Elektrodynamik

Vorlesungsfolien, Kapitel 10

ETH Zürich, 2024 FS

PROF. N. BEISERT

© 2014–2024 Niklas Beisert.

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Dieses Werk ist lizensiert unter der Creative Commons Lizenz „Namensnennung – Nicht kommerziell – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International“ (CC BY-NC-SA 4.0).

Die Lizenz kann eingesehen werden unter:
`https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/`.

Die aktuelle Version dieses Werks befindet sich unter:
`http://people.phys.ethz.ch/~nbeisert/lectures/`.

10 Lösungen der freien Wellengleichung

10.1 Freie Wellengleichung

keine Quellen $\rho = 0, \vec{j} = 0$

$$\vec{\partial} \cdot \vec{E} = 0 \qquad \vec{\partial} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\partial} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \qquad \vec{\partial} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E} = 0$$

<u>Entkopplung</u>

Wellengleichungen

$$0 = \vec{\partial} \times (\vec{\partial} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B})$$

$$= \vec{\partial} (\vec{\partial} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E} = -\Box \vec{E} = 0$$

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2$$

$$0 = \vec{\partial} \times (\vec{\partial} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E})$$

$$= \vec{\partial} (\vec{\partial} \cdot \vec{B}) - \Delta \vec{B} + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{B} = -\Box \vec{B} = 0$$

10.2 Ebene Wellen

Skalares Feld $\psi(\vec{x},t)$ $\qquad \Box\psi = 0$ $\qquad x := \vec{n}\cdot\vec{x}$

Annahme (eb. Wellen) $\psi(\vec{x},t) = \psi(\vec{n}\cdot\vec{x},t)$

Wellengl. $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \psi = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \psi$

$$\psi(\vec{x},t) = \psi(\vec{n}\cdot\vec{x},t) = \psi_+(\vec{n}\cdot\vec{x}+ct) + \psi_-(\vec{n}\cdot\vec{x}-ct)$$

- nicht-dispersiv
- Ausbreitungsgeschw. $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ $\qquad (\Box)$
  Lichtgeschwindigkeit (universell!)

Monochromatische Wellen

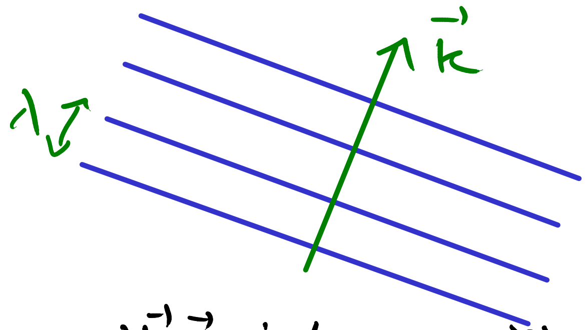
$$\psi(\vec{x},t) = \exp\left(i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t\right) \in \mathbb{C}$$

Wellenzahlvektor $\vec{k} = \|k\|\,\vec{n}$ kreisfreq. $\omega = \pm\|k\|c$

löst $\Box\psi = 0$ es gilt weiterhin (Diff. Gl. 1. Ord)

$$\vec{\partial}\psi = i\vec{k}\psi \quad \text{und} \quad \partial_t\psi = -i\omega\psi$$

$\Rightarrow$ $\Box\psi = 0$ falls $\omega^2 = c^2\vec{k}^2$



Wellenlänge $\lambda = 2\pi/\|k\|$

Takt $\tau = 2\pi/\omega$

Für reelle Wellen $\quad \psi = 2\,\mathrm{Re}\left(A e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t}\right) = A e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t} + A^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\omega t}$ ($A \in \mathbb{C}$)

$$= 2\,\mathrm{Re}(A)\cos(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t) - 2\,\mathrm{Im}(A)\sin(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)$$

Fourier-Transformation

$$\psi(\vec{x},t) = \sum_j \left(\overset{\in \mathbb{C}}{A_j} \exp(i\vec{k}_j \cdot \vec{x} - i\omega_j t) + \text{konj.} \right)$$

$\omega > 0 \quad \bar{A}(\vec{k}) \ldots$

$$\psi(\vec{x},t) = \int \frac{dk^3}{(2\pi)^3} \left(A(\vec{k}) \exp\left(i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\,\|k\|\,ct\right) + \text{konj} \right)$$

Realität der Lsg.: $\bar{A}(\vec{k}) = A(\vec{k})^*$ ist kompl. konj zu $A(\vec{k})$

Transformation für Fkt $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (t)

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i\omega t}\, \tilde{F}(\omega)$$

$$\tilde{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{-i\omega t}\, F(t)$$

Vollständigkeit Relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{-i\omega t} = 2\pi\delta(\omega) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{+i\omega t} = \delta(t)$$

(konvergenzfaktor $\exp(-\frac{1}{2}\omega^2 \epsilon)$ $\epsilon > 0$)

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, e^{-i\omega t'} F(t')$$

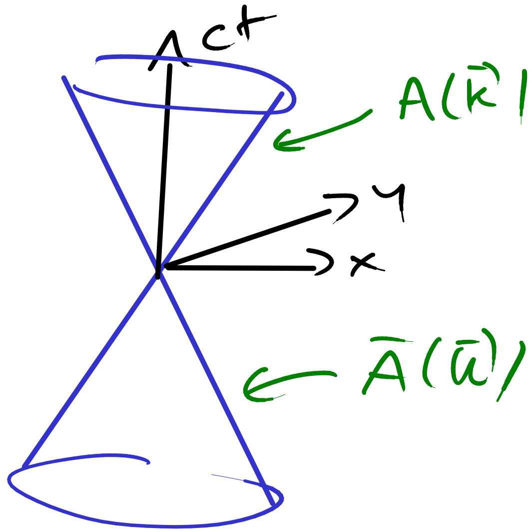
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, \delta(t-t')\, F(t') = F(t)$$

Fourier-Transformierte der allg. Lsg.

$$\tilde{\varphi}(\vec{k},\omega) = \int dx^3 \int dt\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}+i\omega t}\, \psi(x,t)$$

$$= \int dt \left(A(\vec{k})\, e^{-i\|k\|ct} + \bar{A}(-k)\, e^{+i\|k\|ct} \right) e^{i\omega t}$$

$$= 2\pi\delta(\omega - \|k\| c)\, A(\vec{k}) + 2\pi\delta(\omega + \|k\| c)\bar{A}(-k)$$



$$\Box \psi = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(-\vec{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\tilde{\varphi} = 0$$

10.3 Polarisation

$$\frac{\partial}{\partial t} = -c\frac{\partial}{\partial w}$$

ebene, nicht-monochr. Welle

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{n}\cdot\vec{x} - ct), \quad \vec{B} = \vec{B}(\underbrace{\vec{n}\cdot\vec{x} - ct}_{w})$$

Divergenzgl. $\vec{\partial}\cdot\vec{E} = \vec{\partial}\cdot\vec{B} = 0$ $\quad \vec{n}\cdot\vec{E}' = \vec{n}\cdot\vec{B}' = 0 \leftarrow$ Ableitung nach $\vec{n}\cdot\vec{x} - ct$

3. MG. $\vec{\partial}\times\vec{E} + \partial_t\vec{B} = 0 \qquad \vec{B}' = \frac{1}{c}\vec{n}\times\vec{E}'$

4MG

$$\vec{\partial}\times\vec{B} - \frac{1}{c^2}\partial_t\vec{E} = \vec{n}\times\vec{B}' + \frac{1}{c}\vec{E}' = \frac{1}{c}\left(\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{E}') + \vec{E}'\right)$$

$$= \frac{1}{c}\left(\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{E}') - \vec{n}^2\vec{E}' + \vec{E}'\right) = 0 \quad ✓$$

$E', B' \to E, B \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{E} = 0 \quad \vec{n}\cdot\vec{B} = 0 \quad \vec{B} = \frac{1}{c}\vec{n}\times\vec{E}$

Mächtigkeit $\quad \vec{n}\cdot\vec{E} = 0 \Rightarrow$ 2/3 Komp. von $\vec{E}$ frei, $\vec{B}$ folgt

Monochromatische Wellen

$$E, B \sim \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\|k\| ct)$$

$\vec{k} = \|k\|\vec{n}$ WZ-Vektor, $\vec{n}$ Ausbreitungsrichtung, $\|\vec{n}\| = 1$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2 \perp \vec{n}$, $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ orthogonale Normalvektoren.

$$\vec{E} = \mathrm{Re}\left((a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2) \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\underbrace{\|k\| c}_{\omega > 0} t) \right) \quad a_k \in \mathbb{C}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\mathrm{Re}\left((a_1\vec{e}_2 - a_2\vec{e}_1) \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\|k\| ct) \right)$$

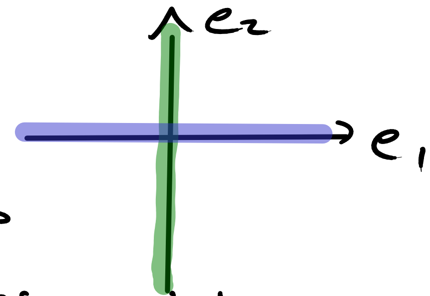
Klassifizierung bis auf „offensichtliche" Aspekte

- bis auf Translation in Raum und Zeit → Phasenverschieb.
- Rotationssymmetrie: $\vec{n}$ ist egal; Rotation um $\vec{n}$ rotiert a_1 und a_2
- Skalierung der Amplitude: a_1, a_2 normieren.

⇒ Klassifizierung d.'s $(a_1, a_2) = (1, i\alpha)$ $-1 \leq \alpha \leq +1$

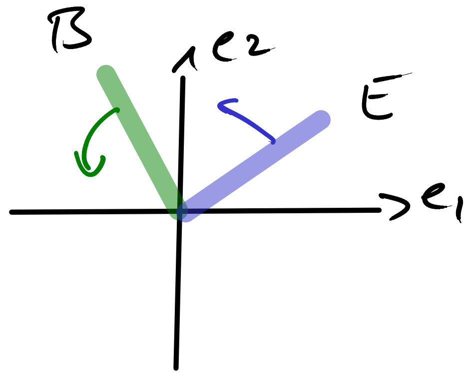
Lineare Polarisierung $\quad \alpha = 0$

$\vec{E} \sim \vec{e}_1 \qquad \vec{B} \sim \vec{e}_2 \qquad \vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{n} \perp \vec{E}$



$\vec{E}$ und $\vec{B}$ in Phase

2 Polarisationsmoden $\quad \left.\begin{array}{l} a_2 \text{ reell} \\ a_1 \text{ imaginär} \end{array}\right\} 90^\circ$ Phasenverschoben.



Zirkulare Polarisierung $\quad \alpha = \pm 1$

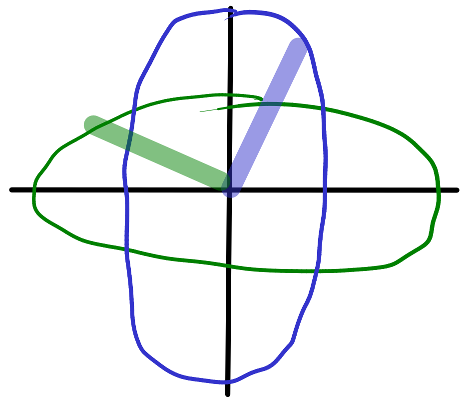
$\vec{E}$ und $\vec{B}$ haben konst Länge

$\vec{E}$ und $\vec{B}$ drehen sich um $\vec{n}$

2 Polarisationsmoden ± 1

Elliptische Polarisierung $|\alpha| \neq 0, 1$

$\vec{E}$ und $\vec{B}$ bewegen sich auf unterschiedlichen Ellipsen.



10.4 Energietransport

Zirkulare Polarisation reelle Form

$$\vec{E} = E_0 \left(\vec{e}_1 \cos(k\vec{n}\cdot\vec{x} - \omega t) - \vec{e}_2 \sin(k\vec{n}\cdot\vec{x} - \omega t) \right)$$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} \left(\vec{e}_1 \sin(k\vec{n}\cdot\vec{x} - \omega t) + \vec{e}_2 \cos(k\vec{n}\cdot\vec{x} - \omega t) \right)$$

kombinationen für $\omega, \vec{S}, \vec{\pi}, T$

$$\varepsilon_0 \vec{E}^2 = \varepsilon_0 E_0^2 (\vec{e}_1^{\,2} \cos^2 - 2\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 \cos\sin + \vec{e}_2^{\,2} \sin^2) = \varepsilon_0 E_0^2$$

$$\frac{1}{\mu} \vec{B}^2 = \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} (\vec{e}_1^{\,2} \sin + 2\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 \cos\sin + \vec{e}_2^{\,2} \cos^2) = \varepsilon_0 E_0^2$$

$$\varepsilon \vec{E}\times\vec{B} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{c} (\vec{e}_1\times\vec{e}_2 \cos^2 - \vec{e}_2\times\vec{e}_1 \sin^2) = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{c} \vec{n}$$

E/I-Dichte

$$w = \varepsilon_0 E_0^2 \qquad \vec{\pi} = \frac{\varepsilon_0}{c} E_0^2 \vec{n} = \frac{w}{c} \vec{n} .$$

Ausbreitungsgeschw. der Energiedichte

E-Flussdichte $\vec{S} = \varepsilon_0 c E_0^2 \vec{n} = w c \vec{n}$.

Spannungstensor $T = -\varepsilon_0 E_0^2 \vec{n}\vec{n}^T = -c\vec{n}\vec{\pi}^T$

Lineare Polarisation

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_1 \cos(k\vec{n}\cdot\vec{x} - \omega t) \qquad \vec{B} = \frac{E_0}{c}\vec{e}_2 \cos(k\vec{n}\cdot\vec{x} - \omega t)$$

Dichte: $\varepsilon_0 \vec{E}^2 = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2 = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2$

$$\vec{S} = \varepsilon_0 c E_0^2 \vec{n} \cos^2$$

$$\vec{\pi} = \frac{\varepsilon_0}{c} E_0^2 \vec{n} \cos^2$$

$$T = -\varepsilon_0 E_0^2 \vec{n}\vec{n}^T \cos^2$$

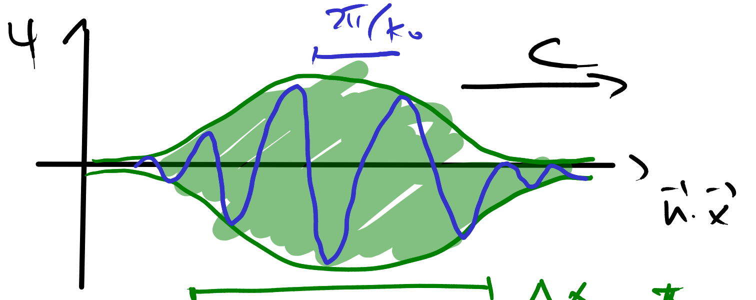
$$\vec{\pi} = \frac{w}{c}\vec{n}$$

$$\vec{S} = c w \vec{n}$$

$$T = -w\vec{n}\vec{n}^T = -c\vec{n}\vec{\pi}^T$$

$$w = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(k\vec{n}\cdot\vec{x} - \omega t)$$

10.5 Weitere Wellenlösungen



Wellenpakete

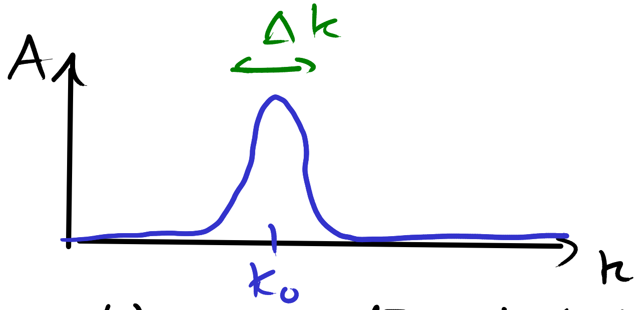
Gaußsches Wellenpaket

$$\psi(x,t) \sim \mathrm{Re}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}\Delta k^2(\vec n\cdot\vec x - ct)^2\right)e^{ik_0(\vec n\cdot\vec x - ct)}\right)$$

(hier ebene Welle)

Fourier-Transf. $\psi(x,t) = 2\,\mathrm{Re}\int \frac{dk}{2\pi} A(k)\, e^{i(\vec n\cdot\vec x - ct)k}$

$$A(k) \sim \exp\left(-\frac{1}{2}(k-k_0)^2/\Delta k^2\right)$$



Zwei relevante Geschwindigkeiten

Phasengeschwindigkeit $v_p = \omega/\|k\| \sim v$ (Berge/Täler)

Gruppengeschwindigkeit $v_g = d\omega/d\|k\| \sim v$ (Einhüllende)

in jedem Fall $|v_g| \leq c$

<u>Kugelwellen</u> (skalarer Fall ψ)

$$\Psi(\vec{x},t) = \frac{1}{r}\psi(r,t) \qquad r = \|x\|$$

Wellengl $\Box\Psi = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2\psi - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\psi = 0$

allg Lsg

einlaufende Welle

auslaufende Welle

$$\Psi = \frac{1}{r}\psi_+(r+ct) + \frac{1}{r}\psi_-(r-ct) \qquad \psi_\pm \text{ beliebig}$$

Energie/Impulstransport $\quad \Psi \sim \frac{1}{r} e^{ik\vec{n}\cdot\vec{x} - i\omega t}$

$$\omega \sim \frac{1}{r^2} \qquad \vec{\pi} \sim \vec{S} \sim \frac{1}{r^2}\vec{n} \qquad T \sim \frac{1}{r^2}\vec{n}\vec{n}^T$$

Vergleich Flächeninhalt einer Kugeloberfläche $A = 4\pi r^2$

- Energie je Kugelschale ist unabh. von Abstand
- Energiefluss durch Kugelschale ist unab. von Abstand