alpha_1 \end{pmatrix} = \frac{c}{n_3} B_3 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha_3 \\ 0 \\ \sin\alpha_3 \end{pmatrix}$$

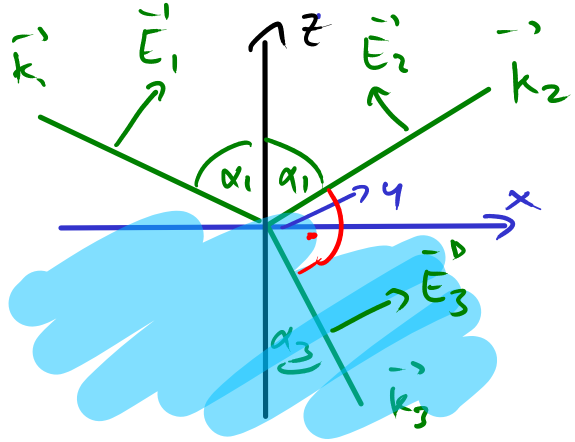
$$\vdots$$

$$B_2 = \frac{n\cos\alpha_1 - \cos\alpha_3}{n\cos\alpha_1 + \cos\alpha_3} B_1 \qquad B_3 = \frac{2n\cos\alpha_1}{n\cos\alpha_1 + \cos\alpha_3} B_1$$

R/T koeff. $\qquad 0 \le R, T \le 1 \qquad R + T = 1$

$$R = \frac{\|B_2\|^2}{\|B_1\|^2} = \left(\frac{n\cos\alpha_1 - \cos\alpha_3}{n\cos\alpha_1 + \cos\alpha_3}\right)^2 \qquad T = \frac{\cos\alpha_3}{n\cos\alpha_1} \frac{\|B_3\|^3}{\|B_1\|^2} = \frac{4n\cos\alpha_1 \cos\alpha_3}{(n\cos\alpha_1 + \cos\alpha_3)^2}$$

Brewster-Winkel



$$R_{TE} = \left(\frac{\cos\alpha_1 - n\cos\alpha_3}{\cos\alpha_1 + n\cos\alpha_3}\right)^2$$

$$R_{TM} = \left(\frac{n\cos\alpha_1 - \cos\alpha_3}{n\cos\alpha_1 + \cos\alpha_3}\right)^2$$

Brewster-Winkel α_B mit $\tan\alpha_B = n$

Falls $\alpha_1 = \alpha_B \Leftrightarrow \alpha_3 = 90° - \alpha_1 = 90° - \alpha_B$ $\qquad n > 1$

$\Rightarrow \underbrace{R_{TM} = 0, \quad R_{TE} \neq 0}$

reflektierte Welle ist linear polarisiert (egal was eingestellt wird!)

Möglichkeit lin. pol Licht zu erzeugen!

Warum? Anregungen im Medium $\vec{p} \sim \vec{E}_3 \sim \vec{k}_2 \Rightarrow$ keine Intensität

Totalreflexion

Übergang in optisch dünneres Medium $(n<1)$

$\Rightarrow$ keine Transmission falls $\sin\alpha_1 > n$ (Snellius Gesetz kein Lösung für Trig Fkt. !

$$\sin\alpha_3 = \frac{\sin\alpha_1}{n} > 1.$$

Lösung verlangt α_3 komplex ! $\Rightarrow$ $\cos\alpha_3 \in i\mathbb{R}$

komplexer Wellenzahlvektor $\vec{k}_3$

$$\vec{k}_3 = k_3 \begin{pmatrix} \sin\alpha_3 \\ 0 \\ -\cos\alpha_3 \end{pmatrix} = n k_1 \begin{pmatrix} \sin\alpha_3 \\ 0 \\ -i\sqrt{\sin^2\alpha_3 - 1} \end{pmatrix}$$

$$e^{i\vec{k}_3\cdot\vec{x}} \sim e^{ik_{3z} z}$$

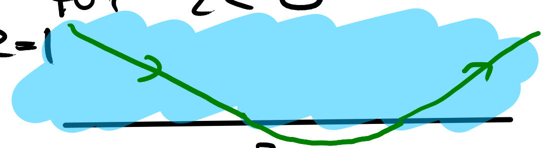
$ik_3 z$ ist reell $\Rightarrow$ exponentieller Abfall für $z<0$

Eindringtiefe

$1/|k_{3,z}| = 1/|\kappa|$ $\quad \sim e^{\kappa z}$

komplexe Phase

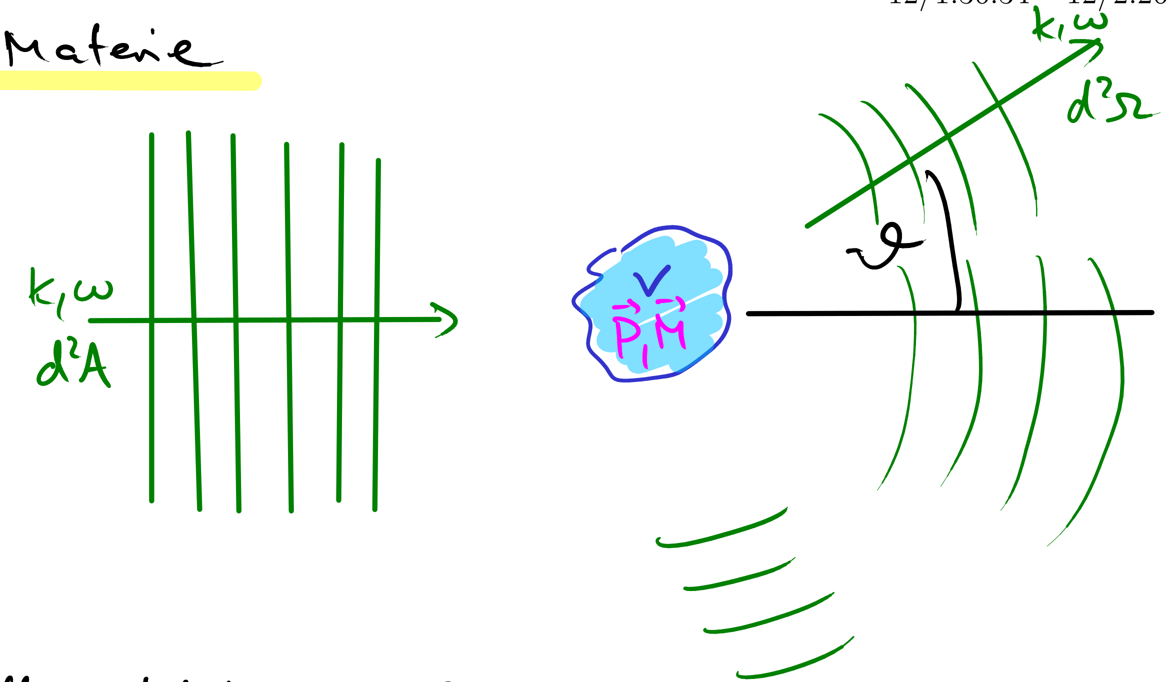
$\Rightarrow R = 1$



$$E_2^{TE} = \frac{\cos\alpha_1 - n\cos\alpha_3}{\cos\alpha_1 + n\cos\alpha_3} E_1 \qquad E_1^{TM} = \frac{n\cos\alpha_1 - \cos\alpha_3}{n\cos\alpha_1 + \cos\alpha_3} E_1$$

Phasendifferenz.

12.3 Streuung an Materie



Streuquerschnitt

Einlaufende Welle, Wellenzahl k, Kreisfreq. ω

Asymptotisch auslaufende Welle $E, B \sim 1/r$

Poynting Vektor beschreibt jeweils Energiefluss je Zeit + Fläche

$$\frac{d^2P_{ein}}{d^2A} = \vec{S}_{ein}\cdot\vec{e}_z \qquad\qquad \frac{d^2P_{aus}}{d^2\Omega} = r^2\,\vec{S}_{aus}\cdot\vec{e}_r$$

diff. S.Q. $\displaystyle\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega} = \frac{d^2P_{aus}/d^2\Omega}{d^2P_{ein}/d^2A} = \frac{r^2\vec{S}_{aus}\cdot\vec{e}_r}{\vec{S}_{ein}\cdot\vec{e}_z}(\vartheta,\varphi)$ totaler S.Q. $\displaystyle\sigma = \oint d\Omega\,\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}$.

Dipolstreuung

einlaufende Welle erzeugt Dipoldichte im Objekt.
$\Rightarrow$ Fernzone Strahlung mit dem so angeregten Dipolmoment.

$$\vec{A}(x) = \frac{\mu_0 k}{4\pi r} \operatorname{Re}\left(\left(-ic\vec{P} - i\vec{M} \times \vec{n}\right) e^{ikr - i\omega t} \right)$$

Strahlungsleistung

$$\frac{d^2 P}{d^2 \Omega} = \frac{c k^4 \mu_0}{32\pi^2} \left(c^2 \|P\|^2 - c^2 |\vec{P} \cdot \vec{n}|^2 + \|M\|^2 - |\vec{M} \cdot \vec{n}|^2 \right)$$

$$= \frac{c k^4 \mu_0}{32\pi^2} \left(c^2 \|P\|^2 \sin^2 \vartheta(P, n) + \|M\|^2 \sin^2 \vartheta(M, n) \right)$$

nach Polarisation aufgelöst Pol $\vec{\epsilon}$, $\vec{\epsilon} \cdot \vec{n} = 0$ der emitt. Strahl.

$$\frac{d^2 P_\epsilon}{d^2 \Omega} = \frac{c k^4 \mu_0}{32\pi^2} \left(c^2 |\vec{P} \cdot \vec{\epsilon}|^2 + \left| (\vec{M} \times \vec{n}) \cdot \vec{\epsilon} \right|^2 \right)$$

$$\frac{d^2 P_{\epsilon_1}}{d^2 \Omega} + \frac{d^2 P_{\epsilon_2}}{d^2 \Omega} = \frac{d^2 P}{d^2 \Omega}$$

Dielektrische Kugel $\varepsilon_r \neq 1$ $\mu_r = 1$ R: Radius

$$\vec{P} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} R^3 \vec{E}_{ein} \qquad \vec{M} = 0$$

$$\frac{d^2 P_{ein}}{d^2 A} = \frac{\|E_0\|^2}{2\varepsilon_0 c}$$ Polarisation $\vec{\epsilon}_{ein}$

$$\frac{d^2\sigma_\epsilon}{d^2\Omega} = \left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\right)^2 \underset{\substack{\uparrow \\ (kR)^4 R^2}}{k^4 R^6} \left|\vec{\epsilon}_{ein} \cdot \vec{\epsilon}_{aus}\right|^2$$

Effekte: wenn $\vec{n} \sim \vec{\epsilon}_{ein}$ ⇒ keine Strahlung

zu Pol. Streuquerschnitte.

Auflösung nach einl. Welle: Mittelung der pol. S.Q.

aus Welle: Summierung über pol. S.Q.

unpol. S.Q.

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\right)^2 k^4 R^6 (1 + \cos^2\vartheta)$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma = \frac{8}{3}\pi \left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\right)^2 k^4 R^6$$

Inhomogenitäten ~ Rayleigh Streuung

Annahme: $\varepsilon_r \doteq \varepsilon_r(x,\omega)$ ω fest

Entwicklung:

$$\varepsilon_r(x) = \bar{\varepsilon}_r + \delta\varepsilon_r(x) + \dots \qquad \delta\varepsilon_r(x) \ll \bar{\varepsilon}_r \qquad \mu_r = 1$$

Entsprechend für Felder $\qquad$ einlaufende Welle

$$E = \bar{E} + \delta E + \dots \qquad D = \bar{D} + \delta D + \dots \qquad B = \bar{B} + \delta B + \dots$$

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{\varepsilon}_r \bar{E}_r \qquad \delta D = \varepsilon_0 \bar{\varepsilon}_r \delta E + \varepsilon_0 \delta\varepsilon_r \bar{E}$$

Maxwell-Gl (keine Quellen) nächstführende Ord.

$$\vec{\partial} \cdot \delta B = 0 \qquad \vec{\partial} \times \delta\vec{E} + \partial_t \delta\vec{B} = 0$$

$$\vec{\partial} \cdot \delta E = -\vec{\partial} \cdot \left(\delta\varepsilon_r \vec{\bar{E}}\right) \qquad \vec{\partial} \times \delta\vec{B} - \varepsilon_0 \bar{\varepsilon}_r \partial_t \delta\vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \, \delta\varepsilon_r \vec{\bar{E}}$$

Maxwell-Gl für $\delta\vec{E}, \delta\vec{B}$ mit $\delta\rho = -\varepsilon_0 \vec{\partial} \cdot (\delta\varepsilon_r \vec{\bar{E}})$, $\delta\vec{j} = \varepsilon_0 \delta\varepsilon_r \partial_t \vec{\bar{E}}$.

$\delta\rho$, $\delta\vec{j}$ erfüllen Stromerhaltung

Strahlung wird von $\delta\rho, \delta\vec{j}$ Fernzone

$$\delta\vec{A}(x) = \mathrm{Re}\left(\frac{-ik\mu}{c}\,\frac{e^{ikr-i\omega t}}{4\pi r}\,\vec{\bar{E}}\,\delta\hat{\varepsilon}_r(k\vec{e}_z - k\vec{n})\right)$$

$$\delta\hat{\varepsilon}_r(\vec{k}) = \int dy^3\,\delta\varepsilon_r(y)\,e^{i\vec{y}\cdot\vec{k}}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\sigma}{d^2\Omega} = \frac{k^4}{16\pi^2}\left|\vec{e}_{ein}\cdot\vec{e}_{aus}\right|^2 F(\vec{k})$$

Strukturfaktor: $F(\vec{k}) = \left|\delta\hat{\varepsilon}_r\left(\underbrace{\|k\|\vec{e}_z}_{\vec{k}_{ein}} - \underbrace{\vec{k}}_{\vec{k}_{aus}}\right)\right|^2$