Elektrodynamik

Vorlesungsfolien, Kapitel 6

ETH Zürich, 2024 FS

PROF. N. BEISERT

6. Maxwell-Gleichungen

6.1 Bewegte Punktladungen

Ladungs- und Stromverteilung $\rho(x)$, $\vec{j}(x)$.
kombiniere E und B-Feld

Kraftdichte $\vec{f}(x) = \rho(x)\vec{E}(x) + \vec{j}(x) \times \vec{B}(x)$ Kraft $\vec{F} = \int dx^3 \, \vec{f}(x)$

ruhendes Punktteilchen bei $\vec{y}$: $\rho(x) = q\,\delta^3(x-y)$ $\vec{j} = 0 \Rightarrow \vec{F} = q\vec{E}(y)$

bewegtes Punktteilchen $\rho(x,t) = q\,\delta^3(x-y-vt)$ y ist Pos Zeit $t=0$

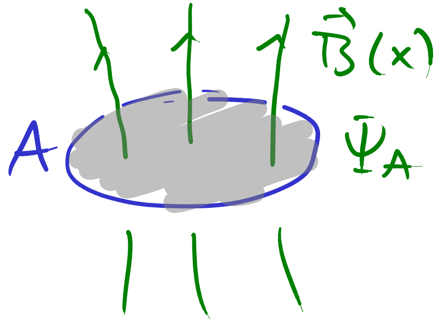
$\vec{j}(x,t) = q\vec{v}\,\delta^3(x-y-vt)$ v ist Geschw.

Gesamtkraft (Lorentz-Kraft) $\vec{F} = q\,(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}).(\vec{y}+\vec{v}t)$

stat. Kontinuitätsgleichung für $\vec{j}$ sondern dynamische

$$\vec{\partial}\cdot\vec{j} + \partial_t \rho = 0.$$

6.2. Faradaysches Induktionsgesetz



Induziertes Potential

Beobachtung (Faraday):

Änderung in mag. Fluss Ψ_A durch A erzeugt eine Potentialdifferenz $\Delta U_{\partial A}$ auf dem Rand von A $\sim \dot{\Psi}_A$

mag. Fluss durch A: $\Psi_A := \int_A dx^2\, \vec{n} \cdot \vec{B}$

Ψ_A kann sich ändern, wenn:

- $\vec{B}$ sich ändert
- die Schleife ∂A bewegt sich im Magnetfeld
- die Schleife ∂A dreht sich oder wird deformiert

$\Rightarrow$ Potentialdifferenz entlang ∂A: $\Delta U_{\partial A} = \oint_{\partial A} d\vec{x} \cdot (\vec{E} + \dot{\vec{x}} \times \vec{B}) = -\dot{\Psi}_A$

Feldgleichung

$$\oint_{\partial A} d\vec{x} \cdot \left(\vec{E} + \dot{\vec{x}} \times \vec{B}\right) = -\frac{d}{dt} \int_A dx^2 \, \vec{n} \cdot \vec{B}$$

$$= -\int_A dx^2 \, \vec{n} \cdot \Big(\partial_t \vec{B} + \dot{\vec{x}} \underbrace{(\vec{\partial} \cdot \vec{B})}_{=0}\Big) + \oint_{\partial A} d\vec{x} \cdot (\dot{\vec{x}} \times \vec{B})$$

- Magnetische Induktion $\vec{B}$ ist weiterhin divergenzfrei $\vec{\partial} \cdot \vec{B} = 0$
- letzte Term entspricht Magnetfeld Beitrag der Lorentz-Kraft

$$\int_A dx^2 \, \vec{n} \cdot \partial_t \vec{B} = -\oint_{\partial A} d\vec{x} \cdot \vec{E} \overset{\text{Stokes}}{=} -\int_A dx^2 \, \vec{n} \cdot (\vec{\partial} \times \vec{E})$$

Im dynamischen Fall ist das el. Feld nicht mehr rotationsfrei

sondern (diff. Form des Induktionsgesetzes)

$$\vec{\partial} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0$$

6.3 Maxwellsche Ergänzung

Bis hier: $\vec{\partial}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$ $\qquad \vec{\partial}\times\vec{E} + \partial_t\vec{B} = 0$

$\vec{\partial}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\partial}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j}$

Konsistenz Unstimmigkeit der Gleichungen

Divergenz der letzten Gl.: $0 = \vec{\partial}\cdot(\vec{\partial}\times\vec{B}) = \mu_0\vec{\partial}\cdot\vec{j} = -\mu_0\partial_t\rho$

Betrachte zeitliche Abl. der ersten Gl. $\varepsilon_0\vec{\partial}\cdot\partial_t\vec{E} = \partial_t\rho$

Erweitere letzte Gl. durch $\vec{E}$-Abhängigkeit

$$\vec{\partial}\times\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\partial_t\vec{E} = \mu_0\vec{j}$$

$\vec{\partial}\cdot($ " $)$ $\Leftrightarrow$ Kontinuitätsgleichung für $\rho, \vec{j}$

Maxwell-Gleichungen

differentielle Form

$$\vec{\partial}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \qquad \vec{\partial}\times\vec{E} + \partial_t\vec{B} = 0$$

homogen

$$\vec{\partial}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\partial}\times\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\partial_t\vec{E} = \mu_0\vec{j}$$

inhomogen

Kontinuitätsgleichung als Konsistenzbedingung aller 4 Gl

$$\vec{\partial}\cdot\vec{j} + \partial_t\rho = 0$$

Integralform:

$$\oint_{\partial V} dx^2\,\vec{n}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\int_A dx^2\,\vec{n}\cdot\vec{B} = -\oint_{\partial A} d\vec{x}\cdot\left(\vec{E} + \dot{\vec{x}}\times\vec{B}\right)$$

$$\oint_{\partial V} dx^2\,\vec{n}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V dx^3\,\rho$$

$$\frac{d}{dt}\int_A dx^2\,\vec{n}\cdot\vec{E} = \oint_{\partial A} d\vec{x}\cdot\left(\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\vec{B} - \dot{\vec{x}}\times\vec{E}\right) - \frac{1}{\varepsilon_0}\int_A dx^2\,\vec{n}\cdot\left(\vec{j} - \dot{\vec{x}}\rho\right)$$

Kraftdichte $\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$

Kraft $\vec{F}_V = \int_V dx^3 \, \vec{f}$ Drehmom: $\vec{M}_V = \int_V dx^3 \, \vec{x} \times \vec{f}$.

Beachte: $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ c: Lichtgeschw. im Vakuum $\approx 3 \cdot 10^8$ m/s

$\rightsquigarrow$ Ausbreitung von Licht wird durch M-Gl. bestimmt.

6.4. Elektromagnetische Potentiale

betrachte homogen diff. Feldgleichungen

$$\vec{\partial} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\partial} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0$$

Potentiale

Wir wollen obige Gl durch Potentiale allg. lösen.

$$\vec{\partial} \cdot \vec{B} = 0 \quad \Leftarrow \quad \vec{B} = \vec{\partial} \times \vec{A}$$

$\Rightarrow$ gilt für einf. zsh. Gebiet.

Einsetzen in andere Gl

$$\vec{\partial} \times (\vec{E} + \partial_t \vec{A}) = 0$$

d.h. $\vec{E}$ ist nicht mehr reines Gradientenfeld,

stattdessen: $\vec{E} = -\vec{\partial} \Phi - \partial_t \vec{A}$

können beide hom. M. Gl. lösen durch $\vec{B} = \vec{\partial} \times \vec{A}$, $\vec{E} = -\vec{\partial} \Phi - \partial_t \vec{A}$

Betrachte inhom. Feldgl. (Einsetzen von $\vec{A}, \Phi$)

$$-\Delta\Phi - \vec{\partial}\cdot\partial_t\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$-\Delta\vec{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{A} + \vec{\partial}(\vec{\partial}\cdot\vec{A}) + \frac{1}{c^2}\vec{\partial}\partial_t\Phi = \mu_0\vec{j}$$

D'Alembert Operator $\Box := \Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2$

$$\Rightarrow \quad -\Box\Phi - \partial_t\left(\frac{1}{c^2}\partial_t\Phi + \vec{\partial}\cdot\vec{A}\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$-\Box\vec{A} + \vec{\partial}\left(\frac{1}{c^2}\partial_t\Phi + \vec{\partial}\cdot\vec{A}\right) = \mu_0\vec{j}$$

Eichtransformationen

$\vec{B}$-Feld ändert sich nicht unter bestimmten Änderungen von $\vec{A}$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\partial}\Lambda \quad \Rightarrow \quad \vec{B}' = \vec{B}$$

entsprechend Transformation von Φ anpassen:

$$\Phi' = \Phi - \partial_t \Lambda \quad \Rightarrow \quad \vec{E}' = \vec{E}$$

Coulomb-Eichung

gewöhnliche Wahl der Eichung bzw Eichfixierung

$$\vec{\partial} \cdot \vec{A} = 0 \qquad \text{(zu jeder Zeit } t\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta \Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \qquad (\Phi \text{ ist wie in E.S. für alle } t)$$

$$-\Delta \vec{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j} - \frac{1}{c^2}\vec{\partial}\partial_t \Phi$$

Lorenz Eichung

Vorlage: $\vec{\partial}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t \Phi = 0$

Verbleibende Feldgl.

$$-\Box \Phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \qquad -\Box \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

- alle $(1+3)$ Gleichungen entkoppeln.
- alle Gleichungen haben identische Struktur
- alles sind einfache Wellengleichungen in 3D. (Licht)

Lorenz Eichung lässt sich immer erreichen: $X := \vec{\partial}\cdot\vec{A} + \partial_t \phi / c^2$

unter Transf: $X \to X'$ $\quad X' = X + \Box\Lambda = X + \Delta\Lambda - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \Lambda$

Ziel: $X' = 0$. Lösung als Anfangswertprob $\Lambda(t=0)$ $\partial_t\Lambda(t=0)$ vorgegeben

Beachte: Lorenz ist nicht eindeutig! / $\Lambda(t)$ folgt aus Gl. $\Box\Lambda = -X$