Elektrodynamik

Vorlesungsfolien, Kapitel 1

ETH Zürich, 2024 FS

Prof. N. Beisert

Die aktuelle Version dieses Werks befindet sich unter:
`http://people.phys.ethz.ch/~nbeisert/lectures/`.

1. Grundlagen der Elektrostatik

1.1. Grundbegriffe

Elektrische Ladung – Eigenschaft von Materie

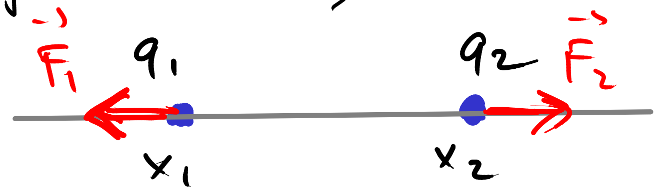
Coulomb-Gesetz Annahme: Punktförmige Körper / Ladung

- Zwei geladene punktförmige Körper.
- Positionen x_1, x_2, Ladungen q_1, q_2

Kraft zwischen Körpern ist wie folgt beschrieben:

- proportional zum Produkt $q_1 \cdot q_2$
- entlang der Verbindungslinie $x_1 - x_2$
- proportional zum Abstandsbetrag $x_1 - x_2$ zur Potenz -2
- abstoßend für Ladungen mit gl. Vorzeichen, anziehend für untersch.

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = +\frac{q_1 q_2 (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{4\pi\varepsilon_0 \|x_1 - x_2\|^3}$$



SI Einheiten $q_1 q_2$ vorzeichenbehaftete Ladungen

Einheit Coulomb $C = A\,s$ Ampère-sek.

Dielektrizitätskonstante $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}\, A^2 s^4 / kg\, m^3$

Superpositionsprinzip

Für viele Ladungen q_i an Orten x_i gilt dass die res. Kraft die vektorielle Summe der paarweisen Kräfte ist (Coulomb-Ges)

$$\vec{F}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \frac{q_i \cdot q_j\, (\vec{x}_i - \vec{x}_j)}{4\pi\varepsilon_0\, \| x_i - x_j \|^3}$$

- Fernwirkung
- teilweise / scheinbar instantan.

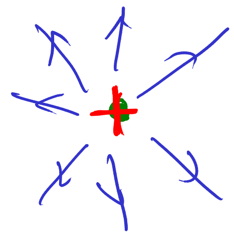
Elektrisches Feld $\vec{E}(x)$

überträgt Kräfte auf Ladungen in lokaler Weise:
Teilen obige Relation wie folgt auf

$$\vec{F} = q\,\vec{E}(x) \qquad \vec{E}(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j\,(x-\vec{x}_j)}{4\pi\varepsilon_0 \,\| x-\vec{x}_j\|^3}$$

$$\left(\vec{F}_i = q_i\, E(x_i)\right)$$

Elektrisches Feld existiert unabh. von Ladungen am jew. Ort.



Vorsicht bei Punktladungen:

- res. Kraft einer Ladung auf sich selbst $\to 1/0 \sim \infty$
- man betrachte $\vec{E}$ als Kraft auf Testladung q die selbst kein Feld erz.

Kontinuierliche Ladungsverteilung

Ladungsdichte $\rho(x)$ (Grenzfall ∞ vieler, ∞ kleiner Punktladungen)

$$\vec{E}(x) = \int dy^3 \, \frac{\rho(y)\,(\vec{x}-\vec{y})}{4\pi\varepsilon_0 \|x-y\|^3} . \qquad dy^3 = (dy)^3 = d^3y = d^3V$$

zwei mathematische Eigenschaften:

1) $\operatorname{div} \vec{E} := \vec{\partial} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad \nabla_i = \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$

divergenzfrei / quellfrei

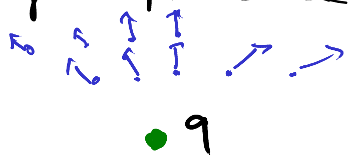
2) $\operatorname{rot} \vec{E} := \vec{\partial} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ (Kreuzprodukt in $\mathbb{R}^3$)

1) gilt nur ausserhalb von Ladungsvert.

2) gilt überall.

Beweis: Superpositionsprinzip $\to$ genügt eine Punktlad. betr.

$$\vec{E} = \frac{q\,\vec{x}}{4\pi\varepsilon_0 \|x\|^3}$$



$y = 0$

Ausrechnen:

kronecker-delta / Einheitsmatrix $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$, $i \neq j$

$$\partial_i E_j = \frac{q(\delta_{ij}\,\vec{x}^2 - 3\,x_i x_j)}{4\pi\varepsilon_0 \|x\|^5} \quad \text{für } x \neq 0$$

Divergenz $\vec{E}$: $\vec{\partial} \cdot \vec{E} = \sum_{i=1}^{3} \partial_i E_i$ $\qquad \delta_{ij} \to 3 \qquad x_i x_j \to \vec{x}^2$

$$\vec{\partial} \cdot \vec{E} = 0.$$

Rotation $\vec{E}$: $\vec{\partial} \times \vec{E} = 0$ weil Kreuzprodukt antisymmetrisch

$\partial_i E_j$ ist symmetrisch $i \leftrightarrow j$

$$\vec{E}(x) = \int dy^3 \, \frac{\rho(y)\,(\vec{x}-\vec{y})}{4\pi\varepsilon_0 \|x-y\|^3} + \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j\,(\vec{x}-\vec{x}_j)}{4\pi\varepsilon_0 \|x-x_j\|^3}$$

$\vec{\partial}\cdot\vec{E} = 0$? $\quad \vec{\partial}\times\vec{E} = 0$? Beispiel $\vec{E}(x) = \dfrac{q\vec{x}}{4\pi\varepsilon_0 \|x\|^3}$

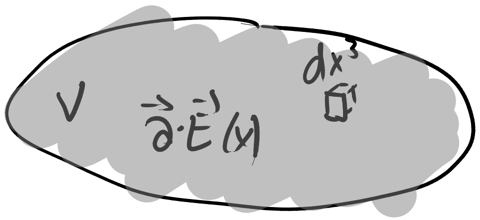
Quellen

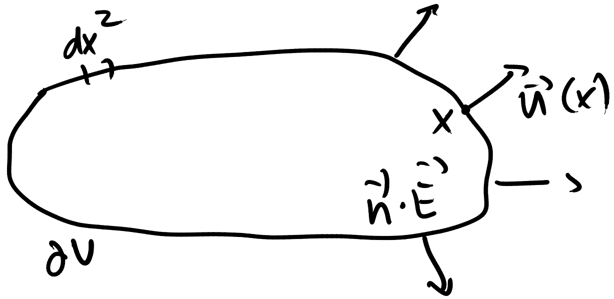
Gilt $\vec{\partial}\cdot\vec{E} = 0$ auch am Ort der erzeugenden Ladungen?

Satz von Gauß für das Vektorfeld $\vec{E}$, Bereich $V \subset \mathbb{R}^3$, Rand ∂V

Normalvektor von ∂V bei $\vec{x}$

$$\int_V dx^3 \, \vec{\partial}\cdot\vec{E}(x) = \oint_{\partial V} dx^2 \, \vec{n}(x)\cdot\vec{E}(x)$$





Speziell wählen Sphäre ∂V, Kugel V mit Radius R um $x=0$

$$\int_{|x|\leq R} dx^3\, \vec{\partial}\cdot\vec{E} \overset{G.}{=} \oint_{\|x\|=R} dx^2\, \vec{n}\cdot \frac{q\vec{x}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \oint_{\|x\|=R} d^2\Omega\, R^2 \frac{\vec{x}}{R}\cdot\frac{q\vec{x}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \qquad \vec{x}^2 = R^2$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint d^2\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$ Aber $\vec{\partial}\cdot\vec{E} = 0$ für $\vec{x}\neq 0$.

$\vec{\partial}\cdot\vec{E}$ ist seltsame Fkt $\begin{cases} 0 & \text{für } \vec{x}\neq 0 \\ ? & \text{für } \vec{x}=0 \end{cases}$ so dass Gauß gilt

Gaußsches Gesetz (diff. Form) $\vec{\partial}\cdot\vec{E} = \frac{q}{\varepsilon_0}\delta^3(x) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x)$

$\rightsquigarrow$ delta-Funktion.

$\rho(x) = q\,\delta^3(x)$ formelle Ladungsdichte eines Punktteilchens.

Gaußsches Gesetz (integraler Form)

$$\int dx^3\, \vec{\partial}\cdot\vec{E} = \oint_{\partial V} dx^2\, \vec{n}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_V \qquad Q_V := \int_V dx^3\, \rho(x)$$

delta-Distibution

eine Funktion $\delta^3 : \mathbb{R}^3 \to ?$ mit Eigenschaft

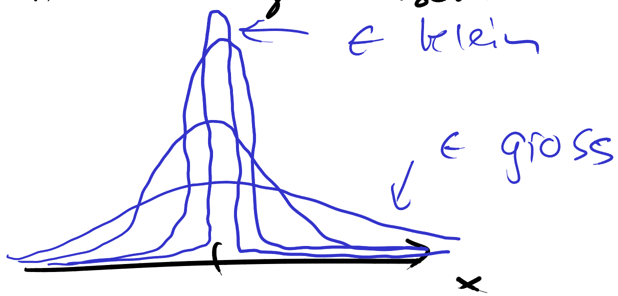
$\delta^3(x) = 0$ für $\vec{x} \neq 0$ nach Gauß soll gelten

$$\vec{\partial} \cdot \frac{\vec{x}}{\|x\|^3} = 4\pi \delta^3(x)$$

$$\Rightarrow \int_V dx^3\, \delta^3(x)\, f(x) = \begin{cases} f(0) & \text{falls } 0 \in V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(Distribution) wertet Testfkt $f(x)$ lin. aus.

delta-Fkt als Grenzwert stark konzentrierter Ladung ansehen



$$\delta_\epsilon(x) := \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}$$

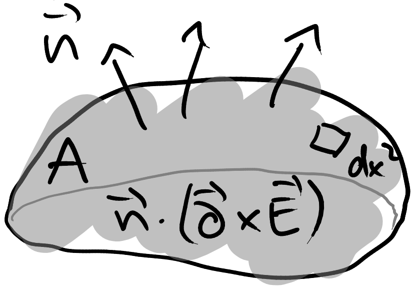
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta_\epsilon(x) = 1$$

$\lim_{\epsilon \to 0} \delta_\epsilon(x) = \delta(x)$ mit gewünschten Eigenschaften

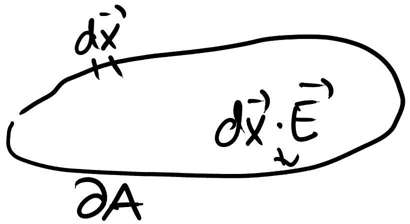
1.2 Das Elektrostatische Potential

Rotationsfreiheit bei $x=0$? $\quad \vec{\partial}\times\vec{E}=0$ gilt auch bei $\vec{x}=0$

Satz von Stokes $\quad \int_A dx^2\, \vec{n}\cdot(\vec{\partial}\times\vec{E}) = \oint_{\partial A} d\vec{x}\cdot\vec{E}$



$\leftrightarrow$



Wähle eine geschlossene Kurve und dazu eine Fläche deren Rand sie bildet. Kurve gehe nicht durch 0.

da $\vec{\partial}\times\vec{E}=0$ fast überall gilt $\quad \oint_{\partial A} d\vec{x}\cdot\vec{E}=0$

wir können mit A in bel. Richtung durch $x=0$ fahren

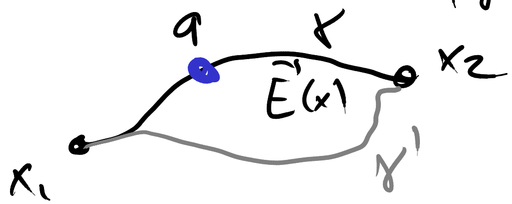
$\Rightarrow \quad \vec{\partial}\times\vec{E}=0$ gilt auch bei $x=0$ / in Ladungsvert.

Eigenschaft des el. Feldes: $\vec{\partial}\times\vec{E}=0$ (diff) , $\oint d\vec{x}\cdot\vec{E}=0$ (integral)

Implikation für Arbeit die ein el. Feld verrichten kann.

Testladung q bewegt entlang einer Kurve γ (offen / geschlossen)

zu verrichtende Arbeit ΔW



$$\Delta W = -q \int d\vec{x} \cdot \vec{E}$$

Arbeit ist unabh. vom Weg γ, nur abh. von Endpunkten.

da zusges. Pfad $\gamma^{-1}\gamma'$ ist geschlossen

$$0 = \Delta W[\gamma'\gamma^{-1}] = \Delta W[\gamma'] - \Delta W[\gamma]$$

$$\Rightarrow \quad \Delta W = q\,\Phi(x_2) - q\,\Phi(x_1)$$

$\Phi(x)$ ist das elektrostatische Potential

Beziehung zum el. Feld

$$\vec{E}(x) = -\vec{\partial}\phi(x) = -\mathrm{grad}\,\phi(x)$$

$$\int d\vec{x}\cdot\vec{E} = -\int d\vec{x}\cdot\vec{\partial}\phi = -\phi(x_2) + \phi(x_1)$$

rotationsfreies Vektorfeld lässt sich schreiben als gradient eines Skalarfeldes.

Neuer Freiheitsgrad: konstante

Gewöhnlich festgelegt durch $\lim_{x\to\infty} \phi(x) = 0$

Elektrisches Potential für allg. Ladungsverteilung $\rho(x)$, $q_i\ \vec{x}_i$

$$\Phi(x) = \int dy^3 \frac{\rho(y)}{4\pi\varepsilon_0 \|x-y\|} + \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 \|x-x_j\|}$$

Konstante so gewählt dass $\Phi(x) \to 0$ für $x \to \infty$

Poisson Gleichung

Laplace operator

Laplace-Gleichung

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x) = \vec{\partial}\cdot\vec{E} = -\vec{\partial}\cdot\vec{\partial}\,\Phi(x) = -\Delta\,\Phi(x)$$

Laplace Operator $\quad \Delta := \vec{\partial}\cdot\vec{\partial} = \mathrm{div}\,\mathrm{grad} = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2$

obiges Potential $\Phi(x)$ löst Lapl./Poisson Gl. für geg. $\rho(y)$

1.3 Energie des Elektrostatischen Feldes

Welche Energie ist in einer Ladungsverteilung / Feld enthalten?

bringe N Ladungen q_i von ∞ zu Zielpositionen x_i. Arbeit?

$$W = \sum_{i<j=1}^{N} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 \|x_i - x_j\|} = \sum_{i\neq j=1}^{N} \frac{q_i q_j}{8\pi\varepsilon_0 \|x_i - x_j\|}$$

für kont. Ladungsverteilung ρ

$$W = \int dx^3\, dy^3 \frac{\rho(x)\ \rho(y)}{8\pi\varepsilon_0 \|x-y\|} = \int dx^3 \frac{1}{2} \rho(x)\, \phi(x)$$

$$= -\frac{1}{2}\varepsilon_0 \int dx^3\ \Delta\phi(x)\ \phi(x).$$

part. Int. keinen Randt.

$$\overset{\searrow}{=} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int dx^3 \left(\vec{\partial}\phi\right)^2 - \underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon_0 \int dx^3\, \vec{\partial}\cdot\left(\phi\vec{\partial}\phi\right)}_{=0\ \text{(Rand/Annahme)}}$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int dx^3\ \vec{E}^2 \leftarrow \text{Potentielle Energie im Feld.}$$

$W \geq 0$

1.4 Beispiele

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad$ $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$

Kugelsym. Ladungsvert. $\quad \rho(\vec{x}) = \rho(r) \quad r = \|x\|$

$\Rightarrow \quad \vec{E}(x) = \vec{n} E(r) \qquad \vec{n}(x) := \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$

Ebenso $\phi(\vec{x}) = \phi(r)$

$\vec{E} = -\vec{\partial}\phi \quad \rightsquigarrow \quad E(r) = -\phi'(r)$ Reduktion auf 1 Dim.

Div. von $\vec{E}$ $\quad \vec{\partial} \cdot \vec{E} = E' + \frac{2}{r} E$

$\Rightarrow$ Differentialgl. (in 1 var.): $\quad E' + \frac{2}{r} E = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$

Integrale Form $\quad 4\pi r^2 E(r) = \ldots = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^r ds\, 4\pi s^2 \rho(s)$

Aussenraum einer begrenzten Ladungsvert. $\quad$ ab $r > R$ $\;\rho(r) = 0$ $\qquad E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ für $r > R$

Homogen geladene Kugel

$$\rho(r) = \begin{cases} Q/\frac{4}{3}\pi R^3 & r<R \\ 0 & r>R \end{cases}$$

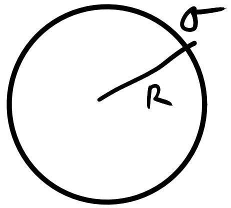
$$\int_0^r ds\, 4\pi s^2 \rho = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi r^3 \rho & r<R \\ \frac{4}{3}\pi R^3 \rho & r>R \end{cases}$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \begin{cases} r/R^3 & r<R \\ 1/r^2 & r>R \end{cases}$$

Potential $$\Phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \begin{cases} -\frac{1}{2} r^2/R^3 + \frac{3}{2}/R & r<R \\ 1/r & r>R \end{cases}$$

Energie $$W = 4\pi\varepsilon_0 \frac{1}{2}\int_0^\infty dr\, r^2 E^2 = \int_0^R + \int_R^\infty = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{5R} + \frac{1}{R}\right) = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$$

Homogen geladene Kugeloberfläche



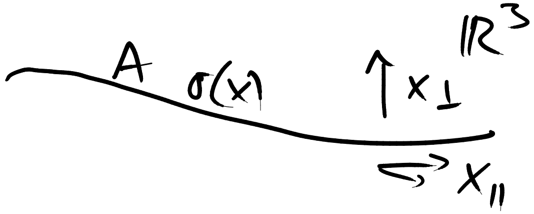
$$\rho(r) = \sigma\, \delta(r - R), \quad \sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \begin{cases} 0 & r < R \\ 1/r^2 & r > R \end{cases}$$ unstetig: Sprung $\sim \sigma$

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \begin{cases} 1/R & r < R \\ 1/r & r > R \end{cases}$$ stetig

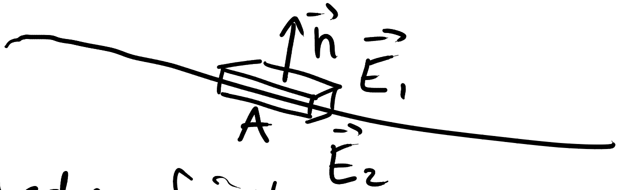
Energie $W = Q^2 / 8\pi\varepsilon_0 R$

Flächenartige Ladungsverteilung



$$\rho(x) = \sigma(x_\parallel)\,\delta(x_\perp)$$

Feld in der Nähe der Fläche?

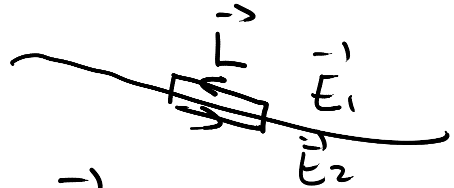


σ, E sei (nahezu) konstant im Kästchen: Gaußsches Kästchen

Fluss von $\vec{E}$ aus Kasten näherungsweise

$$A\vec{n}\cdot(\vec{E}_1-\vec{E}_2) \overset{\text{Gauß}}{=} \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot Q = \frac{1}{\varepsilon_0} A\sigma$$

$\Rightarrow$ $E_\perp := \vec{n}\cdot\vec{E}$ springt um $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$



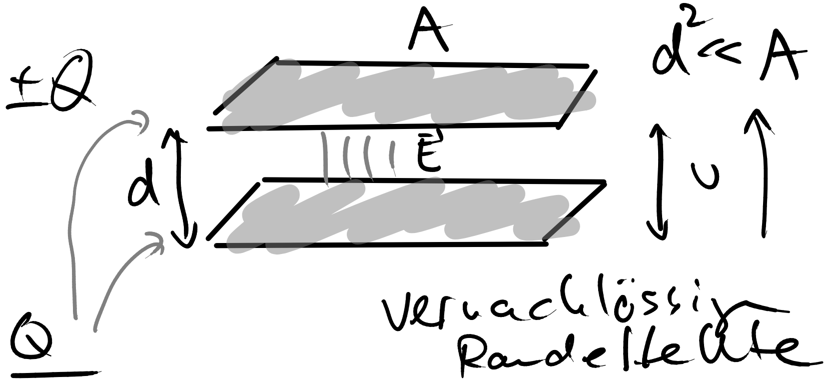
Tangentialkomp. $\vec{E}_\parallel = \vec{E} - \vec{n} E_\perp$ Stokessche Schleife

Stokes: $\vec{L}\cdot(\vec{E}_1-\vec{E}_2)=0$, $\vec{L}$ frei wählen $\Rightarrow$ $\vec{E}_\parallel$ springt nicht (stetig)

Plattenkondensator

Ladung $\pm Q$

Dichte $\pm Q/A = \sigma$



Normalkomp von E springt um $\pm \dfrac{Q}{\varepsilon_0 A}$

kons. Lösung: Feld im Innenraum $E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 A}$ homogen

$E = 0$ ausserhalb

Potential steigt linear um $U = \Delta\Phi = dE = \dfrac{dQ}{\varepsilon_0 A}$

Energie für Feld $W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 d A E^2 = \dfrac{dQ^2}{2\varepsilon_0 A} = \dfrac{UQ}{2} = \frac{1}{2} C U^2$

$C := \dfrac{Q}{U} = \dfrac{\varepsilon_0 A}{d}$ Kapazität des Kond.

geometrische

Dipol

$$\phi(x) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\|\vec{x} - \frac{1}{2}d\vec{n}\|} - \frac{1}{\|\vec{x} + \frac{1}{2}d\vec{n}\|}\right) \qquad \overset{d\cdot\vec{n}}{\underset{-q}{\bullet}\longleftarrow\underset{+q}{\bullet}}$$

Limes $d \to 0$. naiv zu $\phi(x) = 0$

Limes mit festgel. Dipolmoment $\vec{p} := q\, d\vec{n}$ $\quad q \sim \frac{1}{d} \to \infty$

$$\phi(x) = \frac{\overset{= |p|/d}{q}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|x|} + \frac{\frac{1}{2}d\,\vec{x}\cdot\vec{n}}{|x|^3} - \frac{1}{|x|} + \frac{\frac{1}{2}d\,\vec{x}\cdot\vec{n}}{|x|^3} \pm \dots\right)$$

$$= \frac{\vec{p}\cdot\vec{x}}{4\pi\varepsilon_0 |x|^3}$$

ist Differential eine Pot. von Punktladung

$$= -\vec{p}\cdot\vec{\partial}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \|x\|}$$

res. Ladungsdichte

$$\rho(x) = -\vec{p}\,\vec{\partial}\,\delta^3(x)$$