

Elektrodynamik

Vorlesungsfolien, Kapitel 3

ETH Zürich, 2024 FS

PROF. N. BEISERT

© 2014–2024 Niklas Beisert.

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Dieses Werk ist lizenziert unter der Creative Commons Lizenz „Namensnennung – Nicht kommerziell – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International“ (CC BY-NC-SA 4.0).



Die Lizenz kann eingesehen werden unter:
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>.

Die aktuelle Version dieses Werks befindet sich unter:
<http://people.phys.ethz.ch/~nbeisert/lectures/>.

3 Elektrostatik in Kugelkoordinaten

Zwei Lösungsansätze für LW-Probleme sind Separation der Variablen und Entwicklung nach geeigneten Eigenfunktionen.

Hier Rotationsymmetrie von gew. Kont. \rightarrow Kugelflächenfunktionen

3.1 Separation der Variablen

Laplace Gleichung in kart. Koord. $\vec{x} = (x, y, z)$

$$\Delta \phi \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \right) \phi = 0$$

Sep. d. Var Ansatz so dass ϕ als Produkt von Fkt. von Teilmenge der Koord. geschrieben wird.

B: wenn $\phi(\vec{x}) = \phi_{xy}(x, y) \phi_z(z)$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{\phi_{xy}} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right) \phi_{xy}}_{2D (x, y) \stackrel{!}{=} \text{const!}} + \underbrace{\frac{1}{\phi_z} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \phi_z}_{1D (z) \stackrel{!}{=} -\text{const}} = 0$$

Eigenfunktionen

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \phi_{xy} = \lambda \phi_{xy}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \phi_z = -\lambda \phi_z$$

Problem in zwei einfachere Teilprobleme aufgeteilt
Kopplung ist über Eigenwert von lin. ^{Diff.} Op. λ

Besonders geeignet für symmetrische Konfigurationen.

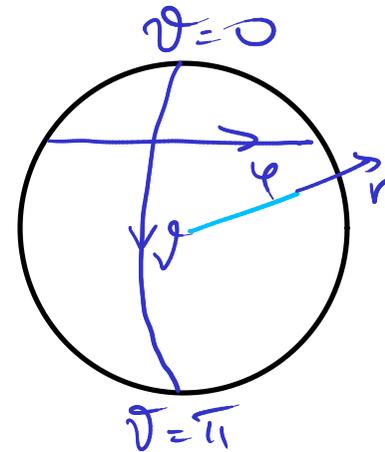
oder auch allgemein wenn man unendliche Linearkomb.
aller Eigenfunktionen in Betracht zieht.

3.2 Kugelkoordinaten

Verschiedene Koordinatensysteme:

- kartesische Koordinaten
- Zylinderkoordinaten
- Kugelkoordinaten

radiale kt. $r \geq 0$
 Polarwink. $0 \leq \vartheta \leq \pi$
 Azimutw. $\varphi: 2\pi$ -per.



$$r = \|x\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vartheta = \arccos \frac{z}{r}$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x} + \pi \cdot \Theta(-x) \operatorname{sign} y$$

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \vartheta$$

Jacobi-Matrix

Zeilen $\rightarrow \frac{\partial}{\partial (r, \vartheta, \varphi)}$

Spalten $\rightarrow \frac{\partial}{\partial (x, y, z)}$

$$= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi & r \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \\ \cos \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi & -\sin \vartheta \\ -\sin \varphi / \sin \vartheta & \cos \varphi / \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2$$

Volumenelement $dx^3 \sim$ Integral in 3D

$$\int dx^3 = \int_0^\infty dr r^2 \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi = \int_0^\infty dr r^2 \int_{S^2} d^2\Omega$$

Die Gesamtfäche von S^2 ist $\int d^2\Omega = 4\pi = 2\pi \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta$

3.3 Kugelflächenfunktionen

Basis von Funktionen so dass Laplace-Gl. in Kugelkoordin. separiert

Separation $\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + \frac{2}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2} \vec{L}^2$

$$\vec{L}^2 := - \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta}\right)^2 - \cot\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{1}{\sin^2\vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^2$$

Diracysquadrat von \vec{L} , z-komp. $L_z = -i \frac{\partial}{\partial \varphi} : [\vec{L}^2, L_z] = 0$

Eigenfunktionen von \vec{L}^2 (und L_z) \rightarrow Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell m}$

$$\vec{L}^2 f(\vartheta, \varphi) = \lambda f(\vartheta, \varphi)$$

Sep. d. Var: $f(\vartheta, \varphi) = g(\vartheta) \cdot h(\varphi)$ ↙ muss unabh. von φ sein!

$$-\frac{g''(\vartheta)}{g(\vartheta)} - \cot \vartheta \frac{g'(\vartheta)}{g(\vartheta)} - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{h''(\varphi)}{h(\varphi)} = \lambda$$

Lösung für h : $h_m(\varphi) = e^{im\varphi} \quad \frac{h''(\varphi)}{h(\varphi)} = -m^2$

zusätzlich (Randbed.) h muss 2π -per.!
 $m \in \mathbb{Z}$

$h(\varphi)$ ist Eigenfunktion von L_z mit E-W m

Beachte h ist komplexe Fkt. Φ in E.S. ist reell.

$$\operatorname{Re} e^{im\varphi} = \cos(m\varphi) \quad \operatorname{Im} e^{im\varphi} = \sin(m\varphi) \quad (m \neq 0)$$

$$-\frac{y''(\vartheta)}{y(\vartheta)} - \cot \vartheta \frac{y'(\vartheta)}{y(\vartheta)} + \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} = \lambda.$$

Variablensubst. $u = \cos \vartheta \quad -1 \leq u \leq 1$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} = \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \frac{\partial}{\partial u} = -\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial u} = -\sqrt{1-u^2} \frac{\partial}{\partial u} \quad P(u) = y(\vartheta)$$

$$\text{Dgl: } \left((u^2-1) \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^2 + 2u \frac{\partial}{\partial u} - \frac{m^2}{u^2-1} - \lambda \right) P(u) = 0$$

Verallg. Legendre-Gl. \rightarrow assoz. Legendre-Fkt.

Legendre-Polynome als Lsg. der Legendre-Gl ($m=0$)

$$\left((u^2-1) \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^2 + 2u \frac{\partial}{\partial u} - \lambda \right) P(u) = 0$$

Probleme bei $u = \pm 1$ wegen Vorfaktor (u^2-1) vor $\left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^2$

Vermeidung der Divergenz von $P(u)$ bei $u = \pm 1 \Rightarrow$ Polynome

Legendre-Polynome $P_l(u)$ lösen L.G. nur für best EW λ ,

Eigenschaft der L.P

$$\int_{-1}^{+1} du u^k P_l(u) = 0 \quad \text{für alle } 0 \leq k < l$$

bis auf Vorfaktor.

bestimmt die $P_l(u)$ als Pol. l -ten Grades rekursiv!

von $(l+1)$ Koeffizienten in P_l sind l eingeschränkt durch Bed.

Bew dass $P_\ell(u)$ die Legendre Gleichung lösen. λ ?

$$\mathcal{L} P_\ell(u) = \lambda P_\ell(u) \quad \leftarrow \text{Wirkt auf alles rechte}$$

$$\mathcal{L} := (u^2-1) \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^2 + 2u \frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} (u^2-1) \frac{\partial}{\partial u}$$

• $\mathcal{L} P_\ell$ ist wieder Polynom ℓ -ten Grades mit selbiger Eigenschaft.

• betrachte zunächst \mathcal{L} auf führendes Glied u^ℓ

$$\mathcal{L} u^\ell = \ell(\ell+1) u^\ell + O(u^{\ell-1}) \Rightarrow \lambda = \ell(\ell+1)$$

• Erfüllt $\mathcal{L} P_\ell(u)$ die Eigenschaft?

$$\int_{-1}^{+1} du u^k \mathcal{L} P_\ell(u) = \int_{-1}^{+1} du u^k \frac{\partial}{\partial u} (u^2-1) \frac{\partial}{\partial u} P_\ell(u)$$

$$\stackrel{\text{PT}}{=} \underbrace{u^k (u^2-1) P_\ell'(u)}_{=0} \Big|_{u=-1}^{u=+1} - \int_{-1}^{+1} du k u^{k-1} (u^2-1) \frac{\partial}{\partial u} P_\ell(u)$$

$$DI = \underbrace{-k u^{k-1} (u^2-1) P_l(u)}_{=0} \Big|_{u=-1}^{u=+1} + \int_{-1}^{+1} du \underbrace{k \left(\frac{d}{du} u^{k-1} (u^2-1) \right)}_{\text{Grad } k < l} P_l(u) \Big|_{u=-1}^{u=+1} = 0$$

$\Rightarrow P_l(u)$ lösen Legendre-Gl. mit Eigenwert $\lambda = l(l+1)$

Legendre-Polynome werden Rodrigues-Formel erzeugt:

$$P_l(u) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{du} \right)^l (u^2-1)^l$$

Einfach: $\int du u^k P_l(u) = 0$ gilt mittels P.I.

Die $P_l(u)$ erfüllen folgende Orthogonalitätseigenschaft

$$\int_{-1}^{+1} du P_k(u) P_l(u) = 0 \quad \text{für } k \neq l$$

Normierung $\int_{-1}^{+1} du P_l(u)^2 = \frac{2}{2l+1}$

Für verallg. Legendre-Gl. $m \neq 0$ $|m| \leq l$ erhält man als zulässige Lsg:

$$P_l^m(u) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-u^2)^{m/2} \left(\frac{d}{du}\right)^{l+m} (u^2-1)^l$$

Orthogonalität / Normierung

$$\int_{-1}^{+1} du P_l^m(u) P_{l'}^m(u) = \delta_{l,l'} \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}$$

Kugel flächen l l

$Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$

$$Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{(2l+1) \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

Eigenwerte:

$$L_z^2 Y_{l,m} = m^2 Y_{l,m} - \sin^2(m\varphi)$$

$$L^2 Y_{l,m} = l(l+1) Y_{l,m}$$

$$L_z Y_{l,m} = m Y_{l,m} - e^{im\varphi}$$

$$l \in \mathbb{Z}_0^+ \quad m \in \mathbb{Z} \quad \{|m| \leq l \quad m \in \{-l, -l+1, \dots, l-1, l\}\}$$

$$Y_{0,0} = 1 \quad Y_{1,0} = \sqrt{3} \cos \vartheta = \sqrt{3} \frac{z}{r}$$

$$Y_{1,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{2}} \sin \vartheta e^{\pm i\varphi} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{x \pm iy}{r}, \dots$$

3.4 Orthogonalität und Vollständigkeit

$Y_{\ell m}$ erfüllen die O. Eigenschaft:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\text{d}\Omega} Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) Y_{\ell' m'}^*(\vartheta, \varphi) = \delta_{\ell, \ell'} \delta_{m, m'}$$

Kugelflächenfkt bilden eine vollst. Basis von $L^2(S^2)$

Quadratintegrable Fkt auf S^2

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) Y_{\ell' m'}^*(\vartheta', \varphi') = \frac{4\pi}{\sin \vartheta} \delta(\vartheta - \vartheta') \delta(\varphi - \varphi')$$

$$\Rightarrow F(\vartheta, \varphi) = \sum_{\ell, m} Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) f_{\ell, m} \quad \left. \begin{array}{l} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right\} \text{bijektive Abb.}$$

$$f_{\ell, m} = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{d}\Omega} Y_{\ell, m}^*(\vartheta, \varphi) F(\vartheta, \varphi)$$

→ 2D Analogon der Fourier-Transformen für per. Fkt.

3.5 Multipolentwicklung

Ladungsverteilung in der Nähe des Ursprungs $x=0$

$$\rho(x) = 0 \quad \|x\| = r \geq R$$

Bei grossen $r \gg R$

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + O(1/r^2)$$

Kugelkoordinaten

Betrachte Potential bei $r > R \Rightarrow \rho(x) = 0 \Rightarrow$ Laplace-Gl.

$$0 = \Delta \Phi = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 \Phi + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \Phi - \frac{1}{r^2} L^2 \Phi.$$

Entwicklung von Φ in $Y_{\ell,m}$: Koeffizienten als Fkt von r

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{\ell, m} \Phi_{\ell, m}(r) Y_{\ell, m}(\vartheta, \varphi)$$

Basis

Einsetzen: $\sum_{\ell, m} Y_{\ell, m} \left(\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \ell(\ell+1)}_{=0} \right) \Phi_{\ell, m}(r) = 0.$

$$\Rightarrow \left(\left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} l(l+1) \right) \Phi_{l,m}(r) = 0$$

homogen in r (d.h. $\sim 1/r^2$) Ansatz $\Phi_{l,m} \sim r^\alpha$

$$0 = r^{\alpha-2} (\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - l(l+1)) = r^{\alpha-2} (\alpha(\alpha+1) - l(l+1))$$

2 Lösungen: $\alpha = l$ $\alpha = -l-1$ $l \geq 0$

$\Phi \rightarrow \infty$ für $r \rightarrow \infty$ $\Phi \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$

Koeffizient von $r^\alpha \rightarrow$ Multipolmomente

allg. Lsg.

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l,m} \frac{Q_{l,m}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(2l+1)r^{l+1}} Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$$

$Q_{0,0} = Q$ $Q_{l,m}$ $l=1, 0, \pm 1$ sind 3 Dipolmomente $\vec{P} \dots$

folgen aus
Ladungsvert. ρ

$$Q_{l,m} = \int d^3\Omega dr r^{2+l} Y_{l,m}^*(\vartheta, \varphi) \rho(r, \vartheta, \varphi)$$

Formel für $Q_{l,m}$ folgt aus Entwicklung von $\frac{1}{\|x-x'\|}$ für $\|x\| > \|x'\|$ und der Formel für Φ in freien asympt. Raum.

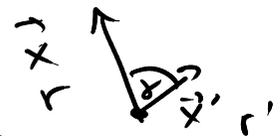
$$\frac{1}{\|x-x'\|} = \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{l+1}} Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) Y_{l,m}^*(\vartheta', \varphi')$$

Zeige diese Formel mittels Additionstheorie von $Y_{l,m}$ (Winkel zwischen x, x' von Ursprung)

$$\frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) Y_{l,m}^*(\vartheta', \varphi') = P_l(\cos \gamma)$$

reduziert Ausdruck zu

$$\frac{1}{\|x-x'\|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \gamma) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \vartheta)$$



Betrachte x' auf pos. z-Achse liegt

Winkel von x zu Nordpol.

ϑ -Abh: Bei Entwicklung als Lsg. der Laplace-Gl bei $x'=0$ gilt dass nur $n=0$ beibehält

r -Abh folgt aus $\vartheta=0$, verwandle $P_l(\cos \vartheta=1) = 1$ $\frac{1}{\|x-x'\|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} = \frac{1}{r-r'}$.

Kartesische Koordinaten

Multipolentwicklung in kartesischen Koord. für niedrigste Q.

Def. einer allg. Ladungsverd. $\Phi(x) = \int d^3y \frac{\rho(y)}{4\pi\epsilon_0 \|x-y\|}$

Entwickle $1/\|x-y\|$ für $\|x\| \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{\|x-y\|} = \frac{1}{\|x\|} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|x\|^3} + \frac{3(\vec{x} \cdot \vec{y})^2 - \vec{x}^2 \vec{y}^2}{2\|x\|^5} + \dots$$

Dann gilt also

$$\Phi(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \|x\|} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 \|x\|^3} + \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^3 \frac{x_i x_j R_{ij}}{4\pi\epsilon_0 \|x\|^5} + \dots$$

Multipolmom.:

$$Q = \int d^3x \rho(x) \quad \vec{p} = \int d^3x \rho(x) \vec{x} \sim Q_{1,m}$$

$$R_{ij} = \int d^3x \rho(x) (3x_i x_j - \delta_{ij} x^2)$$

Quadrupolter sind
symmetrisch, spurlos

R_{ij} hat 5 unabh. Komponenten $\sim Q_{2,m}$ $m = -2, -1, 0, +1, +2$

3.6 - Darstellungen der Rotationsgruppe

$SO(3)$ Gruppe der Rot in 3D.

kugelflächenförmig \sim Darstellung von $SO(3)$.

Rotationsgruppe $SO(3) \sim$ reellen, orthogonale 3×3 Mat. R mit $\det = 1$

rotieren Vektore $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ $\vec{x}' = R\vec{x}$ $x'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} x_j$

Orthogonalität: $R^T = R^{-1}$, keine Spiegelung: $\det R = +1$

Multiplikation erhält Eigenschaften

$$(R_1 R_2)^T = R_2^T R_1^T = R_2^{-1} R_1^{-1} = (R_1 R_2)^{-1}$$

$$\det(R_1 R_2) = \det R_1 \cdot \det R_2 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$1 \in SO(3)$$

R^{-1} Inverse von R .

Darstellungen Abb D von $SO(3)$ in Abb eines Vektorraums V
 Matrixmult. of V quadr. Matrizen

mit Eigenschaft:

$$D(R_1) \cdot D(R_2) = D(R_1 \cdot R_2)$$

← Gruppe mult. $SO(3)$

Für Matrixgruppen gibt es immer die def. Darstellung $D_{def} = id$

Für $SO(3)$: $D_{def} =: D_1$ wirkt auf $V = \mathbb{R}^3$

Elemente der Darstellungstheorie:

• Zwei Darst D, D' sind äquiv. wenn Abb T gibt so dass

$$D'(R) = T D(R) T^{-1} \quad \begin{array}{l} \text{Ähnlichkeitstranf. von } R \\ \text{für alle } R \in SO(3) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{unabh.} \\ \text{von } R \end{array}$$

• Irreduzibilität: für V gibt es keine Unterräume so dass

D auf diesen als Darstellung wirkt

• Triv. Darst D bildet jedes R auf Einheitsmatrix ab.

• Dimension $\dim D := \dim V$

- direkte Summe zweier Darstellungen D_1, D_2 auf V_1, V_2

$$D := D_1 \oplus D_2 \quad V := V_1 \oplus V_2 = V_1 \times V_2$$

wenn e_1^k, e_2^k Basisvektoren von V_1, V_2 ,

Vereinigung $\{e_1^k, e_2^k\}$ Basis von $V = V_1 \oplus V_2$

$$\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$$

als Darstellung definiert durch

$$D(R) = \begin{pmatrix} D_1(R) & 0 \\ 0 & D_2(R) \end{pmatrix}$$

$$D(R) e_1^k = D_1(R) e_1^k \quad D(R) e_2^k = D_2(R) e_2^k$$

- Tensorprodukt D_1, D_2 auf V_1, V_2

$$D := D_1 \otimes D_2 \quad V := V_1 \otimes V_2$$

$$\dim V = \dim V_1 \cdot \dim V_2$$

V wird aufgespannt durch $e_1^k \otimes e_2^l$

$$D(R)(e_1^k \otimes e_2^l) := D_1(R) e_1^k \otimes D_2(R) e_2^l$$

Darstellung von $SO(3)$ Ausgangspunkt $D_{\text{def}} = D_1$, $D_{\text{triv}} = D_0$

$\dim D_1 = 3$ $V_1 = \mathbb{R}^3$ Bilde Tensorprod $D := D_1 \otimes D_1$

$V = V_1 \otimes V_1$ $\dim D = \dim V = 3 \cdot 3 = 9$

D ist reduzibel.

Führe ein Permutatio-Paar beide Vektorräume V_1, V_1'

$P(v \otimes w) = w \otimes v$, P kommutiert mit D

$$PD(v \otimes w) = P(D_1 v \otimes D_1 w) = D_1 w \otimes D_1 v$$

$$= D(w \otimes v) = DP(v \otimes w). \quad \left(\text{gilt für Vektoren } v \otimes w \text{ mittels Linearität für alle } v \in V \right)$$

$$\left[P\left(\sum_{ij} c_{ij} e_i \otimes e_j\right) = \sum_{ij} c_{ij} P(e_i \otimes e_j) = \sum_{ij} c_{ij} e_j \otimes e_i \right]$$

2 Projektoren $\Pi_{\pm} := \frac{1}{2}(I \pm P)$ I Identität, P Permu.

Π_{\pm} kommutieren mit D .

orthogonal zueinander

Π_{\pm} sind Projektoren, d.h. $(\Pi_{\pm})^2 = \Pi_{\pm}$, $\Pi_{+}\Pi_{-} = 0$

Definieren Unterräume V_{\pm} von V als $V_{\pm} := \text{Im } \Pi_{\pm}$

$$V = V_{+} \oplus V_{-} \quad (\Pi_{+} + \Pi_{-} = I)$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{dim}=6 \\ \uparrow \\ \text{dim}=3 \end{array}$$

Da Π_{\pm} mit D kommutiert

$$D = D_{+} \oplus D_{-}$$

$$D_{\pm} := D \Pi_{\pm}$$

D_{\pm} erfüllt Darstellungseigenschaft

$$D(R_1) \Pi_{\pm} D(R_2) \Pi_{\pm} = D(R_1) D(R_2) \Pi_{\pm} \Pi_{\pm} = D(R_1 R_2) \Pi_{\pm}$$

$$\text{dim } D_{+} = 6 \quad \text{dim } D_{-} = 3 \quad D_{-} \sim D_1 \vec{v} \times \vec{w}$$

Darstellung D_{+} zerfällt weiter. Anhaltspunkt $\vec{v} \cdot \vec{w}$

$$\leadsto D_{+} = D_2 \oplus D_0 \quad \leftarrow \text{Skalarprodukt} \sim \text{Spur}$$

$$\uparrow \text{dim } D_2 = 5 \sim \text{sym. spurlose Tensoren}$$

$$\Rightarrow 3 \cdot 3 = 3 + 1 + 5$$

$$\Rightarrow D_1 \otimes D_1 = D_1 \oplus D_0 \oplus D_2$$

weiter $D_1 \otimes D_2 = D_2 \oplus D_1 \oplus D_3 \dots$

$$D_l \otimes D_e = D_e \oplus D_{e-1} \oplus D_{e+1} \quad \dim D_e = 2e+1$$

$\dim D_e$ entspricht Anzahl der unabh. Kugelflächenfkt $Y_{e,m}$
 $m = -e, \dots, e$

Darstellung D_e die Kugelflächenfkt $Y_{e,m}$ mit festen l ineinander transformiert

$$R: (\vartheta, \varphi) \rightarrow (\vartheta', \varphi')$$

$$Y_{e,m}(\vartheta', \varphi') = \sum_{m'=-e}^e D_e(R)_{m,m'} Y_{e,m'}(\vartheta, \varphi)$$

allg. $Y_{e,m}$ als Basis $L^2(S^2)$ Darst darauf $\mathcal{D} = \bigoplus_{e=0}^{\infty} D_e$ alle Punkte vom $SO(3)$.