Elektrodynamik

Vorlesungsfolien, Kapitel 7

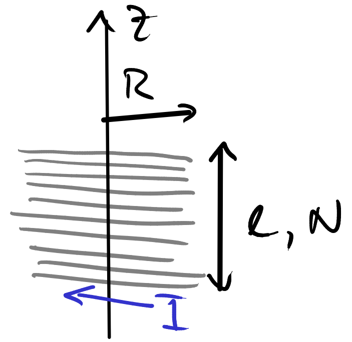
ETH Zürich, 2024 FS

Prof. N. Beisert

Die aktuelle Version dieses Werks befindet sich unter:
`http://people.phys.ethz.ch/~nbeisert/lectures/`.

7. Stromkreise

7.1 Induktivitäten



Magnetfeld einer Spule Zyl koordi r, z, φ

Stromdichte $\vec{j} = \eta\, \delta(r-R)\, \vec{e}_\varphi$

$\eta = \frac{IN}{l}$ $\quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

Flussdichte mittels Biot-Savart bei Punkt $\vec{x} = (d, 0, 0)$

integrieren über $\vec{y} = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$

$$\vec{B}(x) = \mu_0 \int dy^3 \, \frac{\vec{j}(y) \times (\vec{x} - \vec{y})}{4\pi \, \| x - y \|^3}$$

$$= \frac{\mu_0 \eta R}{4\pi} \int d\varphi \, dz \, \frac{(-z\cos\varphi, -z\sin\varphi, R - d\cos\varphi)}{(R^2 + d^2 - 2dR\cos\varphi + z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 \eta R}{2\pi} \int d\varphi \, \frac{(0, 0, R - d\cos\varphi)}{R^2 + d^2 - 2dR\cos\varphi} = \mu_0 \eta \, \theta(R-d)\, \vec{e}_z$$

im Inneren der Spule

$$\vec{B}(x) = \mu_0 n \vec{e}_z = \frac{\mu_0 N I}{l} \vec{e}_z$$

Feldenergie $W = \frac{\pi \mu_0 R^2 N^2 I^2}{2l}$

Induzierte Spannung

Induktionsgesetz → induzierte Spannung aufgrund Änderung magn. Flussd.

N Schleifen ergeben

$$U = -N \dot{\psi} \quad (\psi \text{ mag. Fluss durch eine Schleife})$$

z.B. Kopplung zweier Spulen N_j ; l, R gleich auf gleichen Zyl. gewickelt

$$U_1 = -N_1 \dot{\psi}_2 = -N_1 A \, \partial_t B_z = -\pi R^2 N_1 \frac{\mu_0 \dot{I}_2 N_2}{l} = -L_{12} \dot{I}_2$$

L_{12} Induktivität zwischen Spulen $L_{12} = \frac{\pi \mu_0 R^2 N_1 N_2}{l}$

- geometrisch
- symmetrisch

Verallgemeinert sich auf alle Paare von Bauelementen (j,k)

$$U_k = - \sum_j L_{kj} \dot{I}_j \qquad W = \sum_{j,k} \frac{1}{2} L_{kj} I_j I_k$$

Induktionskoeff L_{kj} ← Geometrie.

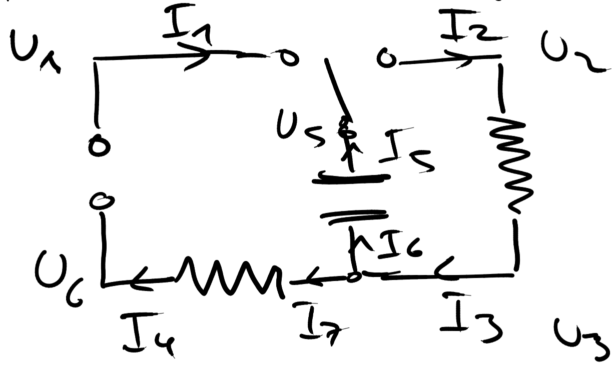
Selbstinduktion von Bauelementen (z.B. Spule: $L = \frac{\pi \mu_0 R^2 N^2}{l}$

Änderung des Stroms durch ein Element erzeugt eine Spannung über das Element,
Spannung wirkt so dass der Strom in entgegengesetzter Richtung angeregt wird ⇝ Trägheit des Stroms (analog zur träg. Masse)

7.2 Stromkreise

Potentiale und Ströme

Stromkreis als Graph



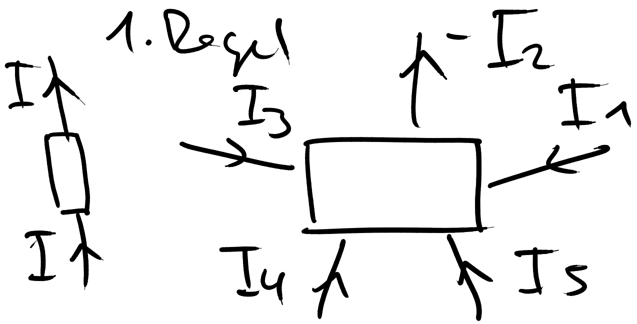
- je Draht/Linie eine gerichtete Stromstärke I_k
- je Draht ein Potential U_n

Zustandsvariablen des Systems I_k, U_n

Bewegungsgleichungen anhand der Bauelemente bestimmen

Kirchhoffsche Regeln

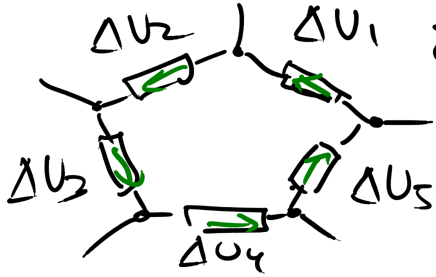
1. Regel



alle Ströme summieren sich zu Null

$$\sum_n I_n = 0$$

2. Regel: Summe aller Potentialdifferenzen über geschlossene Schleife ist Null

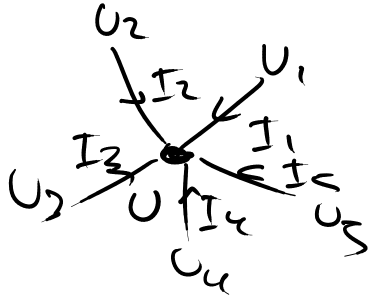


$$\sum_k \Delta U_k = 0$$

an jedem Punkt herrscht eindeutiges Potential U_n

Bauelemente

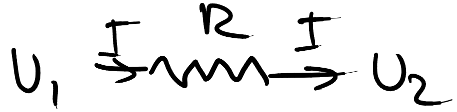
- Verzweigung



$$U_i = U$$
$$\sum I_i = 0$$

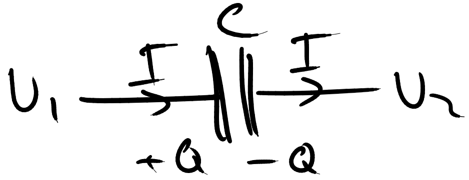
→ Reduziert dyn. Variablen I_k, U_k → Vereinfachung

- Widerstand



$$U_1 - U_2 = R \cdot I$$

- Kondensator

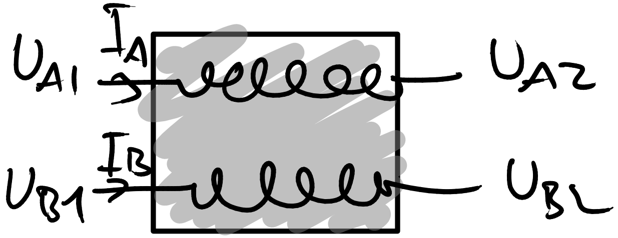


$$\dot{Q} = I, \quad U_1 - U_2 = \frac{Q}{C}$$

- Spule

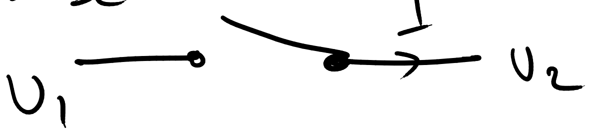
$$U_1 - U_2 = L \dot{I}$$

- gekoppelte Spulen



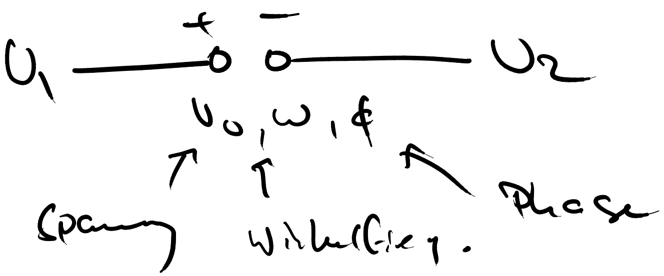
$$U_{A1} - U_{A2} = L_A \dot{I}_A + L_{AB} \dot{I}_B$$
$$U_{B1} - U_{B2} = L_B \dot{I}_B + L_{AB} \dot{I}_A$$

• Schalter



$$\begin{cases} I = 0 & \text{offen} \\ U_1 = U_2 & \text{geschlossen} \end{cases}$$

• Spannungsquelle



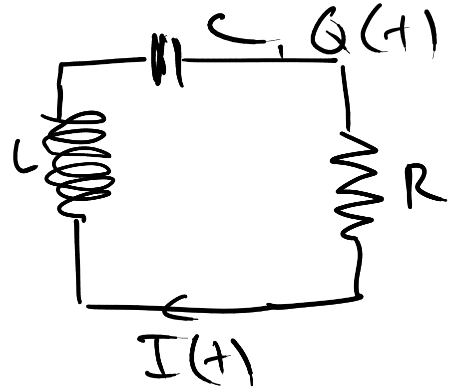
Gleichstrom $U_1 - U_2 = U_0$

Wechselstrom $U_1 - U_2 = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$

Für Stromkreis: für jeden Freiheitsgrad gibt es
1 Bewegungsgleichung
bis auf eine (Stromerhaltung)

aber: Spannungen bis auf eine definiert
Nullpotential kann beliebig gewählt werden.

7.3 Schwingkreis



Standardbeispiel mit wichtigsten Bauelementen
Kondensator C, Widerstand R, Spule L
in Serie

$t=0$ Kondensator ungeladen $Q(t=0)=0$
es fliesse Strom $I(t=0)=I_0$

Bewegungsgleichung: $\dot{Q} \overset{\text{Kond.}}{=} I, \quad L\dot{I} + RI + \frac{Q}{C} = 0$ (2. Kirchhoff)

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = 0$$

(gedämpfter HO)

$Q(0) = 0$
$\dot{Q}(0) = I_0$

$a_1 = \frac{I_0 - Q_0 b_2}{b_1 - b_2}$, $a_2 = \frac{I_0 - Q_0 b_1}{b_2 - b_1}$

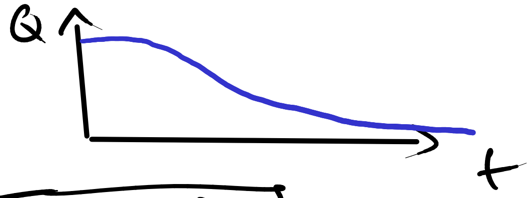
Ansatz mit Exp.faktoren $Q(t) = a_1 e^{b_1 t} + a_2 e^{b_2 t}$

b_i durch quad Gl. bestimmt $Lb^2 + Rb + \frac{1}{C} = 0 \quad b_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{\sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}$

3 charakteristische Fälle je nach Vorz. der Diskriminante

$CR^2 - 4L$

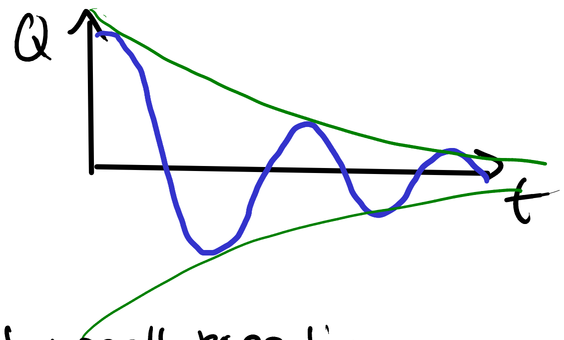
- $CR^2 > 4L$ starke Dämpfung, b_1, b_2 sind neg. reell.



- $CR^2 < 4L$ schwache Dämpfung, oszillationen, b_1, b_2 komplex

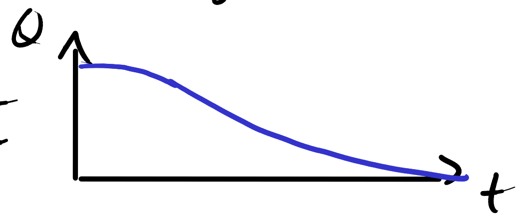
$$b_{1,2} = -k \pm i\omega \qquad k = \frac{R}{2L} \qquad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Schwingvorgang mit Kreisfreq ω
und exp. Abklingen k



- $CR^2 = 4L$ krit Dämpfung; beide Exp gleich $b_1 = b_2$ reell negativ

$$Q(t) = \left(Q_0 + (I_0 + k\,Q_0)\,t\right) e^{-kt} \qquad k = \frac{R}{2L}$$



7.4 Wechselstrom

Spannungsquelle/Stromkreis mit vorgegebener fester Freq. ω

bei lin. Gesetzmässigkeiten können wir alle Variablen komplexifizieren

$$x(t) \in \mathbb{R} \qquad x(t) = \mathrm{Re}\left(x_0 e^{i\omega t}\right) \qquad x_0 \in \mathbb{C}$$

$$x \leftarrow U, I, Q$$

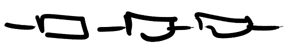
Resistivitäten

alle Bauelemente Widerstand R, Kondensator C, Spule L
haben gleiche Bewegungsgleichung (komplexifiziert)

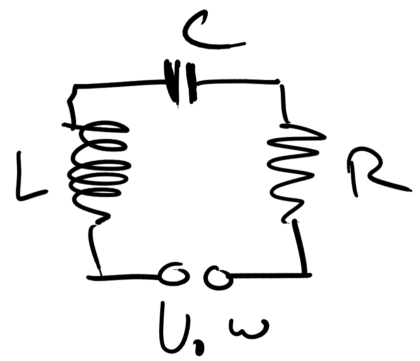
$$Z = \frac{U_0}{I_0} \in \mathbb{C}$$

- Widerstand $Z = R$ (pos. reell)
- Spule $Z = i\omega L$ (pos. imag.)
- Kond.: $Z = \frac{1}{i\omega C}$ (neg. imag.)

Reihenschaltung, Parallelschaltung von Resistivitäten ist wie

  bei Widerständen, nur komplex Z_k

Resonanz



Reihenschaltung $\quad Z = R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L$

Impedanz $|Z| = R\sqrt{1 + \frac{L^2}{R^2}\frac{(\omega^2-\omega_0^2)^2}{\omega^2}}$

mit Resonanzfreq $\quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$