Elektrodynamik

Vorlesungsfolien, Kapitel 8

ETH Zürich, 2024 FS

Prof. N. Beisert

8 Erhaltungsgrössen und Symmetrien

8.1 Ladungserhaltung

Kontinuitätsgleichung für el. Ladungsdichte und Strom

$$\partial_t \rho + \vec{\partial} \cdot \vec{j} = 0$$

Integration über Gebiet V

$$Q_V := \int_V dx^3 \, \rho$$

$$\partial_t Q_V = \int_V dx^3 \, \partial_t \rho = - \int_V dx^3 \, \vec{\partial} \cdot \vec{j} = \oint_{\partial V} dx^2 \, \vec{n} \cdot \vec{j} =: - J_{\partial V}$$

Für $V = \mathbb{R}^3$ benötigt man geeignete asympt. RB.

dann $J = 0$ und damit $\partial_t Q = 0$ und $Q(t) = Q$

8.2 Energie und Impuls

Wir kennen E-dichte in ES / MS → Summe für ED

$$w(x) = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2$$

$$\partial_t w = \varepsilon_0 \vec{E}\cdot\partial_t\vec{E} + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot\partial_t\vec{B}$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\cdot(\vec{\partial}\times\vec{B}) - \vec{E}\cdot\vec{j} - \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot(\vec{\partial}\times\vec{E})$$

$$= -\frac{1}{\mu_0}\vec{\partial}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) - \vec{E}\vec{j}$$

<u>Satz von Poynting</u> (Kontinuitätsgl. für E-dichte)

$$\partial_t w + \vec{\partial}\cdot\vec{S} = -\vec{E}\cdot\vec{j} \qquad \vec{S} := \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$$

$\vec{S}$ heisst Energiestromdichte bzw. Poynting-Vektor

Ladungs/Stromwert mit $\vec{j} = \rho\vec{v}$

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B}$$
$$= \rho\vec{E} + \rho\,\vec{v}\times\vec{B}$$

$$\vec{f}\cdot\vec{v} = \rho\vec{v}\cdot\vec{E} = \vec{j}\cdot\vec{E}$$

Durch Integration über Gebiet V erhält man

$$\partial_t W_V + S_{\partial V} + P_{mech,V} = 0$$

$$W_V := \int dx^3 \, w(x)$$

$$S_{\partial V} := \oint_{\partial V} dx^2 \, \vec{n} \cdot \vec{S}$$

$$P_{mech,V} := \int_V dx^3 \, \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Ein freies Feld $(\rho = \vec{j} = 0)$ in $\mathbb{R}^3$ (asymptotische Felder): $\partial_t W = 0$

Impuls

Kraftdichte $\vec{f}$, Impulsdichte $\vec{\pi}$

$$\partial_t \vec{\pi} + \vec{f} = \vec{\partial} \cdot T$$ ← Tensor / Matrix

$k = x, y, z$

$$\partial_t \pi_k + f_k = \sum_{j=1}^{3} \partial_j T_{jk}$$

$\downarrow \int dx^3$

$$\partial_t \vec{P}_V + \vec{F}_V = \oint_{\partial V} dx^2 \, \vec{n} \cdot T$$

Herleitung für $\vec{\pi}, T$: $\quad \vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$

$$\vec{f} = \varepsilon_0 (\vec{\partial} \cdot \vec{E}) \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} (\vec{\partial} \times \vec{B}) \times \vec{B} - \varepsilon_0 \partial_t \vec{E} \times \vec{B}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} \right)$$

$$- \varepsilon_0 \vec{E} \times (\vec{\partial} \times \vec{E}) + \varepsilon_0 (\vec{\partial} \cdot \vec{E}) \vec{E}$$

$$- \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \times (\vec{\partial} \times \vec{B}) + \frac{1}{\mu_0} (\vec{\partial} \cdot \vec{B}) \vec{B}$$

Impulsdichte $\vec{\pi} := \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \vec{S}$

Für $\vec{F} = \vec{E}, \vec{B}$

$$(\vec{\partial} \cdot \vec{F}) \vec{F} - \vec{F} \times (\vec{\partial} \times \vec{F}) = (\vec{\partial} \cdot \vec{F}) \vec{F} - \vec{\partial} \vec{F} \cdot \vec{F} + (\vec{F} \cdot \vec{\partial}) \vec{F}$$

$$\sum_{j=1}^{3} \left(F_k \partial_j F_j + F_j \partial_j F_k - F_j \partial_k F_j \right) = \sum_{j=1}^{3} \partial_j \left(F_j F_k - \frac{1}{2} \delta_{jk} \vec{F}^2 \right)$$

Impulsstromdichte / Maxwellscher Spannungstensor T

$$T_{jk} = \varepsilon_0 \left(E_j E_k - \frac{1}{2} \delta_{jk} \vec{E}^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_j B_k - \frac{1}{2} \delta_{jk} \vec{B}^2 \right)$$

8.3 Symmetrien

Ladung $\leftrightarrow$	Symmetrien
Energie	Zeittranslation der Zeit
Impuls	Ortstranslation, Homogenität des Raumes
Drehimpuls	Rotation (kovarianter Vektorschreibw.)
Schwerpunktsbewegung	Bezugssystemtransformation (Galilei)
elektrischen Ladung	Eichtransformation

Energie / Impuls $\quad W = \int dx^3\, w \qquad \vec{P} = \int dx^3\, \vec{\pi}$

$$\partial_t W = 0 \qquad \partial_t \vec{P} = 0$$

Drehimpuls / Energieschwerpunkt

$$\vec{L} = \int dx^3\, \vec{x} \times \vec{\pi} \qquad \vec{G} = \int dx^3\, w \vec{x}$$

Erhaltungssätze: $\quad \partial_t \vec{L} = 0 \qquad \vec{G} - c^2 t \vec{P}$ ist erhalten

$$\partial_t \vec{G} = c^2 \vec{P}.$$

zusätzlich: konforme Symmetrie!

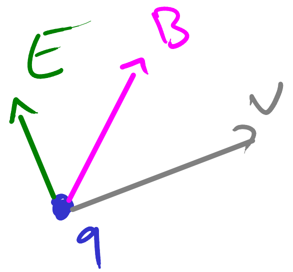
8.4 Galilei-Transformation

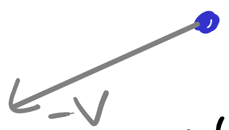
Unabhängigkeit von (inertialen) Bezugssystemen ↔ Galilei-Transformation

$$\vec{x}\,' = \vec{x} - \vec{v}\,t$$

<u>Lorentz-Kraft</u>

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$





$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \qquad \vec{F}\,' = q\,\vec{E}\,'$$

Für transformierte Felder muss gelten

$$\vec{E}\,'(x',t) = \vec{E}(x,t) + \vec{v} \times \vec{B}(x,t)\,; \quad \vec{B}\,'(x',t) = \vec{B}(x,t)$$

Homogenen Maxwell-Gl.

Gelten die hom. MG auch für $\vec{E}'$, $\vec{B}'$ wie oben?

Divergenzfreiheit von B? klar: $\vec{B}' = \vec{B}$

$$\vec{\partial} \cdot \vec{B} = 0 \iff \vec{\partial} \cdot \vec{B}' = 0$$

Induktionsgesetz: $\vec{\partial} \times \vec{E}$, $\partial_t \vec{B}$

$$\begin{aligned}
\vec{\partial} \times \vec{E}' &= \vec{\partial} \times \vec{E} + \vec{\partial} \times (\vec{v} \times \vec{B}) \\
&= \vec{\partial} \times \vec{E} + \vec{v}\,(\vec{\partial} \cdot \vec{B}) - (\vec{v} \cdot \vec{\partial})\,\vec{B} \\
&= \vec{\partial} \times \vec{E} - (\vec{v} \cdot \vec{\partial})\,\vec{B}
\end{aligned}$$

$$\partial_t \vec{B}' = \partial_t \vec{B} + (\vec{v} \cdot \vec{\partial})\,\vec{B}$$

$\Rightarrow$ Induktionsges' gilt

(sofern B divergenzfrei ist)

Invarianz / Kovarianz der hom. MG.

Inhomogene Maxwell-Gleichungen

Inhom MG sind nicht in/kovariant unter obiger Transf..

Stattdessen eine geeignete Transformation

$$\vec{B}'(x,t) = \vec{B}(x+vt,t) - \mu_0 \varepsilon_0 \vec{v} \times \vec{E}(x+vt,t)$$
$$\vec{E}'(x,t) = \vec{E}(x+vt,t)$$
$$\vec{j}'(x,t) = \vec{j}(x+vt,t) - \vec{v}\rho(x+vt,t)$$
$$\rho'(x,t) = \rho(x+vt,t)$$

Beachte: für $\vec{B}'$ ist Zusatzterm $\vec{v} \times \vec{E} \sim \mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$

für alltägliche Geschw $|\vec{v}| \ll c$ sind beide Gal-Transf. ähnlich.

Stattdessen gibt es eine geeignete Transf. zwischen Bezugssystemen die MG invariant lässt: Lorentz-Transformation (mischt Zeit + Raum)

8.5 Elektromagnetische Dualität

freie MG: $\vec{\partial}\cdot\vec{E} = 0 \qquad \vec{\partial}\times\vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0$

$$\vec{\partial}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\partial}\times\vec{B} - \frac{1}{c^2}\partial_t \vec{E} = 0$$

E, B treten sehr analog auf. konstruiere Transf.

$$\begin{pmatrix} \vec{E}' \\ c\vec{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ c\vec{B} \end{pmatrix}$$

erhält die 4 MG im freien Fall $\Leftrightarrow$ elektromagn. Dualität

Mit el. Ladungen und Strömen gilt das nur bei Ergänzung von mag. L/S.

$$\rho \to \rho_{el}, \ \vec{j} \to \vec{j}_{el} \quad \text{zusätzlich} \quad \rho_{mag}, \vec{j}_{mag}$$

- mag. Ladungen wurden exp. nicht entdeckt
- elektromag. Pot. $(\Phi, \vec{A})$ keine mag. L/S. erlaubt

Dennoch wären punktförmige mag. Monopole möglich