Elektrodynamik

Vorlesungsfolien, Kapitel 4

ETH Zürich, 2024 FS

Prof. N. Beisert

Die aktuelle Version dieses Werks befindet sich unter:
http://people.phys.ethz.ch/~nbeisert/lectures/.

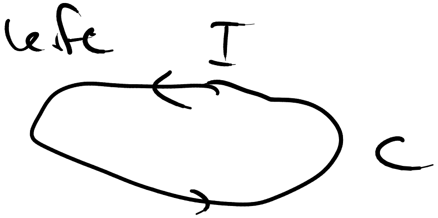
4. Magnetostatik

Magnetostatik analog zu Elektrostatik -> ED.
einige kompliziertere Elemente:

- kein Monopole (~ el. Ladungen)
- Strom als elementare Quelle des Feldes, Kontinuitätsgl.!
- Vektorieller Charakter (~ el. Skalarer Charakter ϕ)
- Vorzeichen, Richtungen relevant

4.1 Grundlagen

Ampère-Gesetz Elementare Quelle: Stromschleife



- geschlossene Kurve C im $\mathbb{R}^3$
- unendlich dünn
- gerichtet
- Strom I entlang der Kurve (konstant entlang C, erhalten)

Kraft $$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \mu_0 I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{x}_1 \times \left(d\vec{x}_2 \times (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)\right)}{4\pi \|x_1 - x_2\|^3}$$

Vorzeichen: • gleichgerichtete Ströme attraktiv
gegensätzliche " repulsiv!

definiert Einheit Ampère

μ_0: magnetische Feldkonst. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-10}\ \mathrm{kg\,m}/A^2 s^2$

(zusammen mit ε_0 gilt $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$, c Lichtgeschw.)

Biot-Savart-Gesetz

Stromschleife (C, I) erzeugt magn. Feld

magnetische Flussdichte, Induktion $\vec{B}(x)$ (nicht magn. Feldstärke)

$$\vec{B}(x) = \mu_0 I \oint_C \frac{d\vec{y} \times (\vec{x} - \vec{y})}{4\pi \|x - y\|^3}$$

erzeugt Kraft auf eine (weitere) Stromschleife (C, I)

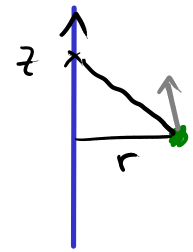
$$\vec{F} = I \cdot \oint_C d\vec{x} \times \vec{B}(\vec{x})$$

Beispiel: unendl. ausgedehnter Strom I entlang $+\vec{e}_z$

Zylindersymmetrie: betrachte $\vec{B}(x)$ bei $\vec{x} = (r, 0, 0)$ (o.B.d.A.)

$d\vec{y} = \vec{e}_z\, dz$ $\quad \vec{y} = (0, 0, z)$ $\quad \vec{x} = (r, 0, 0)$

$$\vec{B}(x) = \mu_0 I \int_{-\infty}^{+\infty} dz \, \frac{\vec{e}_z \times (r, 0, -z)}{4\pi \, (r^2 + z^2)^{3/2}}$$



$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{e}_\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r\, dz}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi$$

$\leftarrow \perp$ zu Strom

$\leftarrow \perp$ zum Abstand

Betrag ist $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$ Rechte-Hand-Regel

Daumen: Strom
Zeigef.: Abstand
Mittelf.: Kraft

Kraft auf zwei parallele Ströme $\sim$ Länge l

lin. Kraftdichte $\quad \dfrac{F}{l} = I_2 B = \dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}$

anziehend: $\uparrow\uparrow$

abstossend: $\uparrow\downarrow$

Kraft wirkt lokal auf Stromelemente

Lin. Kraftdichte $\quad d\vec{F}' = I \, d\vec{x}' \times \vec{B}'(x)$

Gesamtkraft durch Integration $\quad \vec{F} = \oint d\vec{F}'$

weitere Effekte: Drehmoment $\vec{M}$

$$\vec{M} = \oint_C \vec{x} \times d\vec{F}' = I \oint_C \vec{x} \times \left(d\vec{x}' \times \vec{B}'(x) \right)$$

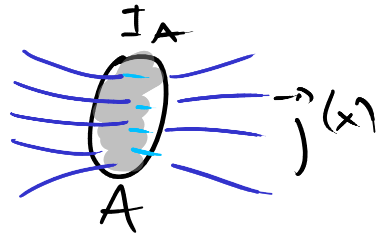
desweiteren Deformationskräfte.

4.2 Feldgleichungen

Stromdichte (analog Punktladung → Ladungsdichte)

Stromdichte $\vec{j}(x)$ vektorielles Feld: Strom I durch Fläche A

$$I_A = \int_A dr^2 \, \vec{n} \cdot \vec{j}$$



geschlossene Stromschleifen $\Rightarrow$ (statische) Kontinuitätsgl.

$$\vec{\partial} \cdot \vec{j} = 0 \qquad \vec{j} \text{ divergenz- bzw quellfrei.}$$

Satz von Gauß, Kont. Gl $\Rightarrow$ Strom durch Fläche A eigentlich nur vom Rand ∂A abhängt $\quad I_A = I_{A'}$ falls $\partial A = \partial A'$

Biot-Savart-Gesetz (Integralform)

$$\vec{B}(x) = \mu_0 \int dy^3 \, \frac{\vec{j}(y) \times (\vec{x} - \vec{y})}{4\pi \, \|x - y\|^3}$$

resultierende Kräfte

Kraftdichte : $\vec{f}(x) = \vec{j}(x) \times \vec{B}(x)$

Kraft : $\vec{F} = \int dx^3 \, \vec{j}(x) \times \vec{B}(x)$

Drehmoment : $\vec{M} = \int dx^3 \, \vec{x} \times (\vec{j}(x) \times \vec{B}(x))$

<u>Feldgleichungen</u> $\vec{B}(x)$ erfüllt (analog $\vec{E}$) 2 Diff.-Gl.

(zunächst $\vec{j} = 0$ beim Punkt x $B(\vec{x})$ ausgewertet wird)

$$\partial_i B_j = \mu_0 \sum_{k,l} \epsilon_{jkl} \int dy^3 \, \frac{\delta_{il} (\vec{x}-\vec{y})^2 - 3(x-y)_i (x-y)_l}{4\pi \|x-y\|^5} \, j_k(y)$$

Spur : $\vec{\partial} \cdot \vec{B} = 0$ $\quad$ $\vec{B}$ ist divergenzfrei!

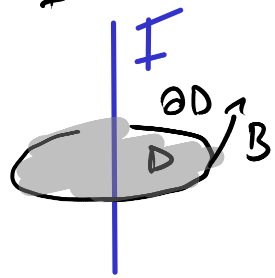
weiterhin $(\vec\partial\times\vec B)_m = -\mu_0 \sum_k \int dy^3\, j_k(y)\, \frac{\delta_{mk}(\vec x-\vec y)^2 - 3(x-y)_m(x-y)_k}{4\pi\|x-y\|^5}$

$$= \mu_0 \int dy^3\, \vec j(y)\cdot\vec\partial_y\, \frac{(x-y)_m}{4\pi\|x-y\|^3} = -\mu_0 \int dy^3\, \underbrace{(\vec\partial\cdot\vec j)}_{=0 \text{ Kont. Gl}}\, \frac{(x-y)_m}{4\pi\|x-y\|^3} = 0$$

$\vec B$ ist rotationsfrei ($j=0$ an diesem Ort)

$\vec\partial\cdot\vec B = 0 \qquad \vec\partial\times\vec B = 0 \qquad$ falls $\vec j = 0$

Was ist bei $\vec j \neq 0$? Beispiel ∞ ausgedeh. lin. Strom I



Berechne:

$$\int_D dx^2\, \vec n\cdot\overbrace{(\vec\partial\times\vec B)}^{\text{rot }\vec B} \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial D} d\vec x\cdot\vec B = \mu_0 I$$

weil $\|B\| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

Fluss von $\vec\partial\times\vec B$ durch D bzw ∂D ist $\neq 0$

$\vec\partial\times\vec B \sim$ Distribution lokalisiert am Strom auf z-Achse.

kart Form: $\vec{\partial} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$. Ampère Durchflutungsgesetz

Andererseits gilt exakt $\vec{\partial} \cdot \vec{B} = 0$ divergenzfrei!

$$\vec{\partial} \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_V dx^3 \, \vec{\partial} \cdot \vec{B} \overset{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial V} dx^2 \, \vec{n} \cdot \vec{B} = 0$$

distributionelle Identität

$$\partial_i \frac{x_j}{\|x\|^3} = \frac{\delta_{ij} \vec{x}^2 - 3 x_i x_j}{\|x\|^5} + \frac{4\pi}{3} \delta_{ij} \delta^3(x)$$

$$\partial_i B_j = \ldots + \frac{1}{3} \mu_0 \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} j_k(x)$$

$$\ldots \Rightarrow \vec{\partial} \cdot \vec{B} = 0 \;\checkmark \qquad \vec{\partial} \times \vec{B} = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{3} \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \vec{j}$$

4.3 Vektorpotential

Ausgangspunkt $\vec{\partial} \cdot \vec{B} = 0$

wir können solche $\vec{B}$ immer schreiben als

$$\vec{B} = \vec{\partial} \times \vec{A} \leftarrow \text{Vektorpotential}$$

Biot-Savart $$\vec{B}(x) = \mu_0 \int dy^3 \, \vec{\partial}_{x} \times \frac{\vec{j}(y)}{4\pi \|x-y\|}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{A}(x) = \mu_0 \int dy^3 \, \frac{\vec{j}(y)}{4\pi \|x-y\|}$$

Eichtransformationen

Potential ist nicht eindeutig bestimmt, denn $\overset{\text{rot}}{\vec{\partial}} \times \overset{\text{grad.}}{\vec{\partial}} \ldots = 0$

Eichtransf. $$\vec{A}'(x) = \vec{A}(x) + \vec{\partial} \Lambda(x)$$ $\Lambda(x)$ ist bel. skalares Feld

$$\Rightarrow \quad \vec{B}'(x) = \vec{B}(x) + \underbrace{\vec{\partial} \times \vec{\partial}}_{=0} \Lambda = \vec{B}(x)$$ phys. äquivalent!

Zwei Vektorpotentiale sind äquiv. falls eine Eichtrafo. existiert

Zur konkreten Festlegung eines Potentials $\vec{A}$ muss man i.d.R Eichfixierung / Eichung vornehmen.

- Freiheitsgrade in A die durch Eichtransf. geändert werden sind physikalisch irrelevant
- Eichtransformationen sind nicht nur Symmetrien sondern vielmehr beschreiben sie Uneindeutigkeit der Formulierung

Eichfixierung 2 typische Möglichkeiten:

Coulomb-Eichung $\vec{\partial} \cdot \vec{A} = 0$

axiale-Eichung $\vec{n} \cdot \vec{A} = 0$ für best. Vektor $\vec{n}$

Beispiel obiger Ausdruck $\vec{\partial} \cdot \vec{A} = \ldots = \int dy^3 \ldots (\vec{\partial} \cdot \vec{j}) = 0$

Poisson-Gleichung

$\vec{B} = \vec{\partial} \times \vec{A}$ erfüllt automatisch $\vec{\partial} \cdot \vec{B} = 0$

zweite Feldgleichung $\vec{\partial} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

$$\mu \vec{j} = \vec{\partial} \times (\vec{\partial} \times A) = -\Delta \vec{A} + \vec{\partial}(\vec{\partial} \cdot \vec{A})$$

Für $\vec{\partial} \cdot \vec{A} = 0$ (Coulomb) fällt zweiter Term weg.

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

3 Komp. des Vektors geben 3 unabh. Poisson-Gl.

$\rightsquigarrow$ Randwertproblem analog

<u>Feldenergie</u>

wir möchten eine Stromverteilung $\vec{j}$ aus dem Nichts (von unendlich) erzeugen, welche Energie ist nötig?

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int dx^3 dy^3 \mu_0 \frac{\vec{j}(x) \cdot \vec{j}(y)}{4\pi \|x-y\|} = \frac{1}{2} \int dx^3 \vec{A}(x) \cdot \vec{j}(x)$$

Poisson-Gl.

$$\Delta W = \frac{1}{2\mu_0} \int dx^3 \left(-\vec{A} \Delta \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\partial}\, \vec{\partial} \cdot \vec{A} \right)$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} \int dx^3 \sum_{j,k} (\partial_j A_k)(\partial_j A_k - \partial_k A_j)$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} \int dx^3 (\vec{\partial} \times \vec{A}) \cdot (\vec{\partial} \times \vec{A}) = \frac{1}{2\mu_0} \int dx^3\, \vec{B}^2 \geq 0$$

Skalares Potential

Für den stromfreien Raum gilt $\vec{\partial}\cdot\vec{B}=0 \quad \vec{\partial}\times\vec{B}=0$

In einem solchen Bereich kann man auch Ansatz machen

$$\vec{B}=\vec{\partial}\,\phi_{mag.}$$

gilt solange Gebiet lokal, einfach zush., quellfrei ist

(Gebiet darf nicht um Ström herum definiert sein).

4.4 Magnetische Moment

Kleine Stromverteilungen vs Magnetfeld verhalten.

$\rightsquigarrow$ Stabmagnete, Dipolen (führende Beiträge in Multipolentwicklung)

Stromverteilung um Ursprung V, Erzeugung von B weit entfernt davon

$$\vec{A}(x) = \mu_0 \int_V dy^3 \frac{\vec{j}(y)}{4\pi\|x-y\|} = \mu_0 \int dy^3\, \vec{j}(y) \left(\frac{1}{4\pi\|x\|} + \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{4\pi\|x\|^3} + \dots \right)$$

Stromdichte auf ∂V verschwindet

Gesamtstrom in V verschwindet

Gesamtstrom in V

$$0 = \oint_{\partial V} dx^2\, \vec{n}\cdot\vec{j}\, x_k \overset{\text{Gauß}}{=} \int_V dx^3\, \vec{\partial}\cdot(\vec{j}\, x_k)$$

$$= \int_V dx^3 \left(x_k \underbrace{\vec{\partial}\cdot\vec{j}}_{=0} + j_k \right) = \int_V dx^3\, j_k$$

$\Rightarrow$ Monopol Term von $\vec{A}(x)$ verschwindet

$$\vec{A}(x) = \mu_0 \frac{\vec{m} \times \vec{x}}{4\pi \|x\|^3} + \dots$$

$\vec{m}$ ist magnetische Dipolmoment

$$\vec{m} := \frac{1}{2} \int dx^3 \; \vec{x} \times \vec{j}(x)$$

<u>Kraft und Drehmoment</u> auf kleine Stromverteilung

Entwickle $\vec{B}(x)$ um $x=0$

$$\vec{B}(x) = \vec{B}(0) + \left((\vec{x} \cdot \vec{\partial}) \vec{B} \right)^{(0)} + \dots$$

Eingesetzt in $\vec{F}$

$$\vec{F} = \int dx^3 \vec{j} \times \vec{B} = \underbrace{\int dx^3 \left(\vec{j} \times \vec{B}(0)\right.}_{=0} + \vec{j} \times \left((\vec{x} \cdot \vec{\partial}) \vec{B} \right)^{(0)} + \dots \Big)$$

$$= \vec{\partial} (\vec{m} \cdot \vec{B}) + \dots$$

direkte Konsequenz: keine Kraft im hom. Magnetfeld

Drehmoment

$$\vec{M} = \int dx^3 \, \vec{x} \times (\vec{j} \times \vec{B}) = \ldots = \vec{m} \times \vec{B}$$

Drehmoment wirkt so dass $\vec{m}$ entlang $\vec{B}$ ausgerichtet wird

magnetische pot. Energie

$$W = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$ $\Rightarrow$ Minima/Maxima für (anti) parallele Ausrichtung von $\vec{m}$ in $\vec{B}$

Durch Gradient bzw. Rotation erhält man Ausdrücke für Kraft bzw. Drehmoment