Elektrodynamik

Vorlesungsfolien, Kapitel 9

ETH Zürich, 2024 FS

Prof. N. Beisert

Die aktuelle Version dieses Werks befindet sich unter:
`http://people.phys.ethz.ch/~nbeisert/lectures/`.

9. Spezielle Relativitätstheorie

9.1 Poincaré-Transformationen

Galilei-Transformationen

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t \qquad t' = t$$

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \qquad \vec{B}' = \vec{B}$$

bzw.

$$\vec{E}' = \vec{E} \qquad \vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E} \qquad \rho' = \rho \qquad \vec{j}' = \vec{j} - \vec{v}\rho$$

Maxwell-Gl sind nicht invariant unter diese Transformation

Betrachte bzw. effektive Bewegungsgl. $\Rightarrow$ Wellengleichung

$$\Box \psi = 0 \qquad \Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2$$

folgt aus Potentialen $\quad -\Box \vec{A} + \vec{\partial}\left(\frac{1}{c^2}\partial_t \phi + \vec{\partial} \cdot \vec{A}\right) = 0$

bilde Rotation $(\vec{\partial} \times \ldots)$ $\quad \Box \vec{B} = 0 \quad$ ebenso $\Box \vec{E} = 0$

wende $\vec{x}' = \vec{x} - vt$ $\quad \psi'(x') = \psi(x)$

transformierte Gl. $\quad \left(\Box - \frac{2}{c^2}\vec{v}\cdot\vec{\partial}\partial_t - \frac{1}{c^2}(\vec{v}\cdot\vec{\partial})^2\right)\psi' = 0$

Symmetrie der Wellengleichung

Leiten die Raum/Zeit Symmetrien der DGl. $\Box\psi = 0$ her.

$$\left(\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\right)\psi(x,t) = 0$$

Vergleiche mit Laplace-Gl

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^2\psi(x) = 0$$

Laplace-Gl ist invariant unter Rotationen des Raumes

$\psi'(x') = \psi(x)$ mit $x' = Rx$ erfüllt $\Delta\psi' = 0 \Leftrightarrow \Delta\psi = 0$

$\Delta'\psi' = 0 \longleftrightarrow$ aufschreiben

$R \in SO(3)$ ist Rotationsmatrix in 3D ausgezeichnet durch

2 Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$: erhält das Skalarprodukt $\vec{x} \cdot \vec{y}$

$$\vec{x}' \cdot \vec{y}' = \vec{x}'^T \vec{y}' = \vec{x}^T R^T R \vec{y} \stackrel{!}{=} \vec{x}^T \vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{y} \quad \text{brauchen } R^T R = \mathrm{id}$$

$R^T = R^{-1} \leftarrow$ orthogonale Matrizen $\quad R \in O(3)$ bzw $SO(3)$

Transformation von Ableitungsoperatoren: $\vec{\partial}' = R \vec{\partial}$

$$\Delta' = \vec{\partial}'^2 = \vec{\partial}^T R^T R \vec{\partial} = \vec{\partial}^T \vec{\partial} = \Delta$$

Welche (lin) Transf. erhalten $\Box \psi = 0$?

Für Faktor $1/c^2$ in $\Box$ definieren wir $x^0 = ct$

$$\left(\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)^2 \right) \psi(x^0, \vec{x}) = \sum_{\mu=0}^{3} \eta^{\mu\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^2 \psi(x) = 0$$

$\eta = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1)$ best. Diagonalmatrix $\leftrightarrow$ Metrik

Lorentz-Transformationen

Benötigen dass $\Box' = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta^{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x'^\nu}\right)$

$$\stackrel{!}{=} \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta^{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) = \Box$$

Ansatz: $x'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x^\nu \quad \Big\| \quad \left(\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\right) = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\nu{}_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)$

Invarianz von $\Box$ benötigen wir

$$\Lambda \eta \Lambda^T \stackrel{!}{=} \eta \qquad \sum_{\rho,\sigma=0}^{3} \eta^{\rho\sigma} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta^{\mu\nu}$$

Λ kann Rotation in 3D verkörpern (x^1, x^2, x^3) ~ 3 Freiheitsgr.

3 weitere Freiheitsgrade (1+3 Blockrotation)

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \frac{\gamma \vec{v}^T}{c} \\ \frac{\gamma \vec{v}}{c} & \mathrm{id} + \frac{\gamma \vec{v}\vec{v}^T}{c^2(1+\gamma)} \end{pmatrix}$$ Lorentz Boost, $\gamma(\vec{v}) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

$$\vec{x}\,' = \vec{x} - \gamma \vec{v} t + \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)} (\vec{v} \cdot \vec{x}) \vec{v} \qquad t' = \gamma t - \frac{\gamma}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{x}$$

Wichtig: für $|\vec{v}| \ll c$ gilt $\gamma \approx 1 \Rightarrow \vec{x}\,' \approx \vec{x} - \vec{v} t$, $t' \approx t$

- Zeit transformiert mit Beteiligung von Ort

Eigenschaften: • Komposition zweier koll. Lorentz-Boost ist L.B

$$\Lambda(\vec{n} v_1)\, \Lambda(\vec{n} v_2) = \Lambda(\vec{n} v_3) \quad \text{mit } v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}$$

• Zwei nicht-koll. Boosts ergeben Boost + Rot. Gruppenstruktur

- kont. Gruppe ist $SO(3,1)$ Lorentz-Gruppe
- + Translation in Raum + Zeit erweitern zu Poincaré-Gr
- diskrete Transformation: Raum, Zeit Spiegelung.

Maxwell-Gleichungen

Lorentz-Boosts auf Maxwell-Gl.

$$\vec{E}' = \gamma \vec{E} + \gamma \vec{v} \times \vec{B} - \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)} (\vec{E}\cdot\vec{v})\vec{v}$$

$$\vec{B}' = \gamma \vec{B} - \frac{\gamma}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} - \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)} (\vec{B}\cdot\vec{v})\vec{v}$$

neue Felder an x'
alte Felder an x

Betrachte nicht-rel. Fall $|\vec{v}| \ll c$ $\quad \gamma = 1$

zwei Möglichkeiten für E vs B

$\nearrow$ $E \sim vB$ Gal für hom. Gl.

$\searrow$ $E \sim \frac{c^2}{v} B$ Gal. für inhom. Gl.

Quellen $\rho' = \gamma\rho - \frac{\gamma}{c^2}\vec{v}\cdot\vec{j} \quad \vec{j}' = \vec{j} - \gamma\rho\vec{v} + \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)}(\vec{j}\cdot\vec{v})\vec{v}$

9.2 Tensor

wir wollen zu 4-er Schreibweise MG gelangen

Koord. $x^\mu = (ct, \vec{x})$ transf. mit Matrix Λ^{-1}
und Verschiebung b

Summenkonv.

$$x'^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu := \sum_{\nu=0}^{3} (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu$$

Matrix: $\quad x' = \Lambda^{-1}\cdot x + b$

Indizes $\mu, \nu, \ldots = 0, 1, 2, 3$ bzw t, x, y, z

Summenkonv.: Summiere (implizit) über wiederholte Indizes

4er Vektoren mit oberen Index A^μ : kontravariant

~ ähnlich wie x transformiert unter Lorentz (ohne Transl.)

$$A'^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu A^\nu \qquad\qquad A' = \Lambda^{-1} A$$

Duale Vektoren dazu : kovariant mit unteren Index B_μ

$$B'_\mu = B_\nu \Lambda^\nu{}_\mu \qquad \text{bzw} \qquad B' = B \Lambda$$

damit transformiert B_μ wie kov. Abl. ∂_μ

Skalarprodukt eines ko und eines kontravar. Vektors ist invariant

$$B' \cdot A' = B'_\mu A'^\mu = B_\mu \Lambda^\mu{}_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\rho A^\rho = B_\mu \delta^\mu_\rho A^\rho = B \cdot A$$

Tensoren und Metrik

Tensoren erlauben es Produkte von Vektoren darzustellen und Produktterme zu addieren

$$A, B \in V \qquad C := A \otimes B \in V \otimes V \qquad C_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu$$

$$C_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu + A'_\mu B'_\nu + \dots$$

Transformationsverhalten ergibt sich aus von Vektoren

$$C'_{\mu\nu} = C_{\rho\sigma} \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu \quad (\text{Rang } (2,0))$$

allgemeiner Rang (p,q)
$$C_{\mu_1 \dots \mu_p}{}^{\nu_1 \dots \nu_q}$$

transformiert entsprechend mit p Faktoren Λ, q Fakt. Λ^{-1}

Hier interessieren wir uns für Lorentz-Transf.

ausgezeichnet durch $\Lambda^\mu{}_\rho \, \eta^{\rho\sigma} \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta^{\mu\nu}$ $\qquad \Lambda \eta \Lambda^T = \eta$

(inverse)

η Minkowski Metrik $\quad \eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1) = \eta_{\mu\nu}$ nicht-inv. Metrik

$\eta^{\mu\nu}$ Rang $(0,2)$ $\qquad \eta_{\mu\nu}$ Rang $(2,0)$

aber auch invariant $\eta' = \eta$

Mit der Metrik können wir ko- in kontravariante Vekt/Tensor überführen

$$A_\mu := \eta_{\mu\nu} A^\nu \qquad A'_\mu = \eta'_{\mu\nu} A'^\nu = \eta_{\mu\nu} A'^\nu$$

$$B^\mu := \eta^{\mu\nu} A_\nu \qquad B'^\mu = \eta'^{\mu\nu} B'_\nu = \eta^{\mu\nu} B'_\nu$$

ko-/kontra-variante Vektoren/Tensoren äquivalent aber nicht identisch bezgl. Rechnungen

Metrik definiert das invariante Skalarprodukt zweier gleichartiger Vekt.

$$A \cdot B = A_\mu B^\mu = A^\mu B_\mu = \eta^{\mu\nu} A_\mu B_\nu = \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$$

ebenso kann man über zwei Indizes eines Tensors die Spur bilden

$$C_\mu{}^{\mu} \cdots = \eta_{\mu\nu} C^{\mu\nu} \cdots = \eta^{\mu\nu} C_{\mu\nu} \cdots$$

Tensorfelder und Part. Ableitungen

Fkt die jedem Ort/Zeit $\vec{x}, t \to x^\mu$ ein Vektor/Tensor zuweist

verschiedene Arten von Feldern

skalares Feld $\varphi'(x') = \varphi(x)$

ko- bzw kontravar. Vektorfeld (entsprechend Tensorfelder)

$$A'_\mu(x') = A_\nu(x) \Lambda^\nu{}_\mu \qquad B'^\mu(x') = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu B^\nu(x)$$

Betrachte alle part. Abl eines Skalarfelds $\varphi(x)$

$$x' = \Lambda^{-1} x + b$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}\right) \varphi'(x') = \left(\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}\right) \varphi'(x'(x))$$

$$= \left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\right) \varphi(x) = \Lambda^{\nu}{}_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \varphi(x)$$

Schreibe part Abl als 4er Vektor $\partial_{\mu} := \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$

Regel $\partial'_{\mu} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu} \partial_{\nu}$ $\partial^{\mu} = \eta^{\mu\nu} \partial_{\nu}$

part Abl. transformieren natürlich als kov. Vektor

$A_{\mu}(x) := \partial_{\mu} \varphi(x)$ $C^{\mu}{}_{\nu}(x) := \partial_{\nu} B^{\mu}(x)$

kov. Vektorfeld Tensorfeld

09/1:32:27 – 09/2:40:50 (1:08:23)

9.3 kovariante Elektrodynamik

Felder und Gleichungen

Skalarprodukt als Matrixprodukt von Zeilen mit Sp.-Vektor.

Kreuzprodukt mittels total antisym. Tensor ε_{ijk}, $\varepsilon_{123} = +1$

$$(\vec{A} \times \vec{B})_k = \varepsilon_{ijk} A_i B_j$$

Schreibe $\varepsilon_{ijk} A_i$ als Matrixprodukt für B_j, führe Notation ein

$$(A^\times)_{ij} := -\varepsilon_{ijk} A_k = \begin{pmatrix} 0 & -A_z & +A_y \\ +A_z & 0 & -A_x \\ -A_y & +A_x & 0 \end{pmatrix}$$

Damit Kreuzprodukt als Matrixprodukt $(\vec{A} \times \vec{B}) = A^\times \vec{B}$

oder äquiv. $(\vec{A} \times \vec{B})^T = \vec{A}^T B^\times$

Inverse der $\times$ Abb.: $A_k = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (A^\times)_{ij}$.

inh. MG $\vec{\partial} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\partial_t \vec{E} = \mu_0 \vec{j}$

$$\left.\begin{aligned} &\partial_j B^{\times}_{jk} - \frac{1}{c^2}\partial_t E_k = \mu_0 j_k \\ \text{inh MG} \quad &\frac{1}{c}\partial_j E_j = \mu_0 c \rho \end{aligned}\right\}$$

Mittels eines Tensors $F_{\mu\nu}$ (Feldstärketensor) antisymmetrischer

3+1 Block
$$F_{\mu\nu} := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}\vec{E}^T \\ -\frac{1}{c}\vec{E} & B^{\times} \end{pmatrix}$$

$F_{ij} = B^{\times}_{ij} = -\varepsilon_{ijk} B_k$

$F_{0k} = \frac{1}{c} E_k = -F_{k0}$

$F_{00} = 0$

Definieren 4er-Stromdichte J_μ

3+1 Block $J_\mu = \begin{pmatrix} -c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$

$J_k = j_k$

$J_0 = -c\rho = -J^0$

$\partial_0 = \frac{1}{c}\partial_t$

inh. MG als 4er-Gl $\eta^{\mu\nu}\partial_\mu F_{\nu\rho} = \mu_0 J_\rho$

$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu =: \partial^\nu$

zwei Vorteile der 4er Notation:

- inh. MG ist kovariant formuliert => manifest kovariant unter Lorentz-Transformation

  (falls $F_{\mu\nu}$ Tensorfeld (2,0) und J Vektorfeld)

- Ladungserhaltung / Stromerh. folgt unmittelbar

$$0 = \partial^\rho \partial^\mu F_{\mu\rho} = \mu_0 \partial^\rho J_\rho = \mu_0 \left(+ \cancel{\tfrac{1}{c}} \partial_t (\cancel{c}\rho) + \vec{\partial} \cdot \vec{j} \right)$$

Hom MG haben die Form

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0$$

alternativ
$$\partial^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0 \qquad \tilde{F}_{ij} = \frac{1}{c} E^\times_{ij} = -\frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} E_k$$

dualer FS Tensor
$$\tilde{F}_{\mu\nu} := \begin{pmatrix} 0 & -\vec{B}^T \\ \vec{B} & \frac{1}{c} E^\times \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \tilde{F}_{0k} &= -B_k = -\tilde{F}_{k0} \\ \tilde{F}_{00} &= 0 \end{aligned}$$

Wie transformiert $\tilde{F}_{\mu\nu}$ unter Lorentz-Transf.?

betrachte Relation $\tilde{F}_{\mu\nu}$ zu $F_{\mu\nu}$ $\qquad \varepsilon_{0123} := +1$

über total antisymmetrischen Tensor in 4D $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ (Levi Civita)

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$$

$$\tilde{\tilde{F}}_{\mu\nu} := \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \tilde{F}^{\rho\sigma} = \ldots = - F_{\mu\nu}$$

Allerdings transformiert $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ wie Pseudotensor Rang 4

$$\varepsilon_{\mu'\nu'\rho'\sigma'} \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} \Lambda^{\nu'}{}_{\nu} \Lambda^{\rho'}{}_{\rho} \Lambda^{\sigma'}{}_{\sigma} = \det \Lambda \, \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$$

ε invariant $\quad \varepsilon'_{\mu\nu\rho\sigma} := \det \Lambda \cdot \varepsilon_{\mu'\nu'\rho'\sigma'} \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} \Lambda^{\nu'}{}_{\nu} \Lambda^{\rho'}{}_{\rho} \Lambda^{\sigma'}{}_{\sigma}$

$\varepsilon' \overset{!}{=} \varepsilon$

ε Pseudotensor!

(ε als Tensor Rang 4 betrachte $\varepsilon' = \det \Lambda \, \varepsilon$ $\quad \varepsilon$ ist pseudo invariant)

Erhaltungsgrössen

Energie und Impulserhaltung

w E-dichte $\quad$ S E-Stromdichte

π Impulsdichte $\quad$ T_{ij} I.-Stromdichte

$\Rightarrow$ Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu} \sim \begin{pmatrix} w & S \\ \pi & T_{ij} \end{pmatrix}$

$$T^{ij} = T_{ij} = \varepsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \vec{E}^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \vec{B}^2 \right)$$

$$T_{i0} = T_{0i} = \frac{1}{c} S_i = c \pi_i = \frac{1}{\mu_0 c} \varepsilon_{ijk} E_j B_k$$

$$T_{00} = -w = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$$

In 4er Notation: $T_{\mu\nu} = -\frac{1}{\mu_0} F_{\mu\rho} F_\nu{}^\rho + \frac{1}{4\mu_0} \eta_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$

$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$, $\quad T_\mu{}^\mu = 0$

sym. $\qquad$ spurlos

Kontinuitätsgleichung $\quad$ ih. MG $\quad\quad$ hom MG = 0

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\partial^\mu F_{\mu\rho} F_\nu{}^\rho + \frac{1}{\mu_0} F^{\mu\rho}\partial_\mu F_{\nu\rho} - \frac{1}{2\mu_0} F^{\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma}$$

$$= - J_\rho F_\nu{}^\rho \quad \leftarrow \text{Leistung + Kraftdichte}$$

<u>Potentiale</u> $\quad \Phi, \vec{A} \rightarrow A_\mu = \left(-\frac{1}{c}\Phi, \vec{A}\right)$

$$\Rightarrow \quad F_{\mu\nu} = -\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu$$

$$\Rightarrow \quad \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0$$

Lorenz-Eichung

$$\partial^\mu A_\mu = \partial\cdot A = 0$$

$\Downarrow$ ih. MG

$$\boxed{\Box A_\mu = -\mu_0 J_\mu}$$

inh. MG: $\quad \mu_0 J_\mu = \partial^\mu F_{\mu\nu} = -\partial^2 A_\nu + \partial_\nu \partial^\mu A_\mu = -\Box A_\nu + \partial_\nu(\partial\cdot A)$

Eichtransf. $\quad A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$

$$F'_{\mu\nu} = -\partial_\mu A'_\nu + \partial_\nu A'_\mu = F_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\nu\Lambda - \partial_\nu\partial_\mu\Lambda = \overset{\text{invariant}}{F_{\mu\nu}}$$

Differentialformen

dx^μ ~ 1-Form $\qquad dx^\mu \wedge dx^\nu$ ~ 2 Formen

Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ entspr. 2-Form

(indexfreie Notation)

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu$$

$d^2 = 0$

Differentiation $d = dx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$: Operator n-Form → (n+1) Form

hom MG $\qquad dF = 0$.

3-Form

inhom. MG benötigen duale FS Tensor $*F$ sowie Quellen J

Hodge Dual

n-Form ↓ (4-n) Form.

$$\rightarrow *F = \frac{1}{2} \tilde{F}_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu = -\frac{1}{4} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu}\, dx^\rho \wedge dx^\sigma$$

$$J = *\left(J_\mu dx^\mu\right) = \frac{1}{6} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma$$

$$d*F = \mu_0 J \quad \Rightarrow 0 = \underbrace{dd}_{d^2}*F = \mu_0\, dJ$$

$A = A_\mu dx^\mu$

$F = dA$

$dF = ddA = 0$

Eichtransf. $\quad A' = A + d\Lambda \qquad F' = dA' = dA + dd\Lambda = dA = F$

9.4. Geladene Teilchen

Kraft auf Teilchen, Teilchen werden durch Pfade in RZ beschr.

Pfade in der Raumzeit

In RZ wird ein Teilchen i.d.R. als Pfad $x^\mu(\sigma)$ σ Pfadvar.

spaltet auf in $\vec{x}(\sigma)$ sowie $ct(\sigma) = x^0(\sigma)$

Wahl der Pfadvar. σ ist beliebig

(σ umdefinieren soweit $\tilde{\sigma}(\sigma)$ monoton steigt)

3 rel. Arten σ festzulegen:

- Nicht-rel: σ sei so dass $t(\sigma) = \sigma$ $\quad \sigma \overset{!}{=} t$

  $x^\mu(t) = (ct, \vec{x}(t))$ aber: verlangt konkretes B.S.
- σ ist Eigenzeit τ $\quad \sigma \overset{!}{=} c\tau$ benötigt $(x')^2 = -c^2$

  $x' := \partial x / \partial \sigma$
- keine Festlegung von σ $\rightarrow$ unphys. Freiheitsgrad

rel. mech. Grösse : Vierer-Impuls p^μ

$$p^\mu = mc\,\frac{x'^\mu}{\|x'\|} \qquad \|x'\| = \sqrt{-x'^2} \qquad x'^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma}$$

Lorentz-Kraft

vier Kraft

$$c\,\frac{p'_\mu}{\|x'\|} = K_\mu = -\frac{q}{m}\,F_{\mu\nu}\,p^\nu$$

Beziehung zwischen Kraft & Leistung : $p' \cdot p = 0 = K \cdot p$

$$p^\mu K_\mu = -\frac{q}{m}\,p^\mu F_{\mu\nu}\,p^\nu = 0 \qquad F \text{ antisym!}$$

im Komp.

$$p^\mu = \frac{m}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}\begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} \qquad x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} \qquad \sigma = t$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{p}} = q\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \qquad c\,\dot{p}^0 = q\,\vec{E}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\dot{\vec{p}}$$