

# Elektrodynamik

Vorlesungsfolien, Kapitel 2

ETH Zürich, 2024 FS

PROF. N. BEISERT

© 2014–2024 Niklas Beisert.

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Dieses Werk ist lizenziert unter der Creative Commons Lizenz „Namensnennung – Nicht kommerziell – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International“ (CC BY-NC-SA 4.0).



Die Lizenz kann eingesehen werden unter:  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>.

Die aktuelle Version dieses Werks befindet sich unter:  
<http://people.phys.ethz.ch/~nbeisert/lectures/>.

## 2 Randwertprobleme der Elektrostatik

Eindeutigkeit, Lösungsmethoden des Grundproblems der. El. St.

Grundproblem  $\rightarrow$  für geg. Ladungsverteilung u. el. Randbed  $\rightarrow$  el. Felder bestimmen.

### 2.1 Formulierung und Eindeutigkeit

Formulierung:  $E$  über  $\phi$  durch  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$

Potential über Poisson-Gl. durch  $\rho$  bestimmt  $\Delta\phi(x) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(x)$

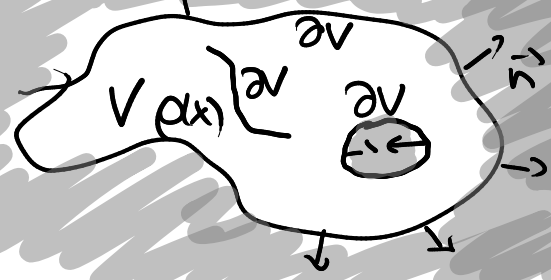
Normalerweise Lsg  $\phi(x) = \int d^3y \frac{\rho(y)}{4\pi\epsilon_0 \|x-y\|}$  (asymptotisch Randbeg  $\sim 1/r$ )

ohne solche Randbed ist Lsg nicht eindeutig

Welche Randbed führen zu eindeutigen Lösungen

Randwertproblem Poisson-Gl. auf kompaktem Gebiet  $V \subset \mathbb{R}^3$

mit Rand  $\partial V$ , Ladungsverd.  $\rho(x)$  für  $x \in V$   
 gewisse Randbed für  $\phi$  bei  $\partial V$



$$\Delta \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(x) \quad \text{für } x \in V$$

$\vec{n}$  Normalvektor auf  $\partial V$  nach außen.

Eindeutigkeit: betrachte zwei hyp. Lsg  $\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2$  sowie  $\bar{\psi} := \bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2$

$\psi$  erfüllt hom. Poisson-Gl.  $\Delta \bar{\psi} = 0$  (Laplace Gl.)

1. Greensche Identität für zwei skalare Fkt  $\phi, \psi$

$$\int_V dx^3 (\phi \Delta \psi + \vec{\partial} \phi \cdot \vec{\partial} \psi) = \int_V dx^3 \vec{\partial} \cdot (\phi \vec{\partial} \psi) = \int_{\partial V} dx^2 \vec{n} \cdot (\phi \vec{\partial} \psi)$$

$$\phi = \psi = \bar{\psi}$$

$$\Delta \bar{\psi} = 0$$

$$\int_{\partial V} dx^2 \vec{n} \cdot (\bar{\psi} \vec{\partial} \bar{\psi}) = \int_V dx^3 (\vec{\partial} \bar{\psi})^2 \geq 0$$

Falls linke Seite = 0  $\Rightarrow (\vec{\partial} \bar{\psi})^2 = 0$  für alle  $x \Rightarrow \vec{\partial} \bar{\psi} = 0$  für alle  $x$

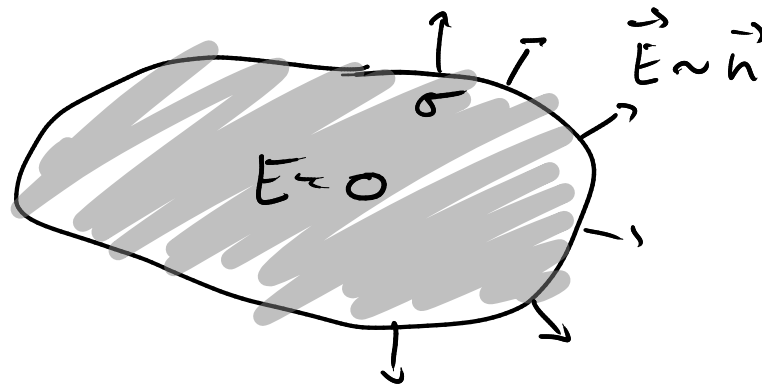
Mögliche Randbed zu Eindeutigkeit

◦ Dirichlet-Randbed: Das Potential  $\Phi$  wird auf Rand  $\partial V$  vorgegeben  $\Phi(x) = \omega(x)$  für  $x \in \partial V$   $\omega$  ist fkt auf  $\partial V$   
 $\Rightarrow \Phi(x) = 0$  auf Rand  $\Leftrightarrow$  links = 0

◦ Neuman-Randbed: Die Normalableitung von  $\Phi$  (d.h.  $E_{\perp} = \vec{n} \cdot \vec{E} = -\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \Phi$ ) vorgegeben.

$$E_{\perp} = -\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \Phi(x) = v(x) \text{ für } x \in \partial V, v \text{ ist fkt auf } \partial V$$

hom. Randbed  $\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \Phi = 0$



## Elektrische Leiter Spezialfall von Dirichlet-Randbed.

Gedanken exp.  $\rightarrow$  Im elektrischen Leiter im stationären Fall gilt  $E=0$   
Ladungsdichte  $\rho=0$  im Leiter.

Auf dem Rand sind nicht-triviale Ladungsverteilungen  $\sigma(x)$  möglich.

$\rightarrow$  Faradayer Käfig.

Folgende idealisierte Bedingungen:

- Im Leiter verschwindet el. st. Feld  $E=0$  (Leiter liegen außerhalb von  $V$ )
- Normalkomponente  $E_{\perp}$  auf Leiteroberfläche  $\sim$  ind. Ladungsdichte  $\sigma$
- Tangentialkomp.  $E_{\parallel}$  gehen stetig über, d.h.  $\vec{E} \sim \vec{n}$  auf  $\partial V$
- elektrostatische Pot. auf Leiteroberfläche konstant!

Freier Raum wie in Kap 1.

$V = \mathbb{R}^3$  Randbeg: Asymptotik  $x \rightarrow \infty$   
nicht-kompakt

$$x \rightarrow \infty \quad \phi(x) \sim \frac{1}{\|x\|} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \sim \frac{1}{\|x\|^2}$$

Eindeutigkeit: wähle eine Fläche  $A$  genügend gross  
die die Ladungsverteilung umschließt  $A \sim r^2$

(siehe Sat 1. Br. Id.)

$$\oint_{\partial V} dx^2 \vec{n} \cdot (\Psi \vec{\nabla} \Psi) \sim r^2 \frac{1}{r} \frac{1}{r^2} \rightarrow 0$$

$\Rightarrow \Psi \rightarrow 0$  wie zuvor Lsg. eindeutig festgelegt.

## 2.2 Green'sche Funktionen

Green'sche Funktion  $G(x, y)$

Potential  $\phi(x)$  einer Einheit-Punktladung am Ort  $y$

$$\Delta_x G(x, y) = -\delta^3(x - y)$$

Superposition  $\rightarrow$  allg. Ladungsdichte  $\rho(y)$

$$\phi(x) \stackrel{?}{=} \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3y G(x, y) \rho(y)$$

Vergleich mit allg. Lösung in  $V = \mathbb{R}^3$

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi \|x - y\|}$$

Lösungsansatz 2. Greensche Identität

$$\int_V d\mathbf{y}^3 (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) = \int_V d\mathbf{y}^3 \vec{\partial} \cdot (\phi \vec{\partial} \psi - \psi \vec{\partial} \phi) = \int_{\partial V} d\mathbf{y}^2 \vec{n} \cdot (\phi \vec{\partial} \psi - \psi \vec{\partial} \phi)$$

setze ein  $\phi(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y})$ ,  $\psi(\mathbf{y}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  für fest vorg.  $\mathbf{x}$

Voraussetzung: Poisson-Gl  $\Delta_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ ,  $\mathbf{x} \in V$

Annahme Poisson-Gl  $\Delta \Phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$   $\mathbf{x} \in V$

Randbed.  $\Phi = \omega$   $E_{\perp} = -\vec{n} \cdot \vec{\partial} \Phi = \nu$   $\mathbf{x} \in \partial V$

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d\mathbf{y}^3 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) - \oint_{\partial V} d\mathbf{y}^2 \vec{n}_i \vec{\partial}_i G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \omega(\mathbf{y}) \\ &\quad - \oint_{\partial V} d\mathbf{y}^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nu(\mathbf{y}) \end{aligned}$$



## Dirichlet Randbed

Poisson'sche Funktion zu D.R. mit  $\rho$  und  $\omega$  ( $v$  unbekannt)

Obige Lösungsformel wird explizit falls  $G(x,y) \stackrel{\text{hom. D.R. für } G}{=} 0$  für  $y \in \partial V$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3y G(x,y) \rho(y) - \oint_{\partial V} d^2y \vec{n}_i \partial_u G(x,y) \omega(y)$$

Bestätige Lösungsformel  $\Rightarrow$  zeige  $\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$   $\Phi = \omega$  auf  $\partial V$

Betrachte zunächst spezielle Ladungsdichte / Lösung

$$\Phi(x) = G(z,x) \quad (z \text{ fest}) \quad \rho(y) = -\epsilon_0 \Delta_y G(z,y) = \epsilon_0 \delta^3(y-z)$$

hom. D.R.B:  $\omega(y) = G(z,y) = 0$

Einsetzen in Lösung  $G(z,x) = \int d^3y \delta^3(y-z) G(x,y) - \oint_{\partial V} d^2y \dots = 0$   
 $= G(x,z) \Rightarrow G(x,y) = G(y,x)$  sym!

Poisson-Gl. für bel.  $\rho(y)$   $x \in V/\partial V$

$$\Delta \Phi(x) = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_V dy^3 \delta^3(x,y) \rho(y) + \int_{\partial V} dy^2 \vec{n}_y \cdot \vec{\partial}_y \delta^3(x,y) \omega(y)$$

$\stackrel{=0}{\downarrow}$

$$= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(x) + 0 = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(x)$$

D. Randbed. für  $x \in \partial V$

$\Phi(x) = \dots \stackrel{?}{=} \cancel{0} + \cancel{0}$      subf.1     folgt aus

benötigen Eigenschaft  $\vec{n}_y \cdot \vec{\partial}_y G(x,y) \stackrel{\downarrow}{=} -\delta^2(x,y)$      falls  $x,y \in \partial V$

damit gilt dann  $x \in \partial V$   $\Phi(x) = 0 + \int_{\partial V} dy^2 \delta^2(x,y) \omega(y) = \omega(x)$      D-RB für G, sym

$\Phi$  erfüllt Poisson Gl  $\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$  und D-RB  $\Phi = \omega$  auf  $\partial V$

## Neumann Randbedingung

Probleme: Freiheit einer Konstanten • Satz von Gauß

$$v = \vec{n} \cdot \vec{E} = E_{\perp} \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow \rho$$

$$\oint_{\partial V} d\gamma^2 v(\gamma) = \oint_{\partial V} d\gamma^2 \vec{n} \cdot \vec{E}(\gamma) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d\gamma^3 \rho(\gamma) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Ansatz  $\vec{n} \cdot \vec{\partial}_y G(x, y) = 0$  für  $y \in \partial V$  genügt nicht.

führt zu  $Q=0$  was mit  $\Delta_y G = -\delta^3$  in Konflikt ist...

Stattdessen genügt

$$\vec{n} \cdot \vec{\partial}_y G(x, y) = -F(y) \quad \text{für } y \in \partial V \quad \begin{array}{l} \text{Satz von} \\ \text{Goursat} \end{array}$$

können  $F(y)$  frei wählen aber Einschränkung  $\oint_{\partial V} dy^2 F(y) = 1$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V dy^3 G(x, y) \rho(y) + \underbrace{\oint_{\partial V} dy^2 F(y) w(y)}_{-\oint_{\partial V} dy^2 G(x, y) v(y)}$$

Zeige dass  $\Phi(x)$  Poisson-Gl und Randbed löst.

hier  $G(x, y)$  nicht sym. • Betrachte konkrete Lsg  $\Phi(x) = G(z, x)$

$$G(z, x) = G(x, z) + \oint_{\partial V} dy^2 F(y) (G(z, y) - G(x, y))$$

Da  $f$  wählbar ist können wir tatsächlich  $F(y)$  so wählen dass  
 $G(z, x) = G(x, z)$ . Betrachte

$$\tilde{G}(x, y) = G(x, y) + k(x).$$

Wähle nun  $k(x)$  so dass

$$\begin{aligned}\hat{G}(x, y) &= G(x, y) - \int_{\partial V} dz^2 F(z) G(x, z) \\ \Rightarrow \hat{G}(x, y) &= \hat{G}(y, x)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \hat{\phi}(x)$  erfüllt Poisson (symmetrie)

$$N \text{ RB: } \vec{n} \cdot \vec{\partial}_x \hat{G}(x, y) = \delta^2(x-y) - F(x) \text{ für } x, y \in \partial V$$

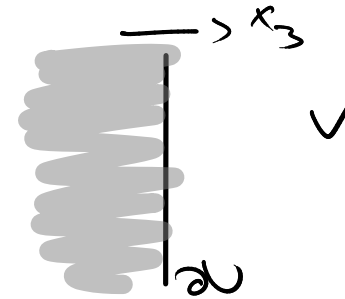
$$\Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{\partial}_x \hat{\phi}(x) \rightarrow v(y) \text{ für } x \rightarrow y, y \in \partial V$$

## 2.3 Beispiele

Der Halbraum

$$H \subset \mathbb{R}^3 \quad x \in H \Leftrightarrow x_3 > 0$$

$$\partial H \subset \mathbb{R}^2 \quad x \in \partial H \Leftrightarrow x_3 = 0$$



Rand bed. Dirichlet (Leiterplatte)

Suchen Greensche Fkt  $G(x, y)$  mit  $\Delta G = -\delta^3(x-y)$

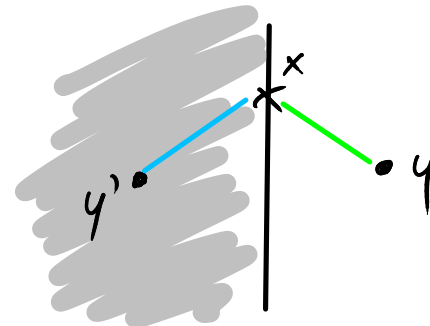
mit RB  $G(x, y) = 0$  für  $x_3 = 0$  od.  $y_3 = 0$

Für festes  $y \in H$  gibt es ein  $y' \in \mathbb{R}^3, \notin H$   
so dass  $\|x-y\| = \|x-y'\|$  für alle  $x \in \partial H$

Aussatz: Spiegelladung

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi \|x-y\|} - \frac{1}{4\pi \|x-y'\|}$$

$$\Rightarrow \Delta G = -\delta^3(x-y) + \delta^3(x-y')$$



zusätzlich  
 $G \rightarrow 1/\|x\|$  für  $x \rightarrow \infty$

$G(x, y) = 0$  falls  $x \in \partial H$

Normalableitung von  $G$  auf  $\partial H$ ?

induzierte  
Flächenladungsdichte

$$y \in \partial H \quad \vec{n} \cdot \vec{\partial}_y G = - \frac{y_3 - x_3}{2\pi \|x - y\|^3}$$

(Normalvektor  $E_\perp$ ,  $\sim \sigma$ )

wenn jetzt  $x \rightarrow \partial V$  gilt  $\vec{n} \cdot \vec{\partial}_y G \rightarrow \frac{0}{\text{endlich}}$

aber falls  $x \rightarrow y$  gilt stattdessen  $\vec{n} \cdot \vec{\partial}_y G \sim \frac{0}{0^3} = \infty$

Vor Grenzwert über alle  $y$  integrieren

$$\oint_{\partial H} dy^2 \vec{n} \cdot \vec{\partial}_y G = -1 \quad \text{falls } x_3 > 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{\partial}_y G = 0 \quad \text{für } x \neq y \quad \text{auf } \partial H$$

$$\Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{\partial}_y G = -\delta^2(x - y)$$

Neuman RB.

$$G(x, y)$$

$$= \frac{1}{4\pi \|x - y\|}$$

$$\times \frac{1}{4\pi \|x - y\|}$$

## Außenraum einer Kugel

$D = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \geq R\}$  leeres  $\rightarrow$  Dirichlet Radius  $R$  Mitte  $\vec{x} = 0$

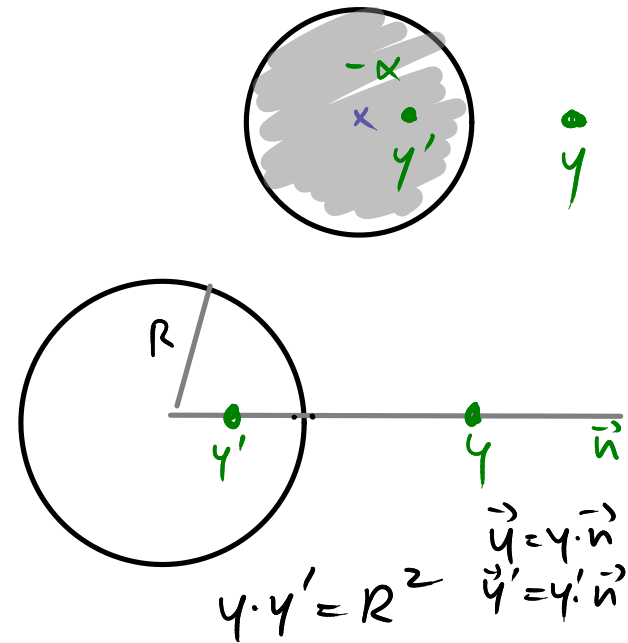
$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi \|x - y\|} - \frac{\alpha}{4\pi \|x - y'\|}$$

zu bestimmen:  $y'$  Ort,  $\alpha$  rel. Ladung

Eindeutige Lösung für D-Randbed

$$\vec{y}' = \frac{R^2}{\|y\|^2} \vec{y} \quad \alpha = \frac{R}{\|y\|}$$

Abbildung: Inversion an der Sphäre



Identität:  $\|y\|^2 \|x - y'\|^2 = \|y\|^2 \|x\|^2 - 2R^2 (\vec{x} \cdot \vec{y}) + R^4 = \|x\|^2 \|x' - y\|^2$   
 $\leadsto$  Symmetrie von  $G(x, y) = G(y, x)$

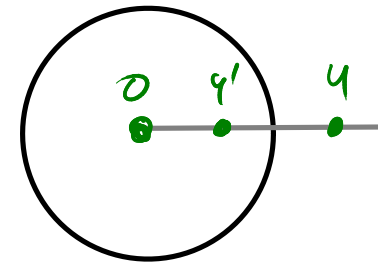


D-Randbed:  $y \in \partial D \Leftrightarrow \|y\| = R \Leftrightarrow y' = y \Rightarrow G(x, y) = 0$ .

Incl. Spiegelabbg bei  $y' \notin D$ .  $-\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \Pi$ -Randbed  $\sim$  Rand geerdet.

Verwandter Fall: nicht-geerdeter Leiter  $\partial D$ , Potential:  $U$   
 Verwende Lösungsformel für Pot  $\phi(x)$

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{q}{\epsilon_0} G(x, y) - U \int_{\partial D} dz^2 \vec{n} \cdot \vec{\partial}_z G(x, z) \quad \downarrow \text{Gauß} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \|x-y\|} - \frac{qR}{4\pi\epsilon_0 \|y\| \|x-y'\|} + U \frac{R}{\|x\|} \end{aligned}$$



Auch als Lösung von Kugeloberfläche, leitend, isoliert, ungeladen

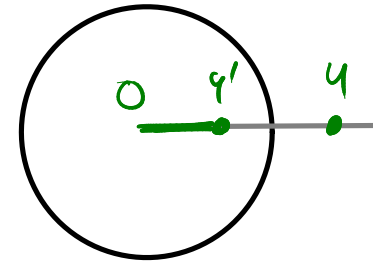
$$\phi(x) = \text{s.o. mit } U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \|y\|}$$

Einfachheit dieser Lösungen besteht auf konformer Symmetrie (2.4)

Beispiel für kompliziertere Lösungen (Spiegelladung)

Außenraum  $D$  einer Kugel mit Neumann-Randbed.

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi \|x - y\|} + \frac{R}{4\pi \|y\| \|x - y'\|} + \frac{1}{4\pi R} \log \frac{\|y\| \|x - y'\| + \vec{y} \cdot (\vec{x} - \vec{y}')}{\|y\| \|x\| + \vec{y} \cdot \vec{x}}$$



- 1 Spiegelladung mit gleichen Vorzeichen.

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla}_n G = 0$$

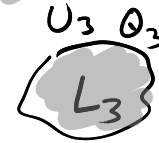
- lineare Ladungsverteilung  $-\frac{1}{R}$  von 0 bis  $y'$   $\downarrow$   
 Besamtladung im Inneren ist  $= 0$ .  $\Rightarrow$  Neumann Randbed. exakt

## Kapazitätskonstanten / allgemeine Kondensatoren

$N$  metallische Leiter  $L_i$ ,



$\bar{L}$  umgebender Raum für RW-Problem. Ungeladen  
Potential auf  $\partial L_i$  gegeben ist durch  $U_i$



$\bar{L}$

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^N U_i \Gamma_i(x) \quad \text{bi-lin.} \quad \Gamma_i(x) = \delta_{ij} \quad \text{für } x \in \partial L_j$$

Energie (Feld)  $W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{\bar{L}} dx^3 (\vec{\partial} \phi)^2 \stackrel{\downarrow}{=} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N C_{ij} U_i U_j$

und Kapazitätskonst.  $C_{ij} = \epsilon_0 \int_{\bar{L}} dx^3 \vec{\partial} \Gamma_i \cdot \vec{\partial} \Gamma_j$

Matrix  $C_{ij}$  symmetrisch, positiv definit denn  $W \geq 0$

Kap.konst  $C_{ij}$  beschreiben Relation zwischen  $U_i$  und  $Q_j$

Betrachte Energiebez  $W$

Poisson/Laplace Gl  $\Delta\phi = 0$  auf  $\bar{L}$

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{\bar{L}} dx^3 \vec{\partial} \cdot (\phi \vec{\partial} \phi) - \overset{\downarrow}{0}$$
$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 \sum_{i=1}^N \int_{\partial L_i} dx^2 \overset{\text{konst. } U_i}{\downarrow} \phi(x) \vec{n} \cdot \vec{\partial} \phi(x)$$

$$= -\frac{1}{2} \epsilon_0 \sum_{i=1}^N U_i \int_{\partial L_i} dx^2 \vec{n} \cdot \vec{\partial} \phi(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N U_i Q_i$$

Beziehung für  $W$  von Kondensatoren:

$$Q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} U_j$$

## 2.4 Konforme Symmetrie

Einfachheit der Potentiale für Kugelgeometrie liegt an Symmetrie

Typische Sym: Translation (Homogenität in Raum),  
Zeitinvarianz (Energieerhaltung), Rotationen (Vektorschwabbw.)

Zusätzlich hier: konforme Symmetrie  $\leftrightarrow$  Inversion an Sphäre

$$\Delta \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad \vec{x}' = \frac{R^2}{\|\vec{x}\|^2} \vec{x}$$

k. Transformation:  $\Phi'(x) = \frac{R}{\|\vec{x}\|} \phi(x'), \quad \rho'(x) = \frac{R^5}{\|\vec{x}\|^5} \rho(x')$

dann gilt  $\Delta \Phi' = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho' \Rightarrow$  Symmetrie der Feldgl.

Euklidische Transf. (Translation, Rotation) zusammen  
mit Inversion bilden konforme Gruppe

- Inversion  $\circ$  Translation  $\circ$  Inversion  $\rightarrow$  spez. konf. Transf. (konf.)
- Skalentransformationen  $(\text{Inv}_R \circ \text{Inv}_{R'})$   $\vec{x}' = a \cdot \vec{x}$

konforme Transformationen:

- erhalten Winkel zwischen zwei Kurven!
- erhalten Länge nicht!



$\rightarrow$  Ebenen werden auf Ebenen / Sphären abgebildet  
Sphären  $\leftrightarrow$  Sphären / Ebenen

Sehr interessant: konforme Symmetrie in 2D  $\sim$  komplexer Analysis

$$\mathbb{R}^2 \leftrightarrow \mathbb{C} \quad z = x + iy \in \mathbb{C} \quad \bar{z} = x - iy \in \mathbb{C} \quad \Delta = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

$$\text{konf. Abb. verallg.} \quad z \rightarrow F(z) \quad \bar{z} \rightarrow \overline{F(z)}$$