Elektrodynamik

Vorlesungsfolien, Kapitel 11

ETH Zürich, 2024 FS

Prof. N. Beisert

Die aktuelle Version dieses Werks befindet sich unter: `http://people.phys.ethz.ch/~nbeisert/lectures/`.

11 Erzeugung Elektromagnetischer Wellen

11.1 Anfangswertproblem

Quellfreier Raum $\rho = \vec{j} = 0$; Felder $\vec{E}, \vec{B}$ zu einer Zeit $(t=0)$ vor.

hier Zwangsbedingungen (DG ohne ∂_t)

$$\vec{\partial} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho = 0 \qquad \vec{\partial} \cdot \vec{B} = 0$$

Zeitentwicklung:

$$\partial_t \vec{B} = - \vec{\partial} \times \vec{E} \, ; \qquad \partial_t \vec{E} = c^2 \vec{\partial} \times \vec{B} - \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{j} = c^2 \vec{\partial} \times \vec{B} \, ,$$

* Zwangsbed für $t \neq 0$ folgen aus Z.B + Zeitentw.

$$\partial_t (\vec{\partial} \cdot \vec{E}) = \vec{\partial} \cdot (\partial_t \vec{E}) = c^2 \vec{\partial} \cdot (\vec{\partial} \times \vec{B}) = 0$$

* Feldenergie erhalten: $W = \int dx^3 \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) \geq 0$

$W(t) = W(0)$. $\leadsto$ Lösung für $t \in \mathbb{R}$ existiert

* Eindeutigkeit: Linearität ⇒ Differenz zweier Lsg $\Delta\vec{E}, \Delta\vec{B}$ erfüllt MG ebenso. Zudem für $t=0$: $\Delta\vec{E} = \Delta\vec{B} = 0$
  $\Rightarrow W_\Delta(0) = 0 \Rightarrow W_\Delta(t) = 0 \Rightarrow \Delta\vec{E} = \Delta\vec{B} = 0$ für $t \neq 0$

Fourier-Raum

gesucht allg. Lsg $\Box\vec{E} = \Box\vec{B} = 0$, $\quad \omega = \omega(\vec{k}) = c\|k\| \geq 0$

$$\vec{E}(x,t) = \int\frac{dk^3}{(2\pi)^3}\left(\vec{\alpha}(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t} + \vec{\alpha}(\vec{k})^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\omega t}\right)$$

$$\vec{B}(x,t) = \int\frac{dk^3}{(2\pi)^3}\left(\vec{\beta}(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t} + \vec{\beta}(\vec{k})^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\omega t}\right)$$

weitere MG: $\quad \vec{k}\cdot\vec{\alpha} = 0 \quad \vec{k}\cdot\vec{\beta} = 0, \quad \vec{\beta} = \frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{\alpha}, \quad \vec{\alpha} = \frac{c^2}{\omega}\vec{k}\times\vec{\beta}$

Bestimmung von $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ mittels FT.

$$\vec{E}(x,0) = \int\frac{dk^3}{(2\pi)^3}\vec{E}_0(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\vec{x}} \qquad \vec{B}(x,0) = \int\frac{dk^3}{(2\pi)^3}\vec{B}_0(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

Vergleich mit Lsg.ansatz

$$\vec{\alpha}(k) + \vec{\alpha}(-k)^* = \vec{E}_0(k)\,, \quad \vec{\beta}(k) + \vec{\beta}(-k)^* = \vec{B}_0(k)$$

aus MG folgt zudem

$$\vec{\alpha}(k) - \vec{\alpha}(-k)^* = -\frac{c^2}{\omega}\,\vec{k}\times\vec{\beta}(k) - \frac{c^2}{\omega}\,\vec{k}\times\vec{\beta}(-k)^*$$

$$= -\frac{c^2}{\omega}\,\vec{k}\times\vec{B}_0(k)$$

z.B.

$$\left(\begin{array}{l}\vec{k}\cdot\vec{E}_0(k) = 0\\ \vec{k}\cdot\vec{B}_0(k) = 0\end{array}\right)$$

$$\vec{\alpha}(k) = \frac{1}{2}\vec{E}_0(k) - \frac{c^2}{2\omega}\,\vec{k}\times\vec{B}_0(k)$$

$$\vec{\beta}(k) = \frac{1}{2}\vec{B}_0(k) + \frac{1}{2\omega}\,\vec{k}\times\vec{E}_0(k)\,.$$

Selbiges für Potentiale $\Phi, \vec{A}$.

Eichfixierung!

* Eindeutigkeit Lösung nur modulo Eichtransformationen.
* Anfangswerte für Potentiale sind: $\Phi, \vec{A}, \dot{\Phi}, \dot{\vec{A}}$. Warum?

Freiheitsgrade $\underbrace{\vec{E}, \vec{B}(\vec{u})}_{3+3}$ vs $\underbrace{\phi, \vec{A}}_{4}$ $\quad \underbrace{\Phi\ \vec{A}}_{4}(k)$

<u>Ortsraum</u> (für skalares Feld ψ, $\Box\psi = 0$, $\psi(x,0) = \psi_0(x)$
$\partial_t\psi(x,0) = \dot\psi_0(x)$)

$$\psi(x,t) = \int dy^3 \left(\partial_t D(x-y,t)\,\psi_0(y) + D(x-y,t)\,\dot\psi_0(y) \right).$$

mittels Fourier-Raum Analyse $\qquad \omega = \omega(k) = c\,\|\vec{k}\|$

$$\psi(x,t) = \int \frac{dk^3}{(2\pi)^3} \left(\psi_0(k)\cos(\omega t) + \dot\psi_0(k)\,\frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

Vergleich $\rightsquigarrow$

$$D(x,t) = \int \frac{dk^3}{(2\pi)^3}\,\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

Eigenschaften von D: $\qquad \Box D = 0 \rightsquigarrow \partial_t^2 D(x,0) = 0$

$$\Box D = 0 \;\checkmark \qquad D(x,0) = 0 \qquad \partial_t D(x,0) = \delta^3(x)$$

$\rightsquigarrow$ $\psi(x,t)$ ist tatsächlich die gesuchte Lsg.!

$D(x,t)$ im Ortsraum? D ist rotationssym.

FT mit Rotsym $\vec{k}\cdot\vec{x} = kr\cos\vartheta$, $\int dk^3 \ldots = 2\pi \int_0^\infty dk\, k^2 \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \ldots$

$$D(x,t) = \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^2} \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta\, e^{ikr\cos\vartheta} \frac{k^2}{\omega} \sin(\omega t)$$

$z = \cos\vartheta$

$$= \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^2} \int_{-1}^{+1} dz\; e^{ikrz} \frac{k}{2ic}\left(e^{ikct} - e^{-ikct}\right)$$

$$= \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{1}{ikr}\left(e^{ikr} - e^{-ikr}\right) \frac{k}{2ic}\left(e^{ikct} - e^{-ikct}\right)$$

$$= \frac{1}{2cr} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{(2\pi)^2} \left(e^{ik(r-ct)} - e^{ik(r+ct)}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi rc}\left(\delta(r-ct) - \delta(r+ct)\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi rc} \begin{cases} \delta(r-ct) & t > 0 \quad \text{Zukunft} \\ -\delta(r+ct) & t < 0 \quad \text{Vergangenheit} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Ausbreitungsgeschw. der Wellen ist konstant c!

11.2 Greensche Funktionen

Skalares Feld φ mit Quelltermen: $\Box \varphi = -\rho$

Ansatz $\varphi(\vec{x},t) = \int dy^3\, ds\; G(\vec{x}-\vec{y}, t-s)\, \rho(\vec{y},s) + \varphi_{hom}(x,t)$

G: Greensche Fkt mit Eigenschaft

$$\Box G = -\delta^3(x)\delta(t)$$

Lösung für $G_{ret}(x,t) = \frac{c}{4\pi r}\delta(r-ct)$

Beweis für $\vec{x} \neq 0$ nutze: $\Delta = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 r$ $\Rightarrow \Box G_{ret} = 0$ für $\vec{x} \neq 0$

$$\Delta G_{ret} = \frac{c\delta''(r-ct)}{4\pi r} \qquad \frac{1}{c^2}\partial_t^2 G_{ret} = \frac{c\delta''(r-ct)}{4\pi r}$$

Für $\vec{x} \simeq 0$ $\Delta \frac{1}{4\pi r} = -\delta^3(\vec{x})$

$$\Rightarrow \Box G_{ret} = -c\delta^3(\vec{x})\delta(r-ct) = -c\delta^3(\vec{x})\delta(ct)$$
$$= -\delta^3(\vec{x})\,\delta(t).$$

G_{ret} ist die retardierte Greensche Fkt denn

$G_{ret} \neq 0$ nur für $t \geq 0$ da $r \geq 0$

beiträgt!

Quelle ρ bei Zeit s nur zu Feldern ψ he Zeit $t > s$

$\sim$ kausalität

Anm: es gibt auch avancierte Greensche Fkt G_{av}

$$G_{av} = \frac{c}{4\pi r}\,\delta(r + ct) \qquad (t<0)$$

<u>Fourier-Raum</u>

$$G(\vec{x},t) = \int \frac{dk^3}{(2\pi)^3}\frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t}\,\hat{G}(\vec{k},\omega)$$

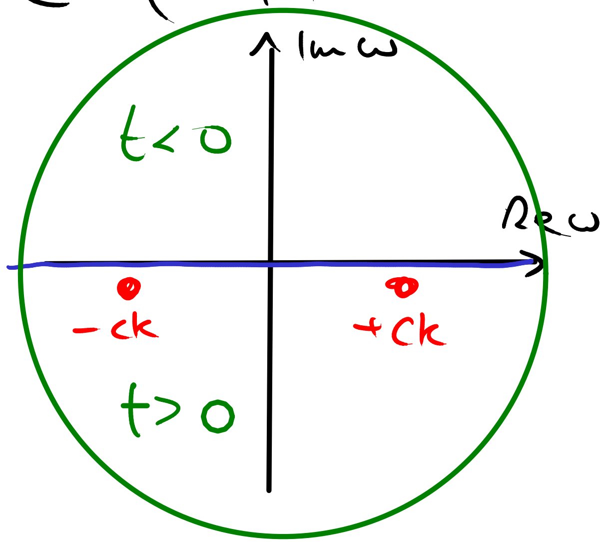
mit $\hat{G}(\vec{k},\omega) = \dfrac{1}{\vec{k}^2 - \omega^2/c^2}$ $\Leftrightarrow$ $\Box G \hat{=} -(k^2 - \omega^2/c^2)\,\hat{G}$

$\delta^3(x)\delta(t) \hat{=} 1$

Vorsicht: Pole bei $\|\vec{k}\| = \omega / c$!

Erweiterung des Defbereichs für ω von $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $(\sim t)$

Arbeite mit komplex. hol. Fkt $\tilde{G}(\vec{k}, \omega)$



verschieben Pole etwas (ε) nach unten

Für $t < 0$ + Residuensatz + holomorph (keine Pole) $\Rightarrow$ $\hat{G}_{ret} = 0$

Für $t > 0$ zwei Pole in unterer HE. $\Rightarrow$ $\hat{G}_{ret} \neq 0$

$$G_{ret}(x, t) = \frac{c}{4\pi r} \delta(r - ct)$$

Elektrodynamik

Betrachte Lösung für Potentiale $\Phi, \vec{A}$ bei geg. Quellen $\rho, \vec{j}$

Eichtransformationen → Fixierung Lorentz Eichung $\frac{1}{c^2}\partial_t \Phi + \vec{\partial}\cdot\vec{A} = 0$

$$\Box \Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \qquad \Box \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

Lösung
$$\phi(x,t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int dy^3 ds\; G_{ret}(x-y, t-s)\,\rho(y,s)$$
$$\vec{A}(x,t) = \mu_0 \int dy^3 ds\; G_{ret}(x-y, t-s)\,\vec{j}(y,s)$$

Eichung folgt aus Ladungserhaltung
$$\frac{1}{c^2}\partial_t \phi + \vec{\partial}\cdot\vec{A} = \int dy^3 ds \;\cdots\; \left(\partial_t \rho + \vec{\partial}\cdot\vec{j}\right) = 0$$

Erinnerung $G_{ret}(x,t) = \frac{c}{4\pi r}\,\delta(r - ct)$ Retardierung

$$\Rightarrow \phi(x,t) = \int dy^3 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \|x-y\|}\,\rho(y, t - \|x-y\|/c),$$
$$\vec{A}(x,t) = \int dy^3 \frac{\mu_0}{4\pi \|x-y\|}\,\vec{j}(y, t - \|x-y\|/c).$$

Relativistische Formulierung

Problem: $\Box \psi = -\rho$

Ansatz $\psi(x) = \int dy^4 \, G(x-y)\, \rho(y) + \psi_{hom}(x)$

mit Greenschen Fkt Eigenschaft $\Box G = -\delta^4(x) = -\frac{1}{c}\delta^3(x)\delta(t)$

$$G_{ret}(x) = \frac{1}{2\pi}\,\delta(x^2)\,\Theta(x^0) \qquad \underset{\swarrow}{\text{Stufenfkt}} \qquad \vec{x}^2 - c^2t^2 = (r-ct)(r+ct)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\delta(\vec{x}^2 - c^2t^2)\;\Theta(t)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2r}\delta(r-ct) + \underbrace{\frac{1}{2r}\delta(r+ct)}_{=0}\right)\Theta(t)$$

$$= \frac{1}{4\pi r}\,\delta(r-ct)$$

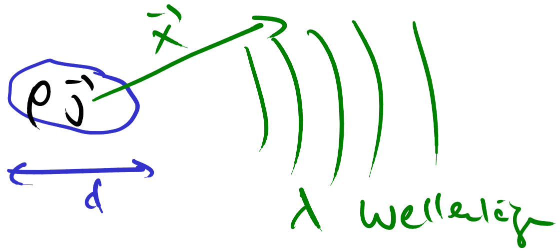
Fourier-Transf. $G(x) = \int \frac{dk^4}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot x}\,\tilde{G}(k) \qquad \tilde{G}(k) = \frac{1}{k^2}$

$$k^\mu = \begin{pmatrix} \omega/c \\ \vec{k} \end{pmatrix} \qquad x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} \qquad k\cdot x = \vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t$$

11.3 Strahlung oszillierender Ströme

Dyn. Strom/Ladungsverteilung auf kleinem Raum $\|y\| < d$

Interessieren uns für Felder in grossem Abstand $\|x\| = r \gg d$



3 rel. Skalen: r Abstand
d Grösse
λ Wellenlänge

Verhältnis $r : d : \lambda$ beeinflusst Form/Näherungen für Felder

Monochromatische Wellen

Allgemeine Lösung für Felder lässt sich nach Freq. $\omega/2\pi$ aufteilen

$\Rightarrow$ Fixiere ω Alle Felder/Quellen der Form

$$\in\mathbb{R} \to F(x,t) = \mathrm{Re}\left(F_0(\vec{x})\, e^{-i\omega t}\right) \quad \in \mathbb{C}$$

$$\partial_t F \simeq \mathrm{Re}\left(\dot{F}_0\, e^{-i\omega t}\right) \qquad \dot{F}_0 = -i\omega F_0$$

Für Mittelwerte in quad. terms.

$$\langle FG \rangle = \dots = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(F_0 G_0^*\right)$$

Allg. Lösungsformel

$$\Phi_0(\vec{x}) = \int dy^3 \frac{\rho_0(y)}{4\pi\varepsilon_0 \|x-y\|} e^{i\|x-y\|k},$$

$$\vec{A}_0(\vec{x}) = \int dy^3 \frac{\mu_0 \vec{j}_0(y)}{4\pi \|x-y\|} e^{i\|x-y\|k}. \qquad k = \omega/c$$

$\Phi_0(x)$ wird durch Lorenz-Eichung algebraisch durch $\vec{A}$ bestimmt

$$\frac{1}{c^2}\partial_t \Phi_0 + \vec{\partial}\cdot\vec{A}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_0 = -i\frac{c^2}{\omega}\vec{\partial}\cdot\vec{A}_0$$

Felder

$$\vec{B}_0 = \vec{\partial}\times\vec{A}_0 \qquad \vec{E}_0 = i\omega\vec{A}_0 + i\frac{c^2}{\omega}\vec{\partial}(\vec{\partial}\cdot\vec{A}_0)$$

Ab hier $F_0 \to F$

Strahlungszone, grosser Abstand

$$\|x\| = r \gg d > \|y\|\,, \quad \& \qquad r \gg \lambda \sim 1/k$$

Dominante Terme für $r \to \infty$? Annahme d/λ bleibt konstant wenn $r \to \infty$

Entwicklung von $\|x-y\| = \sqrt{(x-y)^2}$

$$\|x-y\| = r\sqrt{1 - 2\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{r^2} + \frac{\vec{y}^{\,2}}{r^2}} = r - \vec{n}\cdot\vec{y} - \frac{(\vec{n}\cdot\vec{y})^2}{2r} + \frac{\vec{y}^{\,2}}{2r} + O(1/r^2)$$

$$A(x) = A_{as}(x) + O\left(e^{ikr}/r^2\right)$$

$$A_{as}(x) = \int dy^3 \, \frac{\mu_0 \vec{j}(y)}{4\pi r} \, e^{ikr} e^{-ik\vec{n}\cdot\vec{y}} \sim \frac{e^{ikr}}{r}$$

Für Ausführung von ∂ beachte dass $\partial \frac{P(r)}{Q(r)} \sim \frac{\hat{P}(r)}{r\tilde{Q}(r)}$ $\quad \partial \sim \frac{1}{r} \ll 1$

aber $\partial e^{ikr} \sim ik e^{ikr}$ $\quad \partial \sim ik \approx 1$

Anwenden auf $\vec{E}, \vec{B}$ $\qquad \vec{n} = \frac{\vec{x}}{r}$

$$\vec{B} = ik\vec{n}\times\vec{A} + O\left(e^{ikr}/r^2\right)$$

$$\vec{E} = ikc\left(\vec{A} - \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{A})\right) + O\left(e^{ikr}/r^2\right) = -ikc\,\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{A}) + \dots$$

$$\vec{B}, \vec{E} \sim e^{ikr}/r$$

Erhaltene Grössen und Flüsse $\sim 1/r^2$

$$\left\langle \frac{1}{4}\varepsilon_0 \vec{E}^2 \right\rangle = \varepsilon_0 k^2 c^2 \left(\|A\|^2 - |\vec{n}\cdot\vec{A}|^2\right) + O\left(1/r^3\right) = \left\langle \frac{1}{4\mu_0}\vec{B}^2 \right\rangle$$

$$\langle w \rangle = \frac{k^2}{2\mu_0}\left(\|A\|^2 - |\vec{n}\cdot\vec{A}|^2\right) + O\left(1/r^3\right)$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0}\,\mathrm{Re}\left[\vec{E}\times\vec{B}^*\right] = \frac{k^2 c}{2\mu_0}\,\mathrm{Re}\left(\vec{A}\times(\vec{n}\times\vec{A}^*) - (\vec{A}\cdot\vec{n})\,\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{A}^*)\right)$$

$$= c\,\vec{n}\,\langle w \rangle + O\left(1/r^3\right) \sim \langle \vec{\pi} \rangle$$

$$\langle T \rangle = \dots = -\vec{n}\,\vec{n}^T \langle w \rangle + O\left(1/r^3\right)$$

Strahlungsbilanz (Abgestrahlte Leistung je Raumwinkelelement)

$$\frac{d^2P}{d^2\Omega} := r^2\, \vec{n}\cdot\vec{S} = \frac{c k^2 r^2}{2\mu_0}\left(\|A\|^2 - |\vec{n}\cdot\vec{A}|^2\right) + O(1/r)$$

gesamte Strahlungsleistung

wegen Energiebilanz.

$$P = \int d^2\Omega\, \frac{d^2P}{d^2\Omega} = \frac{c k^2 r^2}{2\mu_0}\int d^2\Omega \left(\|A_{as}\|^2 - |\vec{n}\cdot\vec{A}_{as}|^2\right) + 0$$

<u>Multipolentwicklung</u> weitere Annahme $\|y\| \ll 1/k \sim \lambda$

(Wellenlänge λ gross gegenüber Quellregion) Entwicklung $\|y\|/\lambda$

$$\vec{A}_{as}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi r} e^{ikr} \int dy^3\, \vec{j}(y)\left(1 - ik\vec{n}\cdot\vec{y} + \dots\right)\dots$$

Ziel: werte Integrale aus $\left(\vec{\partial}\cdot\vec{j} = -\partial_t \rho = ikc\rho\right)$

$$\int dy^3\, \vec{j}(y) \quad \text{etc.}$$

Betrachte für Quellregion V mit $\rho = \vec{j} = 0$ auf ∂V

$$0 = \sum_{k=1}^{3} \oint_{\partial V} dx^2\, n_k \overset{=0}{(x_l j_k)} \overset{\text{Gauß}}{=} \int_V^{\Sigma_k} dx^3\, \partial_k (x_l j_k)$$

$$= \int dx^3\, \vec{j}_l + \int dx^3\, x_l \vec{\partial} \cdot \vec{j}$$

Dipolmoment von ρ

$$\int dx^3\, \vec{j} = -\int dx^3\, \vec{x}\,(\vec{\partial} \cdot \vec{j}) = -ikc \int dx^3\, \vec{x} \rho = -ikc \vec{P}$$

Für nächsthöhere Ordnung: Ob. int über $\vec{\partial} \cdot (x_k x_l \vec{j})$

$$\ldots \Rightarrow \int dy^3\, j_l(y)\, \vec{n} \cdot \vec{y} = \ldots = -\frac{1}{6} ikc R\vec{n} - \frac{1}{2} ikc \underline{\underline{\vec{n}}} \int dy^3\, \vec{y}^2 \rho + \vec{M} \times \vec{n}$$

el. Quadr. Tensor $\quad R = \int dx^3 \left(3 \vec{x}\vec{x}^T - \vec{x}^2\right) \rho \qquad \mathrm{tr}\, R = 0$

mag. Dipolmom. $\quad \vec{M} = \frac{1}{2} \int dx^3\, \vec{x} \times \vec{j}.$

und $\quad \int dx^3\, \vec{x}^2 \rho$

$$\vec{A}_{as}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\, e^{ikr}\Big(\overset{\text{führend}}{-ikc\vec{P}} - ik\overbrace{\vec{M}\times\vec{n} - \tfrac{1}{6}k^2 c R\vec{n}}^{\text{nächstführende}} + \dots\Big)$$

Multipolentwicklung: $r = \|x\| \gg \lambda \sim \frac{1}{k} \gg d > \|y\|$ Entw. nach (kd)

$$\vec{A}_{as}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi r} e^{ikr} \int dy^3\, \vec{j}(y) \left(1 - ik\vec{n}\cdot\vec{y} + \dots\right) \qquad + \sim \vec{n}$$

el Dipol, mag. Dipol, el. Quadr. / mag. Quad., höhere M.

$$\vec{A}_{as}(x) = \frac{\mu}{4\pi r} e^{ikr} \left(-ikc\vec{P} - ik\vec{M}\times\vec{n} - \frac{1}{6}k^2 c R\,\vec{n} + \dots + \dots \right)$$

el. Dipol

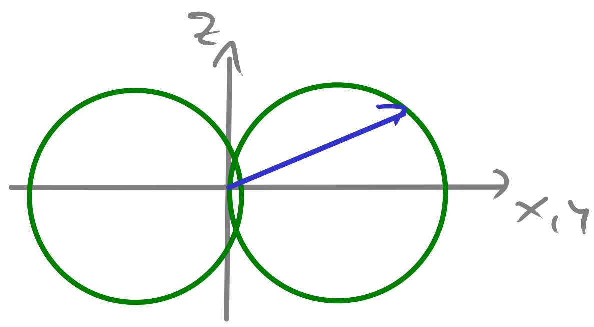
$$\vec{A}_{as}(x) = -ikc\mu_0 \frac{e^{ikr}}{r}\vec{P}$$

Abstrahlungscharakteristik (Leistung je Raumwinkelelement)

$$\frac{d^2 P_{as}}{d^2\Omega} = \frac{c^3 k^4 \mu_0}{32\pi^2}\left(\|P\|^2 - |\vec{P}\cdot\vec{n}|^2\right)$$

$\vec{P} \sim \vec{e}_z$

$$= \frac{c^3 k^4 \mu_0 \|P\|}{32\pi^2}\underbrace{\left(1 - \cos^2\vartheta\right)}_{\sin^2\vartheta}$$



Gesamtleistung

$z = \cos\vartheta$

$$P_{as} = \int d\vartheta \sin\vartheta \int d\varphi \frac{d^2 P_{as}}{d^2\Omega} = \frac{c^3 k^4 \mu_0 \|P\|^2}{16\pi} \int d\vartheta \sin^3\vartheta$$

$$= \frac{c^3 k^4 \mu_0 \|P\|^2}{16\pi} \int_{-1}^{+1} dz\,(1-z^2) = \frac{c^3 k^4 \mu_0 \|P\|^2}{12\pi} = \frac{c k^4 \|P\|^2}{12\pi\varepsilon_0}.$$

rein mag. Dipolmoment $\vec{A}_{es} = -i\mu_0 k \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \vec{M} \times \vec{n}$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{d^2 P_{as}}{d^2\Omega} = \frac{c k^4 \mu_0}{32\pi^2}\left(\|M\|^2 - |\vec{M}\cdot\vec{n}|^2\right)$$

(analog zu zuvor mit $\vec{P} \leftrightarrow c\vec{M}$)

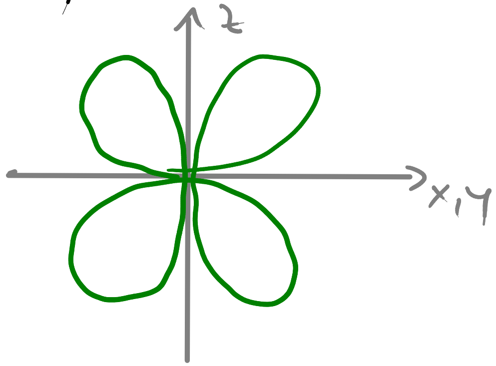
gemischtes Dipolmoment

$$\frac{d^2 P_{as}}{d^2\Omega} = \frac{d^2 P_{el}}{d^2\Omega} + \frac{d^2 P_{mag}}{d^2\Omega} + \frac{c^2 k^4 \mu_0}{16\pi} \operatorname{Re}\left((\vec{P}\times\vec{M}^*)\cdot\vec{n}\right)$$

Abstrahlung als $(Y_{0,0},\ Y_{1,m},\ Y_{2,m})$

Quadrupolstrahlung $\quad R \sim \mathrm{diag}(+1,+1,-2)\, R$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{d^2 P_{as}}{d^2\Omega} \sim c^3 k^6 \mu_0 |R| \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta$$



allg. $Y_{\ell,m}$ mit $\ell \leq 4$

<u>Nahzone</u> andere Näherung mit $d < r \ll \lambda$ Wellenlänge gross!

$$\vec{A} = \int dy^3 \frac{\mu_0 \vec{j}(y)}{4\pi \|x-y\|} e^{i\|x-y\|k} \overset{\approx 1}{} \approx \int dy^3 \frac{\mu_0 \vec{j}(y)}{4\pi\|x-y\|}.$$ statisch V. Potential

Potentiale aus E/M statik, keine Retardierung.

Problem r-Abh. der Strahlung? $\quad$ Monopol $\sim E, B \sim 1/r^2$ $\quad$ DiPol $\sim E, B \sim 1/r^3$

$\Rightarrow S \sim 1/r^4$ oder höher. $\Rightarrow P \sim r^2/r^{4,5,6} \sim 1/r^{2,3,4}$ $\quad$ Tatsächlich $\oint d\Omega\, \vec{S}\cdot\vec{n} = 0$

11.4 Lineare Antenne

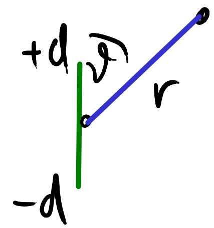
linearer Draht, Länge $2d$ entlang z-Achse $z=-d$ bis $z=+d$

· Stromquelle bei $z=0$. Strom mit c entlang Antenne $e^{\pm ikz}$

· Reflektion an Enden: $j=0$

$$\Rightarrow \qquad \vec{j}(x) = I\vec{e}_z \sin(kd-k|z|)\,\delta(x)\,\delta(y) \qquad |z|<d$$

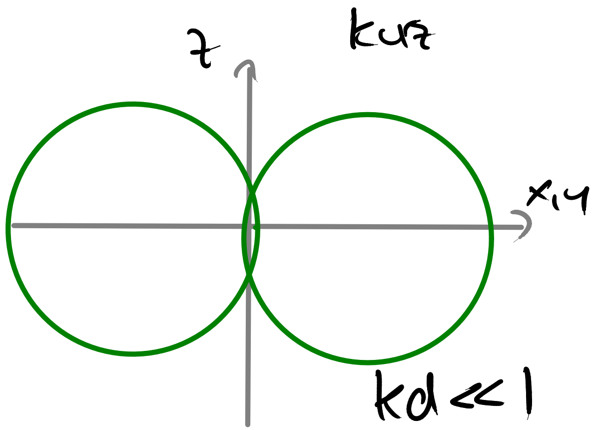
$$\vec{A}_{as} = \frac{\mu_0 \vec{e}_z I}{4\pi r} e^{ikr} \int_{-d}^{+d} dz\, e^{-ikz\cos\vartheta} \sin(kd-k|z|)$$

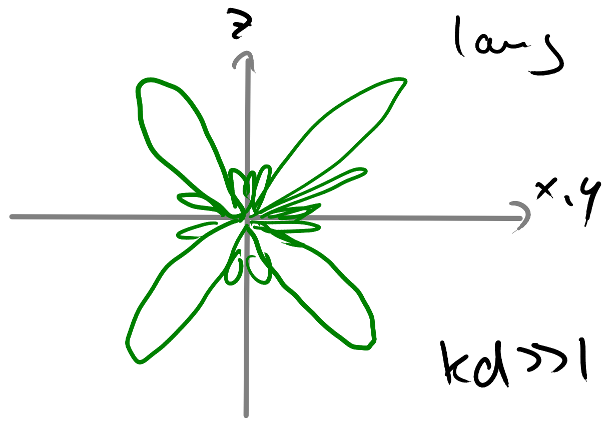


$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \vec{e}_z e^{ikr} \frac{2}{k} \frac{\cos(kd\cos\vartheta)-\cos(kd)}{\sin^2\vartheta}$$

Strahlungschar.

$$\frac{d^2 P_{as}}{d^2\Omega} = \frac{c\mu_0}{8\pi^2}\left(\frac{\cos(kd\cos\vartheta)-\cos(kd)}{\sin\vartheta}\right)^2$$


z
kurz
x,y
kd≪1


z
lang
x,y
kd≫1

11.5 Beschleunigte Punktladungen

Potentiale Pfad $\vec{y}(t)$ Ladung q

$$\Rightarrow \quad \rho(x,t) = q\,\delta^3(x - y(t)), \quad \vec{j}(x,t) = q\,\dot{\vec{y}}(t)\,\delta^3(x - y(t))$$

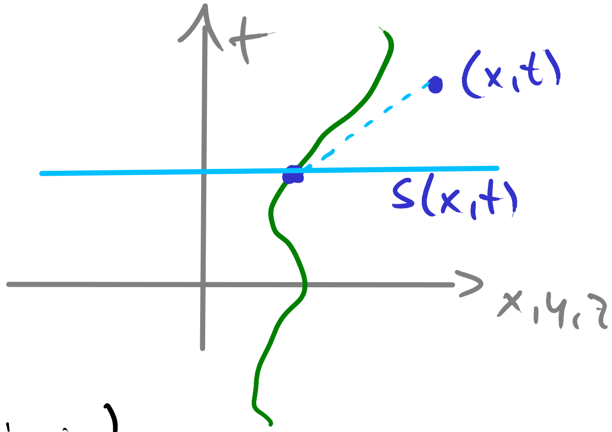
Greensche Fkt (ret) $G_{ret} = \frac{c}{4\pi\|x\|}\delta(\|x\| - ct)$

$$\Phi(x,t) = \int dx'^3\,dt'\,\frac{cq}{4\pi\varepsilon_0\|x - x'\|}\,\delta^3(x' - y(t'))\,\delta(\|x - x'\| - c(t - t'))$$

$$= \int dt'\,\frac{cq}{4\pi\varepsilon_0\|x - y(t')\|}\,\delta(\|x - y(t')\| - c(t - t'))$$

$$\vec{A}(x,t) = \int dt'\,\frac{cq\mu_0\,\dot{\vec{y}}(t')}{4\pi\|x - y(t')\|}\,\delta(\|x - y(t')\| - c(t - t'))$$

Zwei Effekte der δ-Fkt.:



- legt $t' = s(x,t)$ fest

  so dass $\|x - y(s)\| = c(t-s)$

  Falls $\|\dot{x}\| < c$ dann ist s eindeutig!

  (in der Praxis ist Gleichung nichtlinear $\Rightarrow$ schwierig)

- Argument $\delta(f(t')) \Rightarrow$ Faktor $\frac{1}{f'(s)}$

$$f(t') = \|x - y(t')\| - ct + ct'$$

$$f'(s) = c - \frac{\dot{\vec{y}}(s)\,(\vec{x} - \vec{y}(s))}{\|x - y(s)\|} =: ck$$

Abstand

$$r(x,t) = \|x - y(s)\|$$

$$\vec{v}(x,t) = \dot{\vec{y}}(s)$$

$$\vec{n}(x,t) = \frac{\vec{x} - \vec{y}(s)}{r}$$

$$k(x,t) = 1 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{c}$$

$$\Rightarrow \Phi(x,t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r k}, \quad \vec{A}(x,t) = \frac{\mu_0 q \vec{v}}{4\pi r k}$$

Elektromagnetische Felder

Betrachte implizite Abh. von $s(x,t)$ um $\vec{\partial}$, ∂_t zu berechnen.

Def Gl. $\|\vec{x}-\vec{y}(s)\| = c(t-s)$

Gleichung variieren nach $\vec{x}, t, s$:

$$\frac{(\delta\vec{x} - \delta s\,\dot{\vec{y}})\cdot(\vec{x}-\vec{y})}{\|x-y\|} = c(\delta t - \delta s)$$

$$\Leftrightarrow \quad \delta\vec{x}\cdot\vec{n} - \delta s\,\vec{v}\cdot\vec{n} - c\,\delta t + c\,\delta s = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \delta s = \frac{\delta t - \delta\vec{x}\cdot\vec{n}/c}{1 - \vec{n}\cdot\vec{v}/c} = \frac{\delta t}{k} - \frac{\delta\vec{x}\cdot\vec{n}}{ck}$$

$$\Rightarrow \quad \partial_t s = \frac{1}{k} \qquad \vec{\partial} s = -\frac{\vec{n}}{ck}$$

Weiterhin: $\delta \vec{v} = \vec{a}\, \delta s \qquad \vec{a}(x,t) := \ddot{\vec{y}}(s)$ Beschl.

Für r: $r = \| x - y(t) \| = c(t-s) \Rightarrow \delta r = c\,\delta t - c\,\delta s$

Statt k betrachte $kr = r - (\vec{x} - \vec{y}(s)) \cdot \vec{v}/c$

$$\delta(rk) = \delta r + \frac{\vec{v}^{\,2} - r\vec{n}\cdot\vec{a}}{c}\,\delta s = c\,\delta t - c\left(1 - \frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}\right)\delta s - \frac{r\vec{n}\cdot\vec{a}}{c}\,\delta s$$

Herleitung Strahlung beschleunigtes geladenes Teilchen:

$\vec{x}, t$: Empfänger; $\vec{y}(s)$, $s(\vec{x}, t)$: Teilchen, avancierte Zeit; r: Abstand, k: Faktor

$\vec{v}(s)$: Geschwindigkeit, $\vec{a}(s)$: Beschleunigung, $\vec{n}$: Richtung

Ruhendes Teilchen $\quad \vec{v} = 0 \,, \quad \vec{a} \neq 0$

$$k = 1 \,, \quad \partial s = \partial t - \frac{\partial \vec{x} \cdot \vec{n}}{c} \,, \quad \partial \vec{v} = \vec{a}\, \partial s \,, \quad \partial (rk) = \partial \vec{x} \cdot \vec{n} - r \frac{\vec{n} \cdot \vec{a}}{c} \partial s$$

$$\vec{A} \sim \vec{v} = 0 \qquad \partial \vec{A} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r} \partial \vec{v} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r} \vec{a}\, \partial s$$

$$\vec{B} = \vec{\partial} \times \vec{A} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r} \vec{\partial} s \times \vec{a} = - \frac{\mu_0 q}{4\pi c r} \vec{n} \times \vec{a}$$

$$\vec{E} = - \partial_t \vec{A} - \vec{\partial} \Phi = - \frac{\mu_0 q \vec{a}}{4\pi r} \partial_t s + \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \vec{\partial} (rk)$$

$$= - \frac{\mu_0 q \vec{a}}{4\pi r} + \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \left(\vec{n} + \frac{r}{c} \vec{n} \cdot \vec{a} \frac{\vec{n}}{c} \right)$$

$$= \frac{q \vec{n}}{4\pi \varepsilon_0 r^2} - \frac{\mu_0 q}{4\pi r} \left(\vec{a} - \vec{n} (\vec{n} \cdot \vec{a}) \right) \leftarrow \sim \vec{n} \times \vec{B}$$

Ausdrücke für $\vec{v} \neq 0$:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2 k^2}\left(1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)\left(\vec{n}-\frac{\vec{v}}{c}\right) + \frac{q\mu_0}{\pi r k^3}\,\vec{n}\times\left(\left(\vec{n}-\frac{\vec{v}}{c}\right)\times\vec{a}\right)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\,\vec{n}\times\vec{E}$$

<u>Strahlung</u> Energiestrahlung durch Beschleunigung, $\vec{v}=0$

Poynting-Vek

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{\mu_0 c}\vec{E}\times(\vec{n}\times\vec{E}) = \frac{1}{\mu_0 c}\left(\vec{n}\vec{E}^2 - \vec{E}(\vec{n}\cdot\vec{E})\right)$$

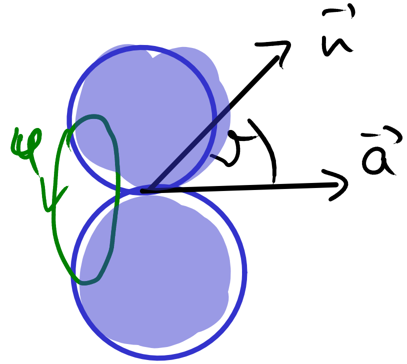
$$= \frac{q^2\mu_0}{16\pi^2 c r^2}\left(\vec{n}\left(\vec{a}^2-(\vec{n}\cdot\vec{a})^2\right) + \frac{c^2}{r}\left(\vec{a}-\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{a})\right)\right)$$

Strahlung durch Beschl. $\sim \frac{1}{r^2}$ $\sim \frac{1}{r^3}$ Umorganisation der Energiedichte

rad. Strahlung: $\hat{n}\cdot\vec{S} = \frac{q^2\mu_0}{16\pi^2 c r^2}\left(\vec{a}^2 - (\vec{a}\cdot\vec{n})^2\right) = \frac{q^2\mu_0 a^2}{16\pi^2 c r^2}\sin^2\vartheta = \frac{1}{r^2}\frac{d^2P}{d^2\Omega}$

Gesamtleistung P durch Strahlung

$$P = r^2 \int d^2\Omega \, \vec{n} \cdot \vec{S} = 2\pi \frac{\mu_0 q^2 \vec{a}^{\,2}}{16\pi^2 c} \int_0^{\pi} d\vartheta \, \sin^3\vartheta = \frac{\mu_0 q^2 \vec{a}^{\,2}}{6\pi c}$$

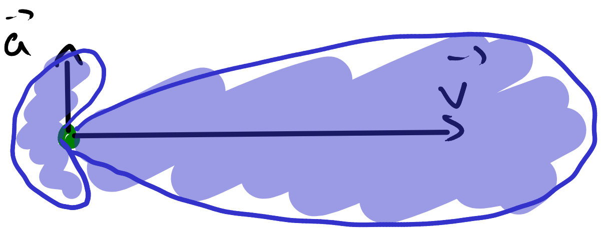


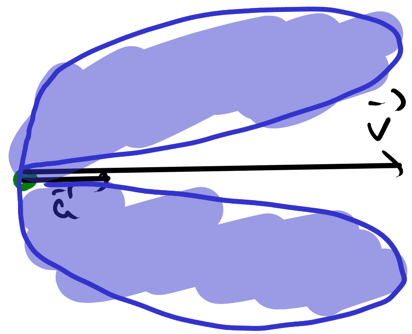
Für allg. Geschwindigkeiten $\vec{v}$

$$\frac{d^2P}{d^2\Omega} = r^2 \vec{n} \cdot \vec{S} = \frac{q^2 \mu_0}{16\pi^2 c k^5} \left(\vec{n} \times \left(\left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c} \right) \times \vec{a} \right) \right)^2$$

bei rel Geschw. ist grosse Strahlungsleistung möglich $\left(1/k^5\right)$

⇝ Synchrotronstrahlung





Relativistische Formulierung

anfangs ruhendes Teilchen $\vec{v}=0$

Feld bei x^μ mit $x^2=0$ $\quad u^\mu=(0,\vec{0})$ $\quad s=0$ $\quad \vec{u}=0$

$$v^\mu=(c,\vec{0}), \quad a^\mu=(0,\vec{a}), \quad v^2=-c^2, \quad v\cdot a=0$$

Abstand $\quad r=-\frac{v\cdot x}{c}$

Feldstärketensor $\quad F_{\mu\nu}=\frac{1}{c^2}\left(v_\nu E_\mu - v_\mu E_\nu\right)-\frac{1}{c}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}v^\rho B^\sigma$

$$B_\sigma = -\frac{\mu_0 q}{4\pi c^2 r^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}v^\mu x^\nu a^\rho$$

$$E_\sigma = \frac{q\, x_\mu}{4\pi\varepsilon_0 r^3}-\frac{\mu_0 q}{4\pi r^3}\left(a_\sigma r^2 - x_\sigma (x\cdot a)\right)$$

$$F_{\mu\nu}=\frac{\mu_0 c^3 q}{4\pi (v\cdot x)^3}\left(v_\mu x_\nu - v_\nu x_\mu\right)+\frac{\mu_0 c q (x\cdot a)}{4\pi (v\cdot x)^3}\left(v_\mu x_\nu - v_\nu x_\mu\right)$$
$$-\frac{\mu_0 c q}{4\pi (v\cdot x)^2}\left(a_\mu x_\nu - a_\nu x_\mu\right)$$

Strahlungsbeitrag

$$T_{\mu\nu} = \frac{\mu_0 \, c^2 q^2}{16\pi^2 (v\cdot x)^6} \left(c^2 \, (a\cdot x)^2 - a^2 (v\cdot x)^2 \right) x_\mu x_\nu$$