Elektrodynamik

Vorlesungsfolien, Kapitel 5

ETH Zürich, 2024 FS

Prof. N. Beisert

Die aktuelle Version dieses Werks befindet sich unter:
`http://people.phys.ethz.ch/~nbeisert/lectures/`.

5. Elektro- und Magnetostatik in Materie

5.1 Makroskopische Felder

E/M-Statik: Felder, Quellen $E(x)$, $\Phi(x)$, $\rho(x)$ mikroskopische Grösse

führe ein makroskopische Felder $\bar{E}(x)$, $\bar{\Phi}(x)$, $\bar{\rho}(x)$

Mittelung über klein Raumbereiche

$$\bar{\Phi}(x) := \int dy^3 \, \Phi(y) \, \varepsilon(x-y)$$

$\varepsilon(x)$ habe Träger in Umfeld von Ursprung.

Normierung: $\int dx^3 \, \varepsilon(x) = 1$

Trägerbreich ist mikroskopisch gross, makroskopisch klein.

Anmerkungen:

niederfreq. Anteile bleiben ganz erhalten.

- hochfrequente Anteile werden in $\bar{\Phi}(x)$ herausgemittelt

- kompatibel mit Ableitungen

$$\vec{\partial}\,\overline{\Phi}(x) = \int dy^3\, \vec{\partial}_x\, \varepsilon(x-y)\, \phi(y) = -\int dy^3\, \vec{\partial}_y\, \varepsilon(x-y)\, \phi(y)$$

$$\overset{PI}{=} \int dy^3\, \varepsilon(x-y)\, \vec{\partial}\phi(y) = \overline{\vec{\partial}\phi}(y).$$

- ebenso für zeitliche Mittelung.

Statik: $\partial_t \overline{\phi} = 0$

Im Folgenden nur gemittelte Felder betrachten.

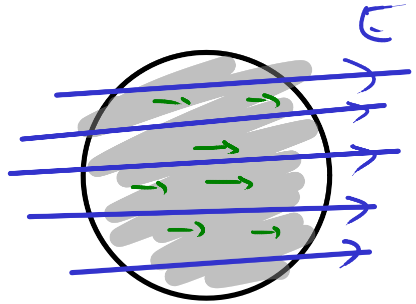
$\overline{E}, \overline{\phi}, \overline{\rho} \to E, \phi, \rho$ ohne Querstrich

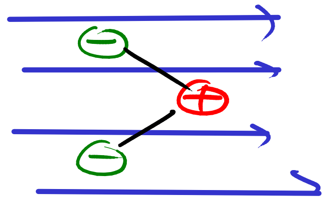
Feldgl. E.S. $\vec{\partial}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_{ges}$, $\vec{\partial}\times\vec{E} = 0$,

$$\oint_{\partial V} dx^2\, \vec{n}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{ges,V}, \quad \oint_{\partial A} d\vec{x}\cdot\vec{E} = 0.$$

5.2 Dielektrika

- Paraelektrikum
- Ferroelektrikum





Freie Ladungen und Dipoldichte

wir unterscheiden zwei Arten von Ladung in Materie

- Ladungen die in der Materie gebunden sind.
- freie Ladungen die nicht an Materie gekoppelt sind

Ladungstrennung in Materie wird durch Dipoldichte $\vec{P}$ beschrieben

$\sim$ Menge el. Dipole $\vec{p}$ je Volumeneinheit.

Zusammenhang zwischen $\vec{P}$ und äusseren el. Feld $\vec{E}$?

Annahme lineare Antwort der Materie

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \gamma \vec{E} + O(E^2)$$

γ beschreibt Stärke der Antwort

- meist isotrop $\gamma = \chi_e$ dielektrische Suszeptibilität
- nicht-isotroper Fall: γ Matrix (Festkörper)

Annahme: lineare Zsh. $\vec{P} \sim \vec{E}$ (isotrop)

Aufgabe: bestimme $\vec{E}$ anhand von ρ_{frei}

Dielektrische Verschiebung

Potential wie zuvor berechnen

freie Ladungen

$$\Phi(x) = \int dy^3 \left(\rho_{frei}(y) \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \|x-y\|} + \vec{P}(y) \cdot \vec{\partial}_y \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \|x-y\|} \right)$$

$$\vec{E} = -\vec{\partial}\Phi$$

$$\vec{\partial} \cdot \vec{E} = -\Delta_x \Phi(x) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int dy^3 \left(\rho_{frei}(y)\, \delta^3(x-y) + \vec{P}(y) \cdot \vec{\partial}_y \delta^3(x-y) \right)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\rho_{frei}(x) - \vec{\partial} \cdot \vec{P} \right)$$

Diel. Verschiebung: $\vec{D} := \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{\partial} \cdot \vec{D} = \rho_{frei}$

$$\rho_{ges} = \rho_{frei} - \vec{\partial} \cdot \vec{P} = \rho_{frei} + \rho_{Dipol}$$

Im Vergleich: $\vec{E} = \vec{E}_{ges}$, $\vec{P} = -\varepsilon_0 \vec{E}_{Dipol}$ $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_{frei}$

Anmerkungen:

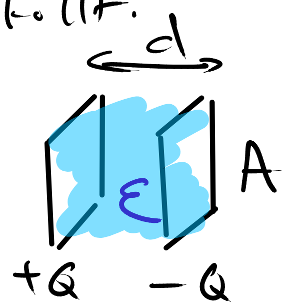
- E phys., messbar (entspricht ρ_{ges})
- D Hilfsgrösse (entspricht ρ_{frei})
- P Dichte der ges. Dipol (kein el. Feld)

$\vec{E}$, $\vec{D}$, $\rho := \rho_{frei}$

Feldgleichungen $\quad \vec{\partial} \cdot \vec{D} = \rho$, $\quad \partial \times \vec{E} = 0$, $\quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

el. Materialkonst. $\quad \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \quad \varepsilon_r = 1 + \chi_e \Rightarrow \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

Beispiel Plattenkondensator mit Materie gefüllt.



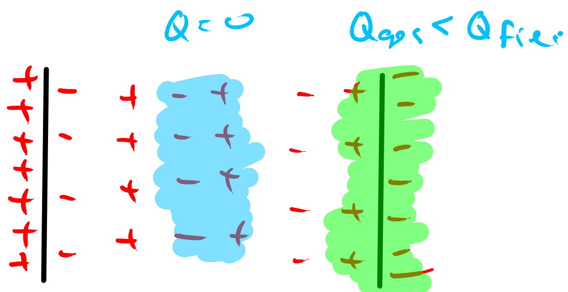
$\pm Q$ ist freie Ladung auf Platte

Stärke von D $\qquad D = \frac{Q}{A} = \sigma$ freie Flächenladungsdichte

Die Potentialdifferenz U zw. Platten ergibt sich hingegen aus E

$$U = dE = \frac{dD}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{dQ}{\varepsilon_0 \varepsilon_r A} \Rightarrow \text{Kap } C := \frac{Q}{U} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d} \overset{\varepsilon_r \to 1}{=} \varepsilon_r \cdot C_0$$

Energie $\quad W = \frac{1}{2} U Q = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{Q^2}{2C}$

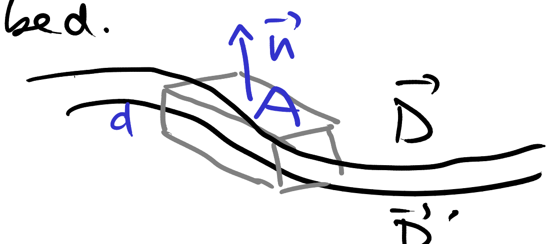


5.3 Grenzflächen von Dielektrika

Homogenes Medium führt zu äquiv Statik mit $\varepsilon_0 \to \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$

Grenzflächen zwischen verschieden Medien

Wie verhalten sich Felder $\vec{D}, \vec{E}$ bei Übergang zwischen Medien $\Rightarrow$ Stetigkeitsbed.



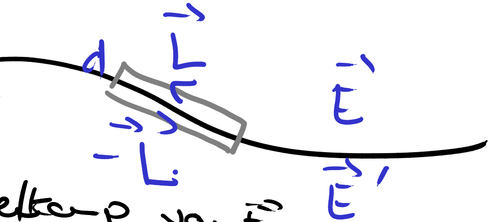
Feld $\vec{D}$: betrachte Gaußsches Kästchen

kein Ladung in Kästchen $\Rightarrow$ Fluss von $\vec{D}$ aus Kästchen $= 0$

$$0 = \oint dx^2\, \vec{n} \cdot \vec{D} \simeq A\, \vec{n} \cdot (\vec{D} - \vec{D}')$$

Normalkomp von $\vec{D}$ ist stetig. über Grenzfläche

Feld $\vec{E}$ Integral von E entlang Stokesscher Schleife = 0

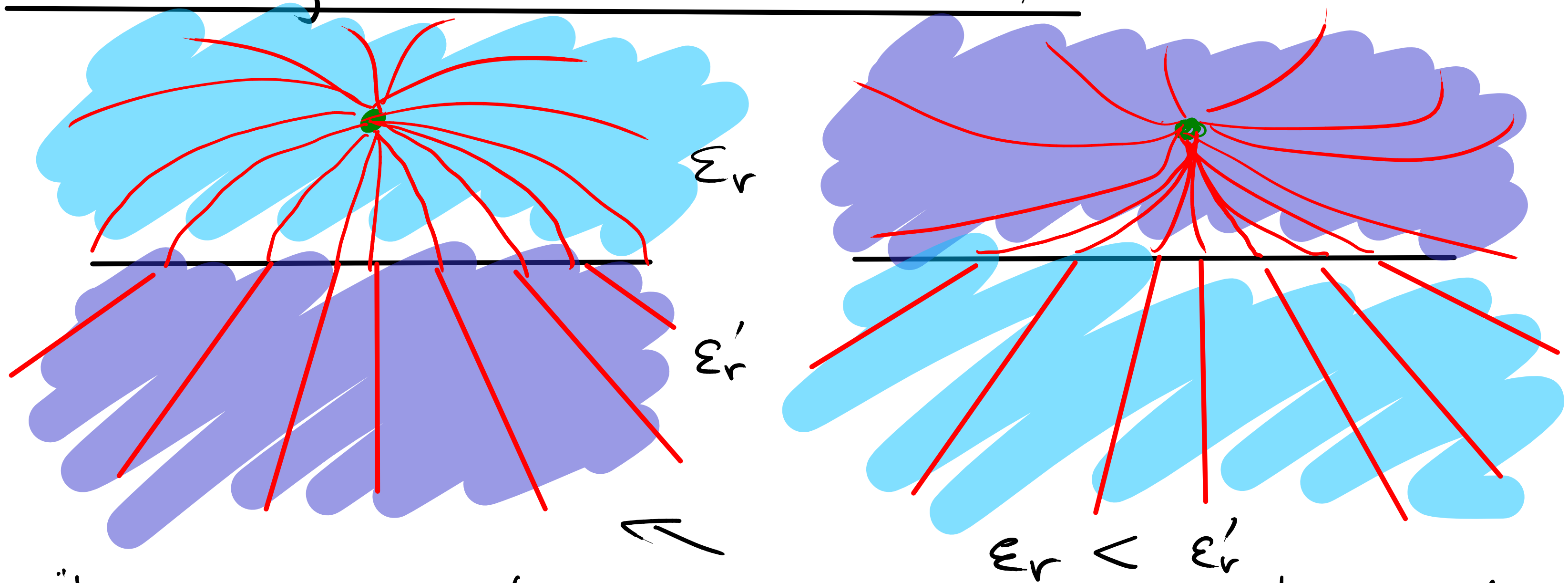


$$0 = \oint d\vec{x} \cdot \vec{E} \triangleq \vec{L} \cdot (\vec{E} - \vec{E}')$$

$\Rightarrow$ alle Parallelkomp von $\vec{E}$ sind stetig durch Grenzfl.

$\vec{L}$ beliebig entlang Fläche

Punktladung nahe Grenzfläche (eben)



Übergang von Feldlinien von dünneren zu dichteren Material (anderer Fall gegensätzl.)

- Feldlinien vor Übergang werden zur Oberfläche hin gebogen
- Am Übergang knicken sie ab
- nach Übergang sind sie Linear zur Ladung ausgerichtet
- Feldlinien im ersten Medium ergeben sich aus Komb. der eigentl. Lad. und einer Spiegelladung $q' \neq -q$

5.4 Magnetostatik in Materie

Verallgemeinerung ist analog zu el. St → el St + Materie

neue Grössen:

- Magnetisierung $\vec{M}$ (~ Dipoldichte $\vec{P}$)
- Das Magnetfeld $\vec{H}$ (~ diel. Versch. $\vec{D}$)
- $\vec{H}$ wird direkt von fr. Strömen $\vec{j} := \vec{j}_{frei}$ erzeugt

Beziehung zwischen Feldern $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu \vec{H}$ Materie

magn. Material konst $\mu = \mu_0 \mu_r$ $\mu_r = 1 + \chi_m$

Fälle von magn.

- Diamagnetismus $\chi_m < 0$ klein
- Paramagnetismus $\chi_m > 0$ $\chi_m = \chi_m(T)$
- Ferrom.
- Ferrimag.
- Antiferrom.

Feldgl. $\vec{\partial} \times \vec{H} = \vec{j}$ freie Strom $\vec{\partial} \cdot \vec{B} = 0$

$$\oint_{\partial A} d\vec{x} \cdot \vec{H} = I_A \qquad \oint_{\partial V} dx^2 \, \vec{n} \cdot \vec{B} = 0$$