

Elektrodynamik

Vorlesungsfolien

ETH Zürich, 2024 FS

PROF. N. BEISERT

© 2014–2024 Niklas Beisert.

Dieses Dokument sowie seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Dieses Werk ist lizenziert unter der Creative Commons Lizenz „Namensnennung – Nicht kommerziell – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International“ (CC BY-NC-SA 4.0).



Die Lizenz kann eingesehen werden unter:
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>.

Die aktuelle Version dieses Werks befindet sich unter:
<http://people.phys.ethz.ch/~nbeisert/lectures/>.

Inhaltsverzeichnis

0 Einführung	0:14:24	0-1
1 Grundlagen der Elektrostatik	2:42:12	1-1
1.1 Grundbegriffe	01/0:00:42 + 1:03:06	1-2
1.2 Das elektrostatische Potential	01/1:04:20 + 0:25:28	1-10
1.3 Energie des elektrostatischen Feldes	01/1:30:00 + 0:19:35	1-14
1.4 Beispiele	01/1:49:44 + 0:52:28	1-15
2 Randwertprobleme der Elektrostatik	3:01:59	2-1
2.1 Formulierung und Eindeutigkeit	02/0:02:10 + 0:38:57	2-2
2.2 Greensche Funktionen	02/0:41:07 + 0:55:31	2-7
2.3 Beispiele	02/1:36:38 + 1:04:19	2-14
2.4 Konforme Symmetrie	02/2:40:57 + 0:20:02	2-21
3 Elektrostatik in Kugelkoordinaten	3:13:07	3-1
3.1 Separation der Variablen	03/0:03:45 + 0:09:41	3-2
3.2 Kugelkoordinaten	03/0:13:26 + 0:14:00	3-4
3.3 Kugelflächenfunktionen	03/0:27:26 + 1:01:28	3-5
3.4 Orthogonalität und Vollständigkeit	03/1:28:54 + 0:09:22	3-13

3.5 Multipolentwicklung	03/1:38:16 + 0:42:50	3-14
3.6 Darstellungen der Rotationsgruppe	03/2:21:06 + 0:52:01	3-18
4 Magnetostatik	2:12:26	4-1
4.1 Grundlagen	04/0:04:48 + 0:38:02	4-2
4.2 Feldgleichungen	04/0:42:50 + 0:34:08	4-6
4.3 Vektorpotential	04/1:16:58 + 0:34:20	4-10
4.4 Magnetisches Moment	04/1:51:18 + 0:20:08	4-15
5 Elektro- und Magnetostatik in Materie	1:23:19	5-1
5.1 Makroskopische Felder	05/0:03:49 + 0:12:08	5-2
5.2 Dielektrika	05/0:15:57 + 0:38:13	5-4
5.3 Grenzflächen von Dielektrika	05/0:54:10 + 0:19:38	5-9
5.4 Magnetostatik in Materie	05/1:13:48 + 0:09:31	5-11
6 Maxwell-Gleichungen	1:24:30	6-1
6.1 Bewegte Punktladungen	06/0:01:31 + 0:10:18	6-2
6.2 Faradaysches Induktionsgesetz	06/0:11:49 + 0:23:28	6-3
6.3 Maxwellsche Ergänzung	06/0:35:17 + 0:20:01	6-5
6.4 Elektromagnetische Potentiale	06/0:55:18 + 0:29:12	6-8
7 Stromkreise	1:24:01	7-1
7.1 Induktivitäten	07/0:01:15 + 0:28:31	7-2
7.2 Stromkreise	07/0:29:56 + 0:25:53	7-5
7.3 Schwingkreis	07/0:56:02 + 0:17:23	7-8
7.4 Wechselstrom	07/1:13:30 + 0:10:31	7-10
8 Erhaltungsgrößen und Symmetrien	1:30:18	8-1
8.1 Ladungserhaltung	08/0:01:37 + 0:07:53	8-2

8.2 Energie und Impuls	08/0:09:30 + 0:27:53	8-3
8.3 Symmetrien	08/0:36:45 + 0:08:12	8-7
8.4 Galilei-Transformation	08/0:44:57 + 0:33:23	8-8
8.5 Elektromagnetische Dualität	08/1:18:20 + 0:11:58	8-11
9 Spezielle Relativitätstheorie	3:01:42	9-1
9.1 Poincaré-Transformationen	09/0:01:58 + 0:52:20	9-2
9.2 Tensoren	09/0:54:18 + 0:38:08	9-8
9.3 Kovariante Elektrodynamik	09/1:32:27 + 1:08:23	9-14
9.4 Geladene Teilchen	09/2:40:50 + 0:20:52	9-21
10 Lösungen der freien Wellengleichung	2:26:51	10-1
10.1 Freie Wellengleichung	10/0:02:49 + 0:07:27	10-2
10.2 Ebene Wellen	10/0:10:16 + 0:38:08	10-3
10.3 Polarisierung	10/0:48:00 + 0:37:46	10-8
10.4 Energietransport	10/1:25:46 + 0:24:52	10-12
10.5 Weitere Wellenlösungen	10/1:50:38 + 0:35:13	10-14
11 Erzeugung elektromagnetischer Wellen	5:10:15	11-1
11.1 Anfangswertproblem	11/0:00:54 + 1:02:11	11-2
11.2 Greensche Funktionen	11/1:03:05 + 0:54:08	11-7
11.3 Strahlung oszillierender Ströme	11/1:57:13 + 1:38:33	11-12
11.4 Lineare Antenne	11/3:35:46 + 0:18:19	11-22
11.5 Beschleunigte Punktladungen	11/3:54:05 + 1:16:10	11-24
12 Elektrodynamik mit Materie	2:26:32	12-1
12.1 Wellen im Medium	12/0:01:35 + 0:23:20	12-2
12.2 Reflexion und Brechung	12/0:25:25 + 1:11:09	12-5
12.3 Streuung an Materie	12/1:36:34 + 0:49:58	12-13

13 Wellenleiter	2:22:42	13-1
13.1 Wellen in Leitern	13/0:02:56 + 0:21:15	13-2
13.2 Wellenleiter	13/0:24:11 + 1:46:04	13-5
13.3 Kavitäten	13/2:10:38 + 0:12:04	13-18
14 Wellenoptik	1:15:50	14-1
14.1 Kirchhoffsche Beugungstheorie	14/0:09:14 + 0:22:40	14-2
14.2 Interferenz und Huygens-Prinzip	14/0:31:54 + 0:14:52	14-4
14.3 Fraunhofer- und Fresnel-Beugung	14/0:46:46 + 0:29:04	14-5

Kapitel 0

Einführung

Dauer: 0:14:24

Elektrodynamik

Prof Niklas Beisert

<u>I</u>	Statik	~ 5 Wochen
<u>II</u>	Dynamik	~ 2 Wochen
<u>III</u>	Relativitätstheorie	~ 1 Woche
<u>IV</u>	Wellen und Strahlung	~ 5 Wochen

Themen

- Theorie des Elektromagnetismus
- Mechanik \rightarrow Felder, ∞ viele Freiheitsgrade
 - Felder, Vektoranalysis
 - Partielle Differentialgleichungen
 - Randwertprobleme
 - Greensche Funktionen
 - Distributionen; delta-Funktion etc.
 - Fourier-Transformation
 - Symmetrien
 - Redundante Beschreibungen in der Physik
 - Raumzeit, Geometrie
 - Signalübertragung, Schaltkreise, Energietransport
 - Optik, Wellen, Vorbereitung zur Quantenmechanik
 - Fernwirkung vs. Lokalität in der Physik, Kausalität
 - Baustein im Verständnis der klassischen Welt

Kapitel 1

Grundlagen der Elektrostatik

Dauer: 2:42:12

1. Grundlagen der Elektrostatik

1.1. Grundbegriffe

Elektrische Ladung - Eigenschaft von Materie

Coulomb-Gesetz Annahme: Punktförmige Körper / Ladung

- zwei geladene punktförmige Körper.
- Positionen x_1 , x_2 , Ladungen q_1 , q_2
- Kraft zwischen Körpern ist wie folgt beschrieben:
 - proportional zum Produkt $q_1 \cdot q_2$
 - entlang der Verbindungslinie $x_1 - x_2$
 - proportional zum Abstandsbetrag $x_1 - x_2$ zur Potenz -2
 - abstoßend für Ladungen mit gl. Vorzeichen; anziehend für untersch.

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = + \frac{q_1 q_2 (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|^3}$$



SI Einheiten q_1, q_2 vorzeichenbehaftete Ladungen
Einheit Coulomb $C = A \cdot s$ Ampere-sch.

Dielektrizitätskonstante $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ A}^2 \text{ s}^4 / \text{kg m}^3$

Superpositionsprinzip

Für viele Ladungen q_i an Orten x_i gilt dass die res. Kraft die vektorielle Summe der paarweisen Kräfte ist (Coulomb-Ges.)

$$\vec{F}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_i \cdot q_j (\vec{x}_i - \vec{x}_j)}{4\pi \epsilon_0 \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|^3}$$

- Fernwirkung
- teilweise / scheinbar instantan.

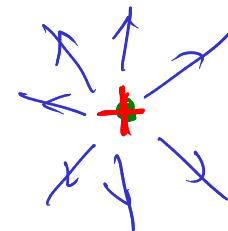
Elektrisches Feld $\vec{E}(x)$

überträgt Kräfte auf Ladungen in lokaler Weise:
Teilen obige Relation wie folgt auf

$$\vec{F} = q \vec{E}(x) \quad \vec{E}(x) = \sum_{j=1}^N \frac{q_j (x - \bar{x}_j)}{4\pi\epsilon_0 \|x - \bar{x}_j\|^3}$$

($\vec{F}_i = q_i \vec{E}(x_i)$)

Elektrisches Feld existiert unabh. von Ladungen an jew. Ort.



Vorsicht bei Punktladungen:

- res. Kraft einer Ladung auf sich selbst $\rightarrow 1/0 \sim \infty$
- man betrachte \vec{E} als Kraft auf Testladung q die selbst kein Feld erz.

Kontinuierliche Ladungsverteilung

Ladungsdichte $\rho(x)$ (Grenzfall ∞ vieler, ∞ kleiner Punktladungen)

$$\vec{E}(x) = \int d^3y \frac{\rho(y) (\vec{x} - \vec{y})}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{x} - \vec{y}\|^3} \quad d^3y = (dy)^3 = d^3y = d^3V$$

Zwei mathematische Eigenschaften:

$$1) \quad \operatorname{div} \vec{E} := \vec{\partial} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \nabla_i = \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

divergenzfrei / quellfrei

$$2) \quad \operatorname{rot} \vec{E} := \vec{\partial} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (\text{Kreuzprodukt in } \mathbb{R}^3)$$

1) gilt nur außerhalb von Ladungsverl.

2) gilt überall.

Beweis: Superpositionsprinzip \rightarrow genügt eine Punktlad. betr.

$$\vec{E} = \frac{q \vec{x}}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{x}\|^3}$$



$$y=0$$

Ausrechnen

$$\partial_i E_j = \frac{q(\delta_{ij} \vec{x}^2 - 3x_i x_j)}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{x}\|^5} \quad \text{für } \vec{x} \neq 0$$

Kronecker-delta / Einheitsmatrix $\delta_{ii} = 1$
 $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$

Divergenz \vec{E} $\vec{\partial} \cdot \vec{E} = \sum_{i=1}^3 \partial_i E_i$ $\delta_{ij} \rightarrow 3$ $x_i x_i \rightarrow \vec{x}^2$

$$\vec{\partial} \cdot \vec{E} = 0$$

Rotation \vec{E} $\vec{\partial} \times \vec{E} = 0$ weil Kreuzprodukt anti-symmetrisch
 $\partial_i E_j$ ist symmetrisch $i \leftrightarrow j$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \int d^3y \frac{\rho(y) (\vec{x} - \vec{y})}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{x} - \vec{y}\|^3} + \sum_{j=1}^N \frac{q_j (\vec{x} - \vec{x}_j)}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{x} - \vec{x}_j\|^3}$$

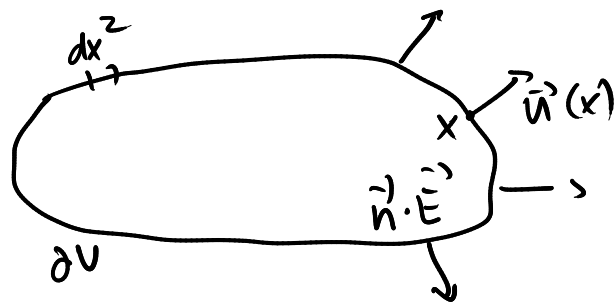
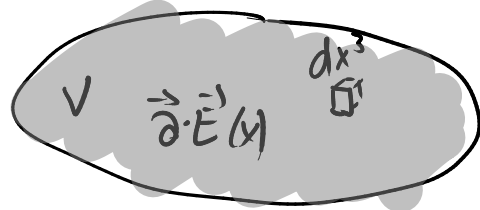
$$\vec{\partial} \cdot \vec{E} = 0 \quad ? \quad \vec{\partial} \times \vec{E} = 0 \quad ? \quad \text{Beispiel } \vec{E}(\vec{x}) = \frac{q\vec{x}}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{x}\|^3}$$

Quellen

Gilt $\vec{\partial} \cdot \vec{E} = 0$ auch an Ort der erzeugenden Ladungen?

Satz von Gauß für das Vektorfeld \vec{E} Bereich $V \subset \mathbb{R}^3$, Rand ∂V

$$\int_V d^3x \vec{\partial} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \oint_{\partial V} dx^2 \overset{\text{Normalvektor von } \partial V \text{ bei } \vec{x}}{\vec{n}(\vec{x})} \cdot \vec{E}(\vec{x})$$



Speziell wähle Sphäre ∂V , Kugel V mit Radius R um $x=0$

$$\int_{|\vec{x}| \in R} dx^3 \vec{\partial} \cdot \vec{E} \stackrel{G.}{=} \oint_{|\vec{x}|=R} dx^2 \vec{n} \cdot \frac{q \vec{x}}{4\pi \epsilon_0 R^3} = \oint_{|\vec{x}|=R} d^2\Omega R^2 \frac{\vec{x}}{R} \cdot \frac{q \vec{x}}{4\pi \epsilon_0 R^3} \quad \vec{x}^2 = R^2$$

$$= \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \oint d^2\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad \text{Aber } \vec{\partial} \cdot \vec{E} = 0 \text{ für } \vec{x} \neq 0.$$

$\vec{\partial} \cdot \vec{E}$ ist seltsame Fkt $\begin{cases} 0 & \text{für } \vec{x} \neq 0 \\ ? & \text{für } \vec{x} = 0 \end{cases}$ so dass Gauß gilt

$$\text{Gaußsches Gesetz (diff. Form)} \quad \vec{\partial} \cdot \vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0} \delta^3(x) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x)$$

\leadsto delta-Funktion.

$$\rho(x) = q \delta^3(x)$$

formelle Ladungsdichte eines Partikels.

Gaußsches Gesetz (integraler Form)

$$\int dx^3 \vec{\partial} \cdot \vec{E} = \oint_{\partial V} dx^2 \vec{n} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_V \quad Q_V := \int_V dx^3 \rho(x)$$

delta-Distribution

eine Funktion $\delta^3: \mathbb{R}^3 \rightarrow ?$ mit Eigenschaft

$\delta^3(x) = 0$ für $\vec{x} \neq 0$ nach Gauß soll gelten

$$\vec{\partial} \cdot \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} = 4\pi \delta^3(x)$$

$$\Rightarrow \int_V dx^3 \delta^3(x) f(x) = \begin{cases} f(0) & \text{falls } 0 \in V \text{ (Distribution)} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

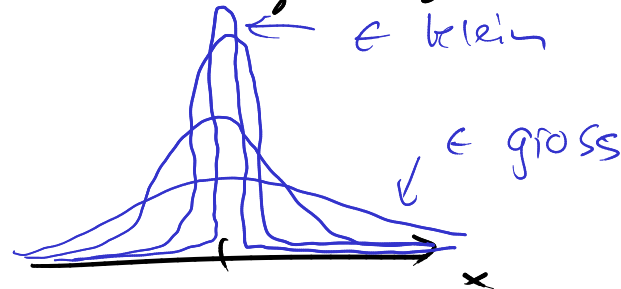
wendet Testfkt
 $f(x)$ lin. aus.

delta-fkt als Grenzwert stark konzentrierter Ladung ansehen

$$\delta_\epsilon(x) := \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta_\epsilon(x) = 1$$

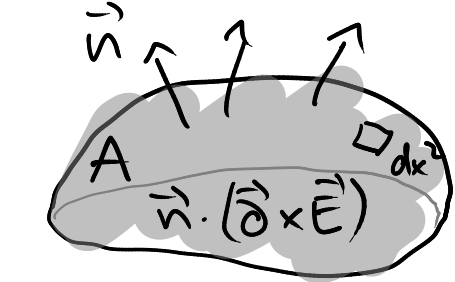
$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(x) = \delta(x)$ mit gewünschter Eigenschaft



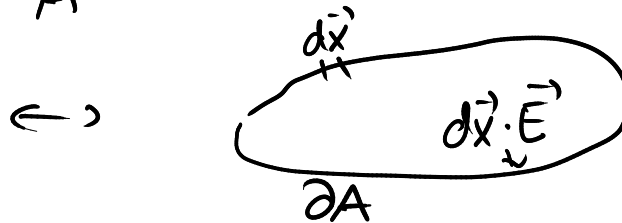
1.2 Das Elektrostatische Potential

Rotationsfreiheit bei $x=0$? $\vec{\partial} \times \vec{E} = 0$ gilt auch bei $\vec{x} = 0$

Satz von Stokes



$$\int_A dx^2 \vec{n} \cdot (\vec{\partial} \times \vec{E}) = \oint_{\partial A} d\vec{x} \cdot \vec{E}$$



Wähle eine geschlossene Kurve und dazu eine Fläche deren Rand sie bildet. Kurve geht nicht durch 0.

Da $\vec{\partial} \times \vec{E} = 0$ fast überall gilt $\oint_{\partial A} d\vec{x} \cdot \vec{E} = 0$

Wir können mit A in bel. Richtung durch $x=0$ fahren

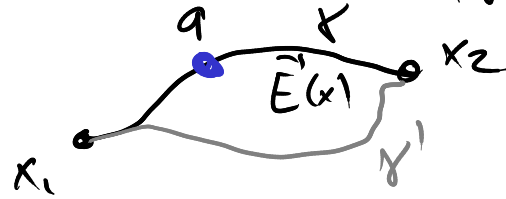
$\Rightarrow \vec{\partial} \times \vec{E} = 0$ gilt auch bei $x=0$ / in Ladungsverf.

Eigenschaft des El. Feldes; $\vec{\partial} \times \vec{E} = 0$ (diff) $\oint d\vec{x} \cdot \vec{E} = 0$ (Integral)

Implikation für Arbeit die ein el. Feld verrichten kann.

Testladung q bewegt entlang einer Kurve γ (offen / geschlossen)

zu verrichtende Arbeit ΔW



$$\Delta W = -q \int d\vec{x} \cdot \vec{E}$$

Arbeit ist unabh. von Weg γ , nur abh. von Endpunkten.

da zuges. Pfad $\gamma^{-1}\gamma'$ ist geschlossen

$$0 = \Delta W[\gamma'\gamma^{-1}] = \Delta W[\gamma'] - \Delta W[\gamma]$$

$$\Rightarrow \Delta W = q\Phi(x_2) - q\Phi(x_1)$$

$\Phi(x)$ ist das elektrostatische Potential

Beziehung zum el. Feld

$$\vec{E}(x) = -\vec{\partial}\phi(x) = -\text{grad}\phi(x)$$

$$\int d\vec{x} \cdot \vec{E} = - \int d\vec{x} \cdot \vec{\partial}\phi = -\phi(x_2) + \phi(x_1)$$

rotationsfreies Vektorfeld lässt sich schreiben als
gradient eines Skalarfeldes.

Neuer Freiheitsgrad: Konstante

Gewöhnliche festgelegt durch $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) = 0$

Elektrisches Potential für allg. Ladungsverteilung $\rho(x)$, $q_i \vec{x}_i$

$$\phi(x) = \int d^3y \frac{\rho(y)}{4\pi\epsilon_0 \|x-y\|} + \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 \|x-x_j\|}$$

Konstante so gewählt dass $\phi(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$

Poisson Gleichung Laplace operator

$$\frac{1}{\epsilon_0} \rho(x) = \vec{\partial} \cdot \vec{E} = -\vec{\partial} \cdot \vec{\partial} \phi(x) = -\Delta \phi(x) \quad \text{Laplace-Gleichung}$$

Laplace Operator $\Delta := \vec{\partial} \cdot \vec{\partial} = \text{div grad} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2$

obiges Potential $\phi(x)$ löst Lapl./Poisson Gl. für geg. $\rho(y)$

1.3 Energie des Elektrostatischen Feldes

Welche Energie ist in einer Ladungsverteilung / Feld enthalten?

bringe N Ladungen q_i von ∞ zu Zielposition x_i . Arbeit?

$$W = \sum_{i < j = 1}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 \|x_i - x_j\|} = \sum_{i \neq j = 1}^N \frac{q_i q_j}{8\pi\epsilon_0 \|x_i - x_j\|}$$

für kont. Ladungsverteilung ρ

$$W = \int dx^3 \int dy^3 \frac{\rho(x) \rho(y)}{8\pi\epsilon_0 \|x - y\|} = \int dx^3 \frac{1}{2} \rho(x) \phi(x)$$

$$= -\frac{1}{2} \epsilon_0 \int dx^3 \Delta \phi(x) \phi(x) \quad \rightarrow = 0 \text{ (Rand/Annahme)}$$

part. Int.

Keiner
Randf.

$$\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \frac{1}{2} \epsilon_0 \int dx^3 (\vec{\nabla} \phi)^2 - \frac{1}{2} \epsilon_0 \int dx^3 \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla} \phi)$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 \int dx^3 \vec{E}^2 \leftarrow \text{Potentielle Energie im Feld. } W \geq 0$$

1.4 Beispiele

Kugelsym. Ladungsverf.

$$\Rightarrow \vec{E}(x) = \vec{n} E(r)$$

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\rho(\vec{x}) = \rho(r) \quad r = \|\vec{x}\|$$

$$\vec{n}(x) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$$

Ebenso $\phi(\vec{x}) = \phi(r)$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi \quad \leadsto \quad E(r) = -\phi'(r) \quad \text{Reduktion auf 1 Dim.}$$

$$\text{Div. von } \vec{E} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = E' + \frac{2}{r} E$$

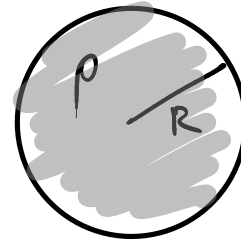
$$\Rightarrow \text{Differentialgl. (in 1 var.):} \quad E' + \frac{2}{r} E = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\text{Integrale Form} \quad 4\pi r^2 E(r) = \dots = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r ds \, 4\pi s^2 \rho(s)$$

$$\text{Außenraum einer ab } r > R \text{ begrenzten Ladungsverf. } \rho(r) = 0 \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \quad \text{für } r > R$$

Homogen geladene Kugel

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi R^3} & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$



$$\int_0^r ds \, 4\pi s^2 \rho = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} r^3 \rho & r < R \\ \frac{4\pi}{3} R^3 \rho & r > R \end{cases}$$

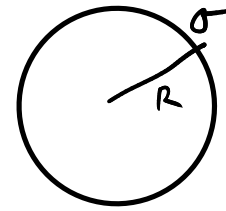
$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} r/R^3 & r < R \\ 1/r^2 & r > R \end{cases}$$

Potential $\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} -\frac{1}{2}r^2/R^3 + \frac{3}{2}R & r < R \\ 1/r & r > R \end{cases}$

Energie $W = 4\pi\epsilon_0 \frac{1}{2} \int_0^\infty dr \, r^2 E^2 = \int_0^R + \int_R^\infty = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{5R} + \frac{1}{R} \right) = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}$

Homogen geladene Kugeloberfläche

$$\rho(r) = \sigma \delta(r-R), \quad \sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$



$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \begin{array}{ll} 0 & r < R \\ 1/r^2 & r > R \end{array} \right.$$

unstetig! Sprung $\sim \sigma$

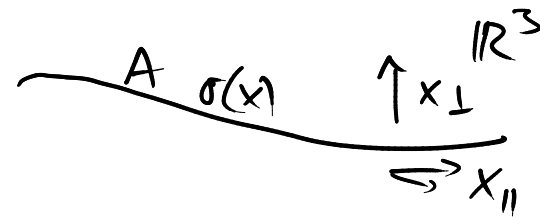
$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \begin{array}{ll} 1/R & r < R \\ 1/r & r > R \end{array} \right.$$

stetig

Energie $W = Q^2 / (8\pi\epsilon_0 R)$

Flächenartige Ladungsverteilung

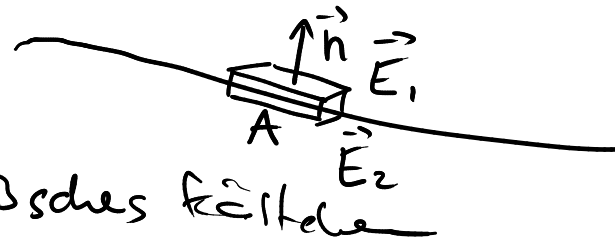
$$\rho(x) = \sigma(x_{||}) \delta(x_{\perp})$$



Feld in der Nähe der Fläche?

nahelzu

σ, E sei konstant im Kästchen: Gaußsches Kästchen

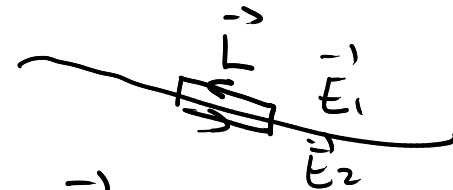


Fluss von \vec{E} aus Kästchen näherungsweise

$$A \vec{n} \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \stackrel{\text{Gauß}}{=} \frac{1}{\epsilon_0} \cdot Q = \frac{1}{\epsilon_0} A \sigma$$

$$\Rightarrow E_{\perp} := \vec{n} \cdot \vec{E} \text{ springt um } \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Tangentialkomp. $\vec{E}_{||} = \vec{E} - \vec{n} E_{\perp}$ Stokessche Schleife



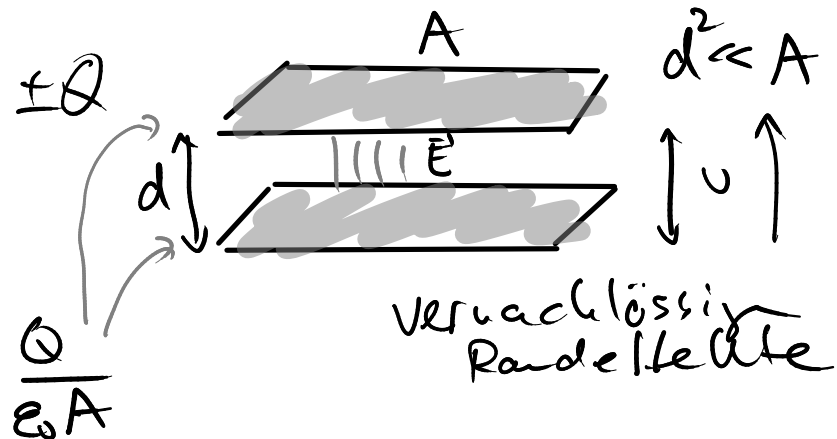
Stokes: $\vec{L} \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$, \vec{L} frei wählbar $\rightarrow E_{||}$ springt nicht stetig

Plattenkondensator

Ladung $\pm Q$

Dichte $\pm Q/A = \sigma$

Normalkomp von E springt um $\pm \frac{Q}{\epsilon_0 A}$



kas. Lösung: Feld im Inneren $E = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$ homogen \downarrow

$E = 0$ aussenhalb

Potential steigt linear um $U = \Delta \Phi = dE = \frac{dQ}{\epsilon_0 A}$

Energie für Feld $W = \frac{1}{2} \epsilon_0 dA E^2 = \frac{dQ^2}{2\epsilon_0 A} = \frac{UQ}{2} = \frac{1}{2} CU^2$

$C := \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$ Kapazität des Kond.
geometrische

Dipol

$$\phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\|\vec{x} - \frac{1}{2}d\vec{n}\|} - \frac{1}{\|\vec{x} + \frac{1}{2}d\vec{n}\|} \right)$$

$\begin{matrix} d \cdot \vec{n} \\ \bullet \leftarrow \bullet \\ -q \quad +q \end{matrix}$

lines $d \rightarrow 0$. naive zu $\phi(x) = 0$

lines mit festgel. Dipolmoment $\vec{p} := q d \vec{n}$ $q \sim \frac{1}{d} \rightarrow \infty$

$$\phi(x) = \frac{q \stackrel{p/d}{=} }{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{\frac{1}{2} d \vec{x} \cdot \vec{n}}{|\vec{x}|^3} - \frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{\frac{1}{2} d \vec{x} \cdot \vec{n}}{|\vec{x}|^3} \mp \dots \right)$$

$$= \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}|^3}$$

ist Differential eine PD. von Punktladung

$$= - \vec{p} \cdot \vec{\partial} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{x}\|}$$

res. Ladungsdichte

$$\rho(x) = - \vec{p} \cdot \vec{\partial} \delta^3(x)$$

Kapitel 2

Randwertprobleme der Elektrostatik

Dauer: 3:01:59

2 Randwertprobleme der Elektrostatik

Eindeutigkeit, Lösungsmethoden des Grundproblems der. El. St.

Grundproblem \rightarrow für geg. Ladungsverteilung u. el. Randbed \rightarrow El. Felder bestimmen.

2.1 Formulierung und Eindeutigkeit

Formulierung: E über ϕ durch $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$

Potential über Poisson-Gl. durch ρ bestimmt $\Delta\phi(x) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(x)$

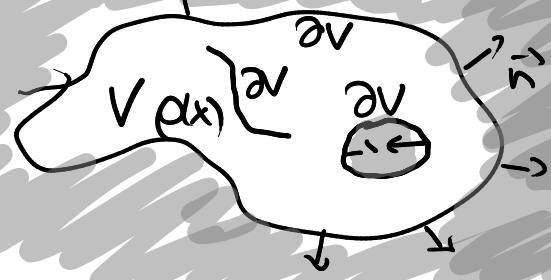
Normalerweise Lsg $\phi(x) = \int d^3y \frac{\rho(y)}{4\pi\epsilon_0 \|x-y\|}$ (asymptotisch Randbeg $\sim 1/r$)

ohne solche Randbed ist Lsg nicht eindeutig

Welche Randbed führen zu eindeutigen Lösungen

Randwertproblem Poisson-Gl. auf kompaktem Gebiet $V \subset \mathbb{R}^3$

mit Rand ∂V , Ladungsverd. $\rho(x)$ für $x \in V$
 gewisse Randbed für ϕ bei ∂V



$$\Delta \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(x) \text{ für } x \in V$$

\vec{n} Normalvektor auf ∂V nach außen.

Eindeutigkeit: betrachte zwei hyp. Lsg $\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2$ sowie $\bar{\psi} := \bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2$

ψ erfüllt hom. Poisson-Gl. $\Delta \bar{\psi} = 0$ (Laplace Gl.)

1. Greensche Identität für zwei skalare Fkt ϕ, ψ

$$\int_V dx^3 (\phi \Delta \psi + \vec{\partial} \phi \cdot \vec{\partial} \psi) = \int_V dx^3 \vec{\partial} \cdot (\phi \vec{\partial} \psi) = \int_{\partial V} dx^2 \vec{n} \cdot (\phi \vec{\partial} \psi)$$

$$\phi = \psi = \bar{\psi}$$

$$\Delta \bar{\psi} = 0$$

$$\int_{\partial V} dx^2 \vec{n} \cdot (\bar{\psi} \vec{\partial} \bar{\psi}) = \int_V dx^3 (\vec{\partial} \bar{\psi})^2 \geq 0$$

Falls linke Seite = 0 $\Rightarrow (\vec{\partial} \bar{\psi})^2 = 0$ für alle $x \Rightarrow \vec{\partial} \bar{\psi} = 0$ für alle x

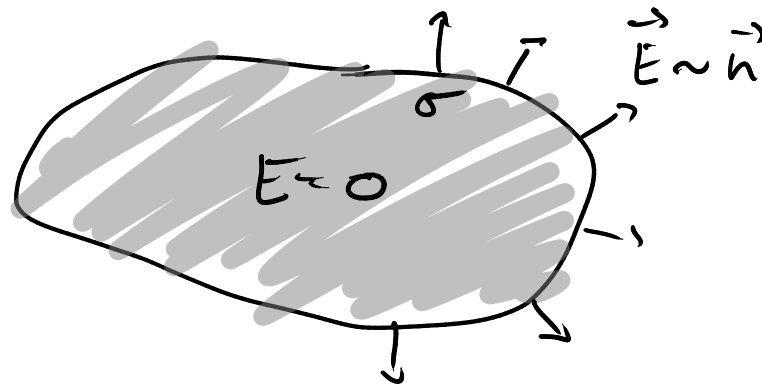
Mögliche Randbed zu Eindeutigkeit

◦ Dirichlet-Randbed: Das Potential Φ wird auf Rand ∂V vorgegeben $\Phi(x) = \omega(x)$ für $x \in \partial V$ ω ist fkt auf ∂V
 $\Rightarrow \Phi(x) = 0$ auf Rand \Leftrightarrow links = 0

◦ Neuman-Randbed: Die Normalableitung von Φ (d.h. $E_{\perp} = \vec{n} \cdot \vec{E} = -\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \Phi$) vorgegeben.

$$E_{\perp} = -\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \Phi(x) = v(x) \text{ für } x \in \partial V, v \text{ ist fkt auf } \partial V$$

hom. Randbed $\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \Phi = 0$



Elektrische Leiter Spezialfall von Dirichlet-Randbed.

Gedanken exp. \rightarrow Im elektrischen Leiter im stationären Fall gilt $E=0$
Ladungsdichte $\rho=0$ im Leiter.

Auf dem Rand sind nicht-triviale Ladungsverteilungen $\sigma(x)$ möglich.

\rightarrow Faradayer Käfig.

Folgende idealisierte Bedingungen:

- Im Leiter verschwindet el. st. Feld $E=0$ (Leiter liegen außerhalb von V)
- Normalkomponente E_{\perp} auf Leiteroberfläche \sim ind. Ladungsdichte σ
- Tangentialkomp. E_{\parallel} gehen stetig über, d.h. $\vec{E} \sim \vec{n}$ auf ∂V
- elektrostatische Pot. auf Leiteroberfläche konstant!

Freier Raum wie in Kap 1.

$V = \mathbb{R}^3$ Randbeg: Asymptotik $x \rightarrow \infty$
nicht-kompakt

$$x \rightarrow \infty \quad \phi(x) \sim \frac{1}{\|x\|} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \sim \frac{1}{\|x\|^2}$$

Eindeutigkeit: wähle eine Fläche A genügend gross
die die Ladungsverteilung umschließt $A \sim r^2$

(siehe Sat 1. Br. Id.)

$$\oint_{\partial V} dx^2 \vec{n} \cdot (\Psi \vec{\nabla} \Psi) \sim r^2 \frac{1}{r} \frac{1}{r^2} \rightarrow 0$$

$\Rightarrow \Psi \rightarrow 0$ wie zuvor Lsg. eindeutig festgelegt.

2.2 Green'sche Funktionen

Green'sche Funktion $G(x, y)$

Potential $\phi(x)$ einer Einheit-Punktladung am Ort y

$$\Delta_x G(x, y) = -\delta^3(x - y)$$

Superposition \rightarrow allg. Ladungsdichte $\rho(y)$

$$\phi(x) \stackrel{?}{=} \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3y G(x, y) \rho(y)$$

Vergleich mit allg. Lösung in $V = \mathbb{R}^3$

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi \|x - y\|}$$

Lösungsansatz 2. Greensche Identität

$$\int_V d\mathbf{y}^3 (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) = \int_V d\mathbf{y}^3 \vec{\partial} \cdot (\phi \vec{\partial} \psi - \psi \vec{\partial} \phi) = \int_{\partial V} d\mathbf{y}^2 \vec{n} \cdot (\phi \vec{\partial} \psi - \psi \vec{\partial} \phi)$$

setze ein $\phi(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y})$, $\psi(\mathbf{y}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ für fest vorg. \mathbf{x}

Voraussetzung: Poisson-Gl $\Delta_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, $\mathbf{x} \in V$

Annahme Poisson-Gl $\Delta \Phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$ $\mathbf{x} \in V$

Randbed. $\Phi = \omega$ $E_{\perp} = -\vec{n} \cdot \vec{\partial} \Phi = \nu$ $\mathbf{x} \in \partial V$

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d\mathbf{y}^3 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) - \oint_{\partial V} d\mathbf{y}^2 \vec{n}_i \vec{\partial}_i G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \omega(\mathbf{y}) \\ &\quad - \oint_{\partial V} d\mathbf{y}^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nu(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

Dirichlet Randbed

Poissonsche Funktion zu D.R. mit ρ und ω (v unbekannt)

Obige Lösungsformel wird explizit falls $G(x,y) \stackrel{\text{hom. D.R. für } G}{=} 0$ für $y \in \partial V$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3y G(x,y) \rho(y) - \oint_{\partial V} d^2y \vec{n}_i \partial_u G(x,y) \omega(y)$$

Bestätige Lösungsformel \Rightarrow zeige $\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ $\Phi = \omega$ auf ∂V

Betrachte zunächst spezielle Ladungsdichte (Lösung)

$$\Phi(x) = G(z,x) \quad (z \text{ fest}) \quad \rho(y) = -\epsilon_0 \Delta_y G(z,y) = \epsilon_0 \delta^3(y-z)$$

hom. D.R.B: $\omega(y) = G(z,y) = 0$

$$\begin{aligned} \text{Einsetzen in Lösung} \quad G(z,x) &= \int d^3y \delta^3(y-z) G(x,y) - \oint_{\partial V} d^2y \dots = 0 \\ &= G(x,z) \Rightarrow G(x,y) = G(y,x) \text{ sym!} \end{aligned}$$

Poisson-Gl. für bel. $\rho(y)$ $x \in V/\partial V$

$$\Delta \Phi(x) = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_V dy^3 \delta^3(x,y) \rho(y) + \int_{\partial V} dy^2 \vec{n}_y \cdot \vec{\partial}_y \delta^3(x,y) \omega(y)$$

$\stackrel{=0}{\downarrow}$

$$= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(x) + 0 = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(x)$$

D. Randbed. für $x \in \partial V$

$\Phi(x) = \dots \stackrel{?}{=} \cancel{0} + \cancel{0}$ subf.1 folgt aus

benötigte Eigenschaft $\vec{n}_y \cdot \vec{\partial}_y G(x,y) \stackrel{\downarrow}{=} -\delta^2(x,y)$ falls $x,y \in \partial V$

damit gilt dann $x \in \partial V$ $\Phi(x) = 0 + \int_{\partial V} dy^2 \delta^2(x,y) \omega(y) = \omega(x)$ D-RB für G, sym

Φ erfüllt Poisson Gl $\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$ und D-RB $\Phi = \omega$ auf ∂V

Neumann Randbedingung

Probleme: Freiheit einer Konstanten • Satz von Gauß

$$v = \vec{n} \cdot \vec{E} = E_{\perp} \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow \rho$$

$$\oint_{\partial V} d\gamma^2 v(\gamma) = \oint_{\partial V} d\gamma^2 \vec{n} \cdot \vec{E}(\gamma) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d\gamma^3 \rho(\gamma) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Ansatz $\vec{n} \cdot \vec{\partial}_y G(x, y) = 0$ für $y \in \partial V$ genügt nicht.

führt zu $Q=0$ was mit $\Delta_y G = -\delta^3$ in Konflikt ist...

Stattdessen genügt

$$\vec{n} \cdot \vec{\partial}_y G(x, y) = -F(y) \quad \text{für } y \in \partial V \quad \begin{array}{l} \text{Satz von} \\ \text{Goursat} \end{array}$$

können $F(y)$ frei wählen aber Einschränkung $\oint_{\partial V} dy^2 F(y) = 1$
 U_0

$$\Phi(x) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V dy^3 G(x, y) \rho(y) + \underbrace{\oint_{\partial V} dy^2 F(y) w(y)}_{- \oint_{\partial V} dy^2 G(x, y) v(y)}$$

Zeige dass $\Phi(x)$ Poisson-Gl und Randbed löst.

hier $G(x, y)$ nicht sym. • Betrachte konkrete Lsg $\Phi(x) = G(z, x)$

$$G(z, x) = G(x, z) + \oint_{\partial V} dy^2 F(y) (G(z, y) - G(x, y))$$

Da f wählbar ist können wir tatsächlich $F(y)$ so wählen dass
 $G(z, x) = G(x, z)$. Betrachte

$$\tilde{G}(x, y) = G(x, y) + k(x).$$

Wähle nun $k(x)$ so dass

$$\begin{aligned}\hat{G}(x, y) &= G(x, y) - \int_{\partial V} dz^2 F(z) G(x, z) \\ \Rightarrow \hat{G}(x, y) &= \hat{G}(y, x)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \hat{\phi}(x)$ erfüllt Poisson (symmetrie)

$$\text{N RB: } \vec{n} \cdot \vec{\partial}_x \hat{G}(x, y) = \delta^2(x - y) - F(x) \text{ für } x, y \in \partial V$$

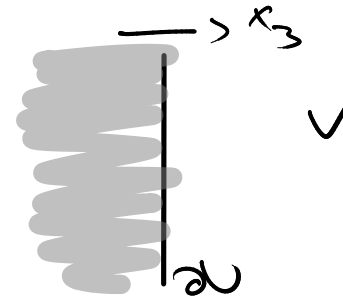
$$\Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{\partial}_x \hat{\phi}(x) \rightarrow v(y) \text{ für } x \rightarrow y, y \in \partial V$$

2.3 Beispiele

Der Halbraum

$$H \subset \mathbb{R}^3 \quad x \in H \Leftrightarrow x_3 > 0$$

$$\partial H \subset \mathbb{R}^2 \quad x \in \partial H \Leftrightarrow x_3 = 0$$



Rand bed. Dirichlet (Leiterplatte)

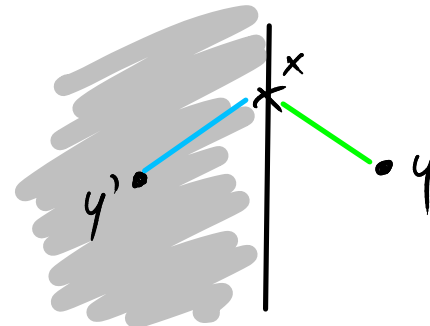
Suchen Greensche Fkt $G(x, y)$ mit $\Delta G = -\delta^3(x-y)$
mit RB $G(x, y) = 0$ für $x_3 = 0$ od. $y_3 = 0$

Für festes $y \in H$ gibt es ein $y' \in \mathbb{R}^3, \notin H$
so dass $\|x-y\| = \|x-y'\|$ für alle $x \in \partial H$

Aussatz: Spiegelladung

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi \|x-y\|} - \frac{1}{4\pi \|x-y'\|}$$

$$\Rightarrow \Delta G = -\delta^3(x-y) + \delta^3(x-y')$$



zusätzlich $G \rightarrow 1/\|x\|$ für $x \rightarrow \infty$

$G(x, y) = 0$ falls $x \in \partial H$

Normalableitung von G auf ∂H ?

induzierte
Flächenladungsdichte

$$y \in \partial H \quad \vec{n} \cdot \vec{\partial}_y G = - \frac{y_3 - x_3}{2\pi \|x - y\|^3}$$

(Normalvektor E_\perp , $\sim \sigma$)

wenn jetzt $x \rightarrow \partial V$ gilt $\vec{n} \cdot \vec{\partial}_y G \rightarrow \frac{0}{\text{endlich}}$

aber falls $x \rightarrow y$ gilt stattdessen $\vec{n} \cdot \vec{\partial}_y G \sim \frac{0}{0^3} = \infty$

Vor Grenzwert über alle y integrieren

$$\oint_{\partial H} dy^2 \vec{n} \cdot \vec{\partial}_y G = -1 \quad \text{falls } x_3 > 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{\partial}_y G = 0 \quad \text{für } x \neq y \quad \text{auf } \partial H$$

$$\Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{\partial}_y G = -\delta^2(x - y)$$

Neuman RB.

$$G(x, y)$$

$$= \frac{1}{4\pi \|x - y\|}$$

$$\times \frac{1}{4\pi \|x - y\|}$$

Außenraum einer Kugel

$D = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \geq R\}$ Leikend \rightarrow Dirichlet Radius R Mitte $\vec{x} = 0$

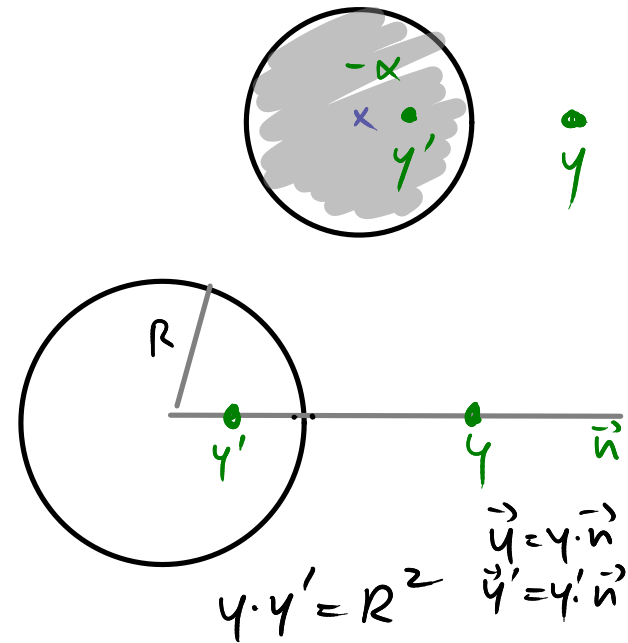
$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi \|x - y\|} - \frac{\alpha}{4\pi \|x - y'\|}$$

zu bestimmen: y' Ort, α rel. Ladung

Eindeutige Lösung für D-Randbed

$$\vec{y}' = \frac{R^2}{\|y\|^2} \vec{y} \quad \alpha = \frac{R}{\|y\|}$$

Abbildung: Inversion an der Sphäre



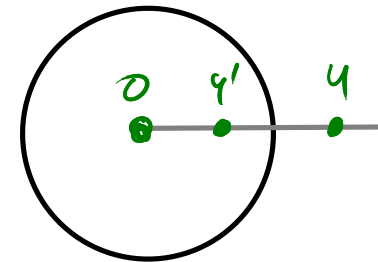
Identität: $\|y\|^2 \|x - y'\|^2 = \|y\|^2 \|x\|^2 - 2R^2 (\vec{x} \cdot \vec{y}) + R^4 = \|x\|^2 \|x' - y\|^2$
 \leadsto Symmetrie von $G(x, y) = G(y, x)$

D-Randbed: $y \in \partial D \Leftrightarrow \|y\| = R \Leftrightarrow y' = y \Rightarrow G(x, y) = 0$.

Incl. Spiegelabbg bei $y' \notin D$. $-\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \Pi$ -Randbed \sim Rand geerdet.

Verwandter Fall: nicht-geerdeter Leiter ∂D , Potential: U
 Verwende Lösungsformel für Pot $\phi(x)$

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{q}{\epsilon_0} G(x, y) - U \int_{\partial D} dz^2 \vec{n} \cdot \vec{\partial}_z G(x, z) \quad \downarrow \text{Gauß} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \|x-y\|} - \frac{qR}{4\pi\epsilon_0 \|y\| \|x-y'\|} + U \frac{R}{\|x\|} \end{aligned}$$



Auch als Lösung von Kugeloberfläche, leitend, isoliert, ungeladen

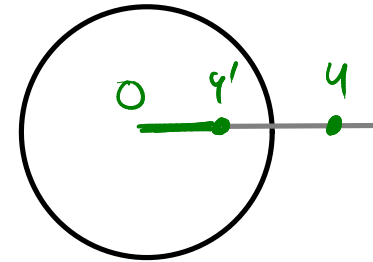
$$\phi(x) = \text{s.o. mit } U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \|y\|}$$

Einfachheit dieser Lösungen besteht auf konformer Symmetrie (2.4)

Beispiel für kompliziertere Lösungen (Spiegelladung)

Außenraum D einer Kugel mit Neumann-Randbed.

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi \|x - y\|} + \frac{R}{4\pi \|y\| \|x - y'\|} + \frac{1}{4\pi R} \log \frac{\|y\| \|x - y'\| + \vec{y} \cdot (\vec{x} - \vec{y}')}{\|y\| \|x\| + \vec{y} \cdot \vec{x}}$$



- 1 Spiegelladung mit gleichen Vorzeichen.

$$\vec{n} \cdot \vec{\partial}_n G = 0$$

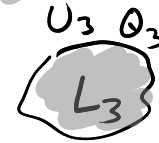
- lineare Ladungsverteilung $-\frac{1}{R}$ von 0 bis y'
 Besantladung im Inneren ist $= 0$. \Rightarrow Neumann Randbed. exakt

Kapazitätskonstanten / allgemeine Kondensatoren

N metallische Leiter L_i ,



\bar{L} umgebender Raum für RW-Problem. Ungeladen
Potential auf ∂L_i gegeben ist durch U_i



\bar{L}

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^N U_i \Gamma_i(x) \quad \text{bi-lin.} \quad \Gamma_i(x) = \delta_{ij} \quad \text{für } x \in \partial L_j$$

Energie (Feld) $W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{\bar{L}} dx^3 (\vec{\partial} \phi)^2 \stackrel{\downarrow}{=} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N C_{ij} U_i U_j$

und Kapazitätskonst. $C_{ij} = \epsilon_0 \int_{\bar{L}} dx^3 \vec{\partial} \Gamma_i \cdot \vec{\partial} \Gamma_j$

Matrix C_{ij} symmetrisch, positiv definit denn $W \geq 0$

Kap.konst C_{ij} beschreiben Relation zwischen U_i und Q_j

Betrachte Energiebez W

Poisson/Laplace Gl $\Delta\phi = 0$ auf \bar{L}

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{\bar{L}} dx^3 \vec{\partial} \cdot (\phi \vec{\partial} \phi) - \overset{\downarrow}{0}$$
$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 \sum_{i=1}^N \int_{\partial L_i} dx^2 \overset{\text{konst. } U_i}{\downarrow} \phi(x) \vec{n} \cdot \vec{\partial} \phi(x)$$

$$= -\frac{1}{2} \epsilon_0 \sum_{i=1}^N U_i \int_{\partial L_i} dx^2 \vec{n} \cdot \vec{\partial} \phi(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N U_i Q_i$$

Beziehung für W von Kondensatoren:

$$Q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} U_j$$

2.4 Konforme Symmetrie

Einfachheit der Potentiale für Kugelgeometrie liegt an Symmetrie

Typische Sym: Translation (Homogenität in Raum),
Zeitinvarianz (Energieerhaltung), Rotationen (Vektorschwebw.)

Zusätzlich hier: konforme Symmetrie \leftrightarrow Inversion an Sphäre

$$\Delta \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad \vec{x}' = \frac{R^2}{\|\vec{x}\|^2} \vec{x}$$

k. Transformation: $\Phi'(x) = \frac{R}{\|\vec{x}\|} \phi(x'), \quad \rho'(x) = \frac{R^5}{\|\vec{x}\|^5} \rho(x')$

dann gilt $\Delta \Phi' = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho' \Rightarrow$ Symmetrie der Feldgl.

Euklidische Transf. (Translation, Rotation) zusammen
mit Inversion bilden konforme Gruppe

- Inversion \circ Translation \circ Inversion \rightarrow spez. konf. Transf. (konf.)
- Skalentransformationen $(\text{Inv}_R \circ \text{Inv}_{R'})$ $\vec{x}' = a \cdot \vec{x}$

konforme Transformationen:

- erhalten Winkel zwischen zwei Kurven!
- erhalten Länge nicht!



\rightarrow Ebenen werden auf Ebenen / Sphären abgebildet
Sphären \rightarrow Sphären / Ebenen

Sehr interessant: konforme Symmetrie in 2D \sim komplexer Analysis

$$\mathbb{R}^2 \leftrightarrow \mathbb{C} \quad z = x + iy \in \mathbb{C} \quad \bar{z} = x - iy \in \mathbb{C} \quad \Delta = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

$$\text{konf. Abb. verallg.} \quad z \rightarrow F(z) \quad \bar{z} \rightarrow \overline{F(z)}$$

Kapitel 3

Elektrostatik in Kugelkoordinaten

Dauer: 3:13:07

3 Elektrostatik in Kugelkoordinaten

Zwei Lösungsansätze für LW-Probleme sind Separation der Variablen und Entwicklung nach geeigneten Eigenfunktionen.

Hier Rotationsymmetrie von gew. Kont. \rightarrow Kugelflächenfunktionen

3.1 Separation der Variablen

Laplace Gleichung in kart. Koord. $\vec{x} = (x, y, z)$

$$\Delta \phi \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \right) \phi = 0$$

Sep. d. Var Ansatz so dass ϕ als Produkt von Fkt. von Teilmenge der Koord. geschrieben wird.

B: wenn $\phi(\vec{x}) = \phi_{xy}(x, y) \phi_z(z)$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{\phi_{xy}} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right) \phi_{xy}}_{2D (x, y) \stackrel{!}{=} \text{const!}} + \underbrace{\frac{1}{\phi_z} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \phi_z}_{1D (z) \stackrel{!}{=} -\text{const}} = 0$$

Eigenfunktionen

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \phi_{xy} = \lambda \phi_{xy}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \phi_z = -\lambda \phi_z$$

Problem in zwei einfachere Teilprobleme aufgeteilt
Kopplung ist über Eigenwert von lin. ^{Diff.} Op. λ

Besonders geeignet für symmetrische Konfigurationen.

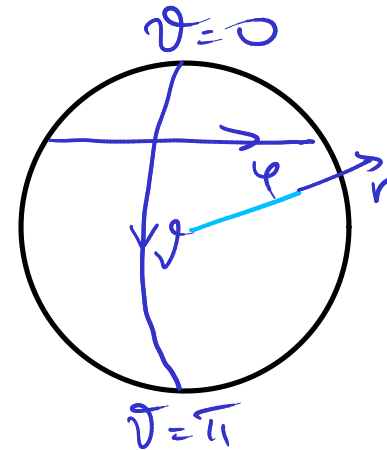
oder auch allgemein wenn man unendliche Linearkomb.
aller Eigenfunktionen in Betracht zieht.

3.2 Kugelkoordinaten

Verschiedene Koordinatensysteme:

- kartesische Koordinaten
- Zylinderkoordinaten
- Kugelkoordinaten

radiale k. $r \geq 0$
 Polarwink. $0 \leq \vartheta \leq \pi$
 Azimutw. $\varphi: 2\pi$ -per.



$$r = \|x\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vartheta = \arccos z/r$$

$$\varphi = \arctan y/x + \pi \theta(-x) \operatorname{sign} y$$

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \vartheta$$

Jacobi-Matrix

Zeilen $\rightarrow \partial(r, \vartheta, \varphi)$

Spalten $\rightarrow \partial(x, y, z)$

$$= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi & r \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \\ \cos \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi & -\sin \vartheta \\ -\sin \varphi / \sin \vartheta & \cos \varphi / \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^2$$

Volumenelement $dx^3 \sim$ Integral in 3D

$$\int dx^3 = \int_0^\infty dr r^2 \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi = \int_0^\infty dr r^2 \int_{S^2} d^2\Omega$$

Die Gesamtfäche von S^2 ist $\int d^2\Omega = 4\pi = 2\pi \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta$

3.3 Kugelflächenfunktionen

Basis von Funktionen so dass Laplace-Gl. in Kugelkoordin. separiert

Separation $\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + \frac{2}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2} \vec{L}^2$

$$\vec{L}^2 := - \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta}\right)^2 - \cot\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{1}{\sin^2\vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^2$$

Diracysquadrat von \vec{L} , z-komp. $L_z = -i \frac{\partial}{\partial \varphi} : [\vec{L}^2, L_z] = 0$

Eigenfunktionen von \vec{L}^2 (und L_z) \rightarrow Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell m}$

$$\vec{L}^2 f(\vartheta, \varphi) = \lambda f(\vartheta, \varphi)$$

Sep. d. Var: $f(\vartheta, \varphi) = g(\vartheta) \cdot h(\varphi)$ \swarrow muss unabh. von φ sein!

$$-\frac{g''(\vartheta)}{g(\vartheta)} - \cot \vartheta \frac{g'(\vartheta)}{g(\vartheta)} - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{h''(\varphi)}{h(\varphi)} = \lambda$$

Lösung für h : $h_m(\varphi) = e^{im\varphi} \quad \frac{h''(\varphi)}{h(\varphi)} = -m^2$

zusätzlich (Randbed.) h muss 2π -per.! $m \in \mathbb{Z}$

$h(\varphi)$ ist Eigenfunktion von L_z mit E-W m

Beachte h ist komplexe Fkt. Φ in E.S. ist reell.

$$\operatorname{Re} e^{im\varphi} = \cos(m\varphi) \quad \operatorname{Im} e^{im\varphi} = \sin(m\varphi) \quad (m \neq 0)$$

$$-\frac{y''(\vartheta)}{y(\vartheta)} - \cot \vartheta \frac{y'(\vartheta)}{y(\vartheta)} + \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} = \lambda.$$

Variablensubst. $u = \cos \vartheta \quad -1 \leq u \leq 1$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} = \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \frac{\partial}{\partial u} = -\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial u} = -\sqrt{1-u^2} \frac{\partial}{\partial u} \quad P(u) = y(\vartheta)$$

$$\text{Dgl: } \left((u^2-1) \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^2 + 2u \frac{\partial}{\partial u} - \frac{m^2}{u^2-1} - \lambda \right) P(u) = 0$$

Verallg. Legendre-Gl. \rightarrow assoz. Legendre-Fkt.

Legendre-Polynome als Lsg. der Legendre-Gl ($m=0$)

$$\left((u^2-1) \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^2 + 2u \frac{\partial}{\partial u} - \lambda \right) P(u) = 0$$

Probleme bei $u = \pm 1$ wegen Vorfaktor (u^2-1) vor $\left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^2$

Vermeidung der Divergenz von $P(u)$ bei $u = \pm 1 \Rightarrow$ Polynome

Legendre-Polynome $P_l(u)$ lösen L.G. nur für best EW λ ,

Eigenschaft der L.P

$$\int_{-1}^{+1} du u^k P_l(u) = 0 \quad \text{für alle } 0 \leq k < l$$

bis auf Vorfaktor.

bestimmt die $P_l(u)$ als Pol. l -ten Grades rekursiv!

von $(l+1)$ Koeffizienten in P_l sind l eingeschränkt durch Bed.

Bew dass $P_\ell(u)$ die Legendre Gleichung lösen. λ ?

$$\mathcal{L} P_\ell(u) = \lambda P_\ell(u) \quad \leftarrow \text{Wirkt auf alles rechte}$$

$$\mathcal{L} := (u^2 - 1) \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^2 + 2u \frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) \frac{\partial}{\partial u}$$

• $\mathcal{L} P_\ell$ ist wieder Polynom ℓ -ten Grades mit selbiger Eigenschaft.

• betrachte zunächst \mathcal{L} auf führendes Glied u^ℓ

$$\mathcal{L} u^\ell = \ell(\ell+1) u^\ell + O(u^{\ell-1}) \Rightarrow \lambda = \ell(\ell+1)$$

• Erfüllt $\mathcal{L} P_\ell(u)$ die Eigenschaft?

$$\int_{-1}^{+1} du u^k \mathcal{L} P_\ell(u) = \int_{-1}^{+1} du u^k \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) \frac{\partial}{\partial u} P_\ell(u)$$

$$\stackrel{\text{PT}}{=} \underbrace{u^k (u^2 - 1) P_\ell'(u)}_{=0} \Big|_{u=-1}^{u=+1} - \int_{-1}^{+1} du k u^{k-1} (u^2 - 1) \frac{\partial}{\partial u} P_\ell(u)$$

$$DI = \underbrace{-k u^{k-1} (u^2-1) P_l(u)}_{=0} \Big|_{u=-1}^{u=+1} + \int_{-1}^{+1} du \underbrace{k \left(\frac{d}{du} u^{k-1} (u^2-1) \right)}_{\text{Grad } k < l} P_l(u) \Big|_{u=-1}^{u=+1} = 0$$

$\Rightarrow P_l(u)$ lösen Legendre-Gl. mit Eigenwert $\lambda = l(l+1)$

Legendre-Polynome werden Rodrigues-Formel erzeugt:

$$P_l(u) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{du} \right)^l (u^2-1)^l$$

Einfach: $\int du u^k P_l(u) = 0$ gilt mittels P.I.

Die $P_l(u)$ erfüllen folgende Orthogonalitätseigenschaft

$$\int_{-1}^{+1} du P_k(u) P_l(u) = 0 \quad \text{für } k \neq l$$

Normierung $\int_{-1}^{+1} du P_l(u)^2 = \frac{2}{2l+1}$

Für versch. Legendre-Gl. erhält man als zulässig Lsg: $m \neq 0 \quad |m| \leq l$

$$P_l^m(u) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-u^2)^{m/2} \left(\frac{d}{du} \right)^{l+m} (u^2-1)^l$$

Orthogonalität / Normierung

$$\int_{-1}^{+1} du P_l^m(u) P_{l'}^m(u) = \delta_{l,l'} \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}$$

Kugelflächenfkt

$Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$

$$Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{(2l+1) \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

Eigenwerte:

$$L_z^2 Y_{l,m} = m^2 Y_{l,m} - \sin^2(m\varphi)$$

$$L^2 Y_{l,m} = l(l+1) Y_{l,m}$$

$$L_z Y_{l,m} = m Y_{l,m} - e^{im\varphi}$$

$$l \in \mathbb{Z}_0^+ \quad m \in \mathbb{Z} \quad \{|m| \leq l \quad m \in \{-l, -l+1, \dots, l-1, l\}\}$$

$$Y_{0,0} = 1 \quad Y_{1,0} = \sqrt{3} \cos \vartheta = \sqrt{3} \frac{z}{r}$$

$$Y_{1,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{2}} \sin \vartheta e^{\pm i\varphi} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{x \pm iy}{r}, \dots$$

3.4 Orthogonalität und Vollständigkeit

$Y_{\ell m}$ erfüllen die O. Eigenschaft:

$$\frac{1}{4\pi} \int d\Omega \sin\vartheta \, Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) Y_{\ell' m'}^*(\vartheta, \varphi) = \delta_{\ell, \ell'} \delta_{m, m'}$$

Kugelflächenfkt bilden eine vollst. Basis von $L^2(S^2)$

Quadratintegrable Fkt auf S^2

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) Y_{\ell' m'}^*(\vartheta', \varphi') = \frac{4\pi}{\sin\vartheta} \delta(\vartheta - \vartheta') \delta(\varphi - \varphi')$$

$$\Rightarrow F(\vartheta, \varphi) = \sum_{\ell, m} Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) f_{\ell, m} \quad \left. \begin{array}{l} \updownarrow \\ \text{bijektive} \\ \text{Abb.} \end{array} \right\}$$

$$f_{\ell, m} = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \, Y_{\ell, m}^*(\vartheta, \varphi) F(\vartheta, \varphi).$$

→ 2D Analogon der Fourier-Transformen für per. Fkt.

3.5 Multipolentwicklung

Ladungsverteilung in der Nähe des Ursprungs $x=0$

$$\rho(x) = 0 \quad \|x\| = r \geq R$$

Bei grossen $r \gg R$

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + O(1/r^2)$$

Kugelkoordinaten

Betrachte Potential bei $r > R \Rightarrow \rho(x) = 0 \Rightarrow$ Laplace-Gl.

$$0 = \Delta \Phi = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 \Phi + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \Phi - \frac{1}{r^2} L^2 \Phi.$$

Entwicklung von Φ in $Y_{\ell,m}$: Koeffizienten als Fkt von r

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{\ell, m} \Phi_{\ell, m}(r) Y_{\ell, m}(\vartheta, \varphi)$$

Basis

Einsetzen: $\sum_{\ell, m} Y_{\ell, m} \left(\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \ell(\ell+1)}_{=0} \right) \Phi_{\ell, m}(r) = 0.$

$$\Rightarrow \left(\left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} l(l+1) \right) \Phi_{l,m}(r) = 0$$

homogen in r (d.h. $\sim 1/r^2$) Ansatz $\Phi_{l,m} \sim r^\alpha$

$$0 = r^{\alpha-2} (\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - l(l+1)) = r^{\alpha-2} (\alpha(\alpha+1) - l(l+1))$$

2 Lösungen: $\alpha = l$ $\alpha = -l-1$ $l \geq 0$

$\Phi \rightarrow \infty$ für $r \rightarrow \infty$ $\Phi \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$

Koeffizient von $r^\alpha \rightarrow$ Multipolmomente

allg. Lsg.

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l,m} \frac{Q_{l,m}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(2l+1)r^{l+1}} Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$$

$Q_{0,0} = Q$ $Q_{l,m}$ $l=1, 0, \pm 1$ sind 3 Dipolmomente $\vec{P} \dots$

folgen aus
Ladungsvert. ρ

$$Q_{l,m} = \int d^3\Omega dr r^{2+l} Y_{l,m}^*(\vartheta, \varphi) \rho(r, \vartheta, \varphi)$$

Formel für $Q_{l,m}$ folgt aus Entwicklung von $\frac{1}{\|x-x'\|}$ für $\|x\| > \|x'\|$ und der Formel für Φ in freien asympt. Raum.

$$\frac{1}{\|x-x'\|} = \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{l+1}} Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) Y_{l,m}^*(\vartheta', \varphi')$$

Zeige diese Formel mittels Additionstheorie von $Y_{l,m}$ (Winkel zwischen x, x' von Ursprung)

$$\frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) Y_{l,m}^*(\vartheta', \varphi') = P_l(\cos \gamma)$$

reduziert Ausdruck zu

$$\frac{1}{\|x-x'\|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \gamma) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \vartheta)$$



Winkel von x zu Nordpol.

Betrachte x' auf pos. z-Achse liegt

ϑ -Abh: Bei Entwicklung als Lsg. der Laplace-Gl bei $x'=0$ gilt dass nur $m=0$ beibehält

r -Abh folgt aus $\vartheta=0$, verwandle $P_l(\cos \vartheta=1) = 1$ $\frac{1}{\|x-x'\|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} = \frac{1}{r-r'}$.

Kartesische Koordinaten

Multipolentwicklung in kartesischen Koord. für niedrigste Q.

Def. einer allg. Ladungsverd. $\Phi(x) = \int d^3y \frac{\rho(y)}{4\pi\epsilon_0 \|x-y\|}$

Entwickle $1/\|x-y\|$ für $\|x\| \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{\|x-y\|} = \frac{1}{\|x\|} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|x\|^3} + \frac{3(\vec{x} \cdot \vec{y})^2 - \vec{x}^2 \vec{y}^2}{2\|x\|^5} + \dots$$

Dann gilt also

$$\Phi(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \|x\|} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 \|x\|^3} + \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^3 \frac{x_i x_j R_{ij}}{4\pi\epsilon_0 \|x\|^5} + \dots$$

Multipolmom.:

$$Q = \int d^3x \rho(x) \quad \vec{p} = \int d^3x \rho(x) \vec{x} \sim Q_{1,m}$$

$$R_{ij} = \int d^3x \rho(x) (3x_i x_j - \delta_{ij} x^2) \quad \text{Quadrupolten sind symmetrisch, spurlos}$$

R_{ij} hat 5 unabh. Komponenten $\sim Q_{2,m} \quad m = -2, -1, 0, +1, +2$

3.6 - Darstellungen der Rotationsgruppe

$SO(3)$ Gruppe der Rot in 3D.

kugelflächenförmig \sim Darstellung von $SO(3)$.

Rotationsgruppe $SO(3) \sim$ reellen, orthogonale 3×3 Mat. R mit $\det = 1$

rotieren Vektore $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ $\vec{x}' = R\vec{x}$ $x'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} x_j$

Orthogonalität: $R^T = R^{-1}$, keine Spiegelung: $\det R = +1$

Multiplikation erhält Eigenschaften

$$(R_1 R_2)^T = R_2^T R_1^T = R_2^{-1} R_1^{-1} = (R_1 R_2)^{-1}$$

$$\det(R_1 R_2) = \det R_1 \cdot \det R_2 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$1 \in SO(3)$$

R^{-1} Inverse von R .

Darstellungen Abb D von $SO(3)$ in Abb eines Vektorraums V
 Matrixmult. of V quadr. Matrizen

mit Eigenschaft:

$$D(R_1) \cdot D(R_2) = D(R_1 R_2)$$

← Gruppe mult. $SO(3)$

Für Matrixgruppen gibt es immer die def. Darstellung $D_{def} = id$

Für $SO(3)$: $D_{def} =: D_1$ wirkt auf $V = \mathbb{R}^3$

Elemente der Darstellungstheorie:

• Zwei Darst D, D' sind äquiv. wenn Abb T gibt so dass

$$D'(R) = T D(R) T^{-1} \quad \text{Ähnlichkeitstranf. von } R \text{ unabh.}$$

für alle $R \in SO(3)$

• Irreduzibilität: für V gibt es keine Unterräume so dass

D auf diesen als Darstellung wirkt

• Triv. Darst D bildet jedes R auf Einheitsmatrix ab.

• Dimension $\dim D := \dim V$

- direkte Summe zweier Darstellungen D_1, D_2 auf V_1, V_2

$$D := D_1 \oplus D_2 \quad V := V_1 \oplus V_2 = V_1 \times V_2$$

wenn e_1^k, e_2^k Basisvektoren von V_1, V_2 ,

Vereinigung $\{e_1^k, e_2^k\}$ Basis von $V = V_1 \oplus V_2$

$$\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$$

als Darstellung definiert durch

$$D(R) = \begin{pmatrix} D_1(R) & 0 \\ 0 & D_2(R) \end{pmatrix}$$

$$D(R) e_1^k = D_1(R) e_1^k \quad D(R) e_2^k = D_2(R) e_2^k$$

- Tensorprodukt D_1, D_2 auf V_1, V_2

$$D := D_1 \otimes D_2 \quad V := V_1 \otimes V_2$$

$$\dim V = \dim V_1 \cdot \dim V_2$$

V wird aufgespannt durch $e_1^k \otimes e_2^l$

$$D(R)(e_1^k \otimes e_2^l) := D_1(R) e_1^k \otimes D_2(R) e_2^l$$

Darstellung von $SO(3)$ Ausgangspunkt $D_{\text{def}} = D_1$, $D_{\text{triv}} = D_0$

$\dim D_1 = 3$ $V_1 = \mathbb{R}^3$ Bilde Tensorprod $D := D_1 \otimes D_1$

$V = V_1 \otimes V_1$ $\dim D = \dim V = 3 \cdot 3 = 9$

D ist reduzibel.

Führe ein Permutatio-Paar beide Vektorräume V_1, V_1'

$P(v \otimes w) = w \otimes v$, P kommutiert mit D

$$PD(v \otimes w) = P(D_1 v \otimes D_1 w) = D_1 w \otimes D_1 v$$

$$= D(w \otimes v) = DP(v \otimes w). \quad \left(\text{gilt für Vektoren } v \otimes w \text{ mittels Linearität für alle } v \in V \right)$$

$$\left[P\left(\sum_{ij} c_{ij} e_i \otimes e_j\right) = \sum_{ij} c_{ij} P(e_i \otimes e_j) = \sum_{ij} c_{ij} e_j \otimes e_i \right]$$

2 Projektoren $\Pi_{\pm} := \frac{1}{2}(I \pm P)$ I Identität, P Perm.

Π_{\pm} kommutieren mit D .

orthogonal zueinander

Π_{\pm} sind Projektoren, d.h. $(\Pi_{\pm})^2 = \Pi_{\pm}$, $\Pi_{+}\Pi_{-} = 0$

Definieren Unterräume V_{\pm} von V als $V_{\pm} := \text{Im } \Pi_{\pm}$

$$V = V_{+} \oplus V_{-} \quad (\Pi_{+} + \Pi_{-} = I)$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{dim}=6 \\ \uparrow \\ \text{dim}=3 \end{array}$$

Da Π_{\pm} mit D kommutiert

$$D = D_{+} \oplus D_{-}$$

$$D_{\pm} := D \Pi_{\pm}$$

D_{\pm} erfüllt Darstellungseigenschaft

$$D(R_1) \Pi_{\pm} D(R_2) \Pi_{\pm} = D(R_1) D(R_2) \Pi_{\pm} \Pi_{\pm} = D(R_1 R_2) \Pi_{\pm}$$

$$\text{dim } D_{+} = 6 \quad \text{dim } D_{-} = 3 \quad D_{-} \sim D_1 \vec{v} \times \vec{w}$$

Darstellung D_{+} zerfällt weiter. Anhaltspunkt $\vec{v} \cdot \vec{w}$

$$\leadsto D_{+} = D_2 \oplus D_0 \quad \swarrow \text{Skalarprodukt} \sim \text{Spur}$$

$$\uparrow \text{dim } D_2 = 5 \sim \text{sym. spurlose Tensoren}$$

$$\Rightarrow 3 \cdot 3 = 3 + 1 + 5$$

$$\Rightarrow D_1 \otimes D_1 = D_1 \oplus D_0 \oplus D_2$$

weiter $D_1 \otimes D_2 = D_2 \oplus D_1 \oplus D_3 \dots$

$$D_l \otimes D_e = D_e \oplus D_{e-1} \oplus D_{e+1} \quad \dim D_e = 2l+1$$

$\dim D_e$ entspricht Anzahl der unabh. Kugelflächenfkt $Y_{e,m}$
 $m = -l, \dots, +l$

Darstellung D_e die Kugelflächenfkt $Y_{e,m}$ mit festen l ineinander transformiert

$$R: (\vartheta, \varphi) \rightarrow (\vartheta', \varphi')$$

$$Y_{e,m}(\vartheta', \varphi') = \sum_{m'=-l}^l D_e(R)_{m,m'} Y_{e,m'}(\vartheta, \varphi)$$

allg. $Y_{e,m}$ als Basis $L^2(S^2)$ Darst darauf $\mathcal{D} = \bigoplus_{e=0}^{\infty} D_e$ alle Punkte vom $SO(3)$.

Kapitel 4

Magnetostatik

Dauer: 2:12:26

4. Magnetostatik

Magnetostatik analog zu Elektrostatik \rightarrow ED.

einige kompliziertere Elemente:

- keine Monopole (\sim el. Ladungen)
- Strom als elementare Quelle des Feldes, Kontinuitätsgl.
- Vektorieller Charakter (\sim el. Skalarer Charakter ϕ)
- Vorzeichen, Richtungen relevant

4.1 Grundlagen

Ampère-Gesetz Elementare Quelle: Stromschleife I

- geschlossene Kurve C im \mathbb{R}^3

- unendlich dünn
- gerichtet

- Strom I entlang der Kurve (konstant entlang C , erhalten)



$$\text{Kraft } \vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \mu_0 I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{x}_1 \times (d\vec{x}_2 \times (\vec{x}_1 - \vec{x}_2))}{4\pi \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|^3}$$

$C_1 I_1$
 F_1

$C_2 I_2$
 F_2

Vorzeichen: • gleichgerichtete Ströme attraktiv
 gegensätzliche " repulsiv!

definiert
 ↓ Einheit
 Ampere

μ_0 : magnetische Feldkonst. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-10} \text{ kg m} / \text{A}^2 \text{ s}^2$

(zusammen mit ϵ_0 gilt $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$, c Lichtgeschw.)

Biot-Savart-Gesetz

Stromschleife (c, I) erzeugt magn. Feld

magnetische Flussdichte, Induktion $\vec{B}(\vec{x})$ (nicht Magn. Feldstärke)

$$\vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 I \oint_c \frac{d\vec{y} \times (\vec{x} - \vec{y})}{4\pi \|\vec{x} - \vec{y}\|^3}$$

erzeugt Kraft auf eine (weitere) Stromschleife (c, I)

$$\vec{F} = I \cdot \oint_c d\vec{x} \times \vec{B}(\vec{x})$$

Beispiel: unendl. ausgehender Strom I entlang $+\vec{e}_z$

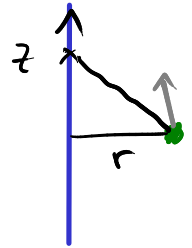
Zylindersymmetrie: betrachte $\vec{B}(x)$ bei $\vec{x} = (r, 0, 0)$ (o.B.d.A.)

$$\vec{B}(x) = \mu_0 I \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{\vec{e}_z \times (r, 0, -z)}{4\pi (r^2 + z^2)^{3/2}}$$

$d\vec{y} = \vec{e}_z dz$

$\vec{y} = (0, 0, z)$

$\vec{x} = (r, 0, 0)$



$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{e}_\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi$$

$\vec{e}_\varphi \leftarrow \perp$ zu Strom
 $\vec{e}_\varphi \leftarrow \perp$ zu Abstand

Betrag ist $\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ Rechte-Hand-Regel
 Daumen: Strom
 Zeigef.: Abstand
 Mittelf.: Kraft

Kraft auf zwei parallele Ströme \sim Länge l

lin. Kraft dichte $\frac{F}{l} = \frac{I_1 I_2}{r} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}$

anziehen: $\uparrow\uparrow$
 abstossend: $\uparrow\downarrow$

Kraft wirkt lokal auf Stromelemente

lin. Kraftdichte $d\vec{F} = I d\vec{x} \times \vec{B}(x)$

Gesamtbruch durch Integration $\vec{F} = \oint d\vec{F}$

weitere Effekte: Drehmoment \vec{M}

$$\vec{M} = \oint_C \vec{x} \times d\vec{F} = I \oint_C \vec{x} \times (d\vec{x} \times \vec{B}(x))$$

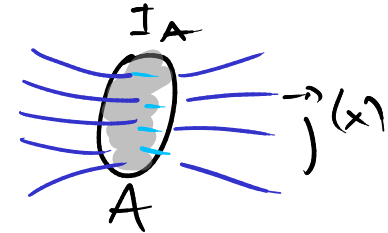
desweiteren Deformationskräfte.

4.2 Feldgleichungen

Stromdichte (analog Punktladung \rightarrow Ladungsdichte)

Stromdichte $\vec{j}(x)$ vektorielles Feld: Strom I durch Fläche A

$$I_A = \int_A dx^2 \vec{n} \cdot \vec{j}$$



geschlossene Stromschleife \Rightarrow (statische) Kontinuitätsgl.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad \vec{j} \text{ divergenz- bzw. quellfrei.}$$

Satz von Gauß; kont. $\nabla \cdot \vec{j} = 0 \Rightarrow$ Strom durch Fläche A falls
eigentlich nur von Rand ∂A abhängt $I_A = I_{A'} \quad \partial A = \partial A'$

Biot-Savart-Gesetz (Integralform)

$$\vec{B}(x) = \mu_0 \int dy^3 \frac{\vec{j}(y) \times (\vec{x} - \vec{y})}{4\pi \|\vec{x} - \vec{y}\|^3}$$

resultierende Kräfte

$$\text{Kraftdichte: } \vec{f}(x) = \vec{j}(x) \times \vec{B}(x)$$

$$\text{Kraft: } \vec{F} = \int dx^3 \vec{j}(x) \times \vec{B}(x)$$

$$\text{Drehmoment: } \vec{M} = \int dx^3 \vec{x} \times (\vec{j}(x) \times \vec{B}(x))$$

Feldgleichungen $\vec{B}(x)$ erfüllt (analog \vec{E}) 2 Diff.-Gl.

(zunächst $\vec{j} = 0$ beim Punkt x $\vec{B}(x)$ ausgewertet wird)

$$\partial_i B_j = \mu_0 \sum_{k,l} \epsilon_{jkl} \int dy^3 \frac{\delta_{il} (\vec{x}-\vec{y})^2 - 3(x-y)_i (x-y)_l}{4\pi \|\vec{x}-\vec{y}\|^5} j_k(y)$$

Spur: $\vec{\partial} \cdot \vec{B} = 0$ \vec{B} ist divergenzfrei!

weiterhin $(\vec{\partial} \times \vec{B})_m = -\mu_0 \sum_k \int d^3y j_k(y) \frac{\delta_{mk} (\vec{x}-\vec{y})^2 - 3(x-y)_m (x-y)_k}{4\pi \|\vec{x}-\vec{y}\|^5}$

$= \mu_0 \int d^3y \vec{j}(y) \cdot \vec{\partial}_y \frac{(x-y)_m}{4\pi \|\vec{x}-\vec{y}\|^3} = -\mu_0 \int d^3y (\vec{\partial} \cdot \vec{j}) \frac{(x-y)_m}{4\pi \|\vec{x}-\vec{y}\|^3}$

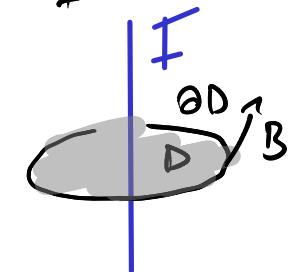
\vec{B} ist rotationsfrei ($\vec{j} = 0$ an diesem Ort) $\leftarrow = 0$ kont. Gl.

$\vec{\partial} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\partial} \times \vec{B} = 0 \quad \text{falls } \vec{j} = 0$

Was ist bei $\vec{j} \neq 0$? Beispiel ∞ ausgedeh. lin. Strom I

Berechne: $\int_{\partial D} d\vec{x}^2 \vec{n} \cdot (\vec{\partial} \times \vec{B}) \stackrel{\text{rot } \vec{B} \text{ (Stokes)}}{=} \int_{\partial D} d\vec{x} \cdot \vec{B} = \mu_0 I$

weil $\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$



Fluss von $\vec{\partial} \times \vec{B}$ durch D bzw ∂D ist $\neq 0$

$\vec{\partial} \times \vec{B} \sim$ Distribution lokalisiert am Strom auf z -Achse.

Kort Form: $\vec{\partial} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ Ampère Durchflutungsgesetz

Andererseits gilt exakt $\vec{\partial} \cdot \vec{B} = 0$ divergenzfrei!

$$\vec{\partial} \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_V dx^3 \vec{\partial} \cdot \vec{B} \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial V} dx^2 \vec{n} \cdot \vec{B} = 0$$

distributionelle Identität

$$\partial_i \frac{x_j}{\|\mathbf{x}\|^3} = \frac{\delta_{ij} \mathbf{x}^2 - 3x_i x_j}{\|\mathbf{x}\|^5} + \frac{4\pi}{3} \delta_{ij} \delta^3(\mathbf{x})$$

$$\partial_i B_j = \dots + \frac{1}{3} \mu_0 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} J_k(\mathbf{x})$$

$$\dots \Rightarrow \vec{\partial} \cdot \vec{B} = 0 \quad \checkmark \quad \vec{\partial} \times \vec{B} = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{3} \mu_0 \vec{J} = \mu_0 \vec{J}$$

4.3 Vektorpotential

Ausgangspunkt $\vec{\partial} \cdot \vec{B} = 0$

Wir können solche \vec{B} immer schreiben als

$$\vec{B} = \vec{\partial} \times \vec{A} \leftarrow \text{Vektorpotential}$$

Biot-Savart
$$\vec{B}(x) = \mu_0 \int d^3y \vec{\partial}_x \times \frac{\vec{j}(y)}{4\pi \|x-y\|}$$

$$\Rightarrow \vec{A}(x) = \mu_0 \int d^3y \frac{\vec{j}(y)}{4\pi \|x-y\|}$$

Eichtransformationen

Potential ist nicht eindeutig bestimmt, denn

$$\overset{\text{rot}}{\vec{\partial}} \times \overset{\text{grad.}}{\vec{\partial}} \dots = 0$$

Eichtransf.
$$\vec{A}'(x) = \vec{A}(x) + \vec{\partial} \Lambda(x)$$

$\Lambda(x)$ ist ^{bel.} skalares Feld

$$\Rightarrow \vec{B}'(x) = \vec{B}(x) + \underbrace{\vec{\partial} \times \vec{\partial}}_{=0} \Lambda = \vec{B}(x) \text{ phys. äquivalent!}$$

Zwei Vektorpotentiale sind äquiv. falls eine Eichtransf. existiert

Zur konkreten Festlegung eines Potentials \vec{A} muss man i.d.R. Eichfixierung / Eichung vornehmen.

- Freiheitsgrade in A die durch Eichtransf. geändert werden sind physikalisch irrelevant
- Eichtransformationen sind nicht nur Symmetrien sondern vielmehr beschreiben sie Un-eindeutigkeit der Formulierung

Eichfixierung 2 typische Möglichkeiten:

Coulomb-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

axiale-Eichung $\vec{n} \cdot \vec{A} = 0$ für best. Vektor \vec{n}

Beispiel obiger Ausdruck $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \dots = \int dy^3 \dots (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) = 0$

Poisson-Gleichung

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ erfüllt automatisch $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

zweite Feldgleichung $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

$$\mu_0 \vec{j} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\Delta \vec{A} + \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$$

Für $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ (Coulomb) fällt zweiter Term weg.

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

3 Komp. des Vektors geben 3 unabh. Poisson-Gl.

\leadsto Randwertproblem analog

Feldenergie

wir möchten eine Stromverteilung \vec{j} aus dem Nichts (von unendlich) erzeugen, welche Energie ist nötig?

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int dx^3 dy^3 \mu_0 \frac{\vec{j}(x) \cdot \vec{j}(y)}{4\pi \|x-y\|} = \frac{1}{2} \int dx^3 \vec{A}(x) \cdot \vec{j}(x)$$

Poisson-Gl.

$$\begin{aligned} \Delta W &= \frac{1}{2\mu_0} \int dx^3 (-\vec{A} \Delta \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\partial} \vec{\partial} \cdot \vec{A}) \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \int dx^3 \sum_{j,k} (\partial_j A_k) (\partial_j A_k - \partial_k A_j) \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \int dx^3 (\vec{\partial} \times \vec{A}) \cdot (\vec{\partial} \times \vec{A}) = \frac{1}{2\mu_0} \int dx^3 \vec{B}^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Skalares Potential

Für den stromfreien Raum gilt $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$

In einem solchen Bereich kann man auch Ansatz machen

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \phi_{\text{mag.}}$$

gilt solange Gebiet lokal, einfach zush., quellfrei ist

(Gebiet darf nicht um Ström herum definiert sein).

4.4 Magnetische Moment

Kleine Stromverteilungen vs Magnetfeld verhalten.

→ Stabmagnete, Dipole (führende Beiträge in Multipolentf)

Stromverteilung um Ursprung^V, Erzeugung von B weit entfernt davon

$$\vec{A}(\vec{x}) = \mu_0 \int_V d^3y \frac{\vec{j}(\vec{y})}{4\pi\|\vec{x}-\vec{y}\|} = \mu_0 \int_V d^3y \vec{j}(\vec{y}) \left(\frac{1}{4\pi\|\vec{x}\|} + \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{4\pi\|\vec{x}\|^3} + \dots \right)$$

Stromdichte auf ∂V verschwindet

Gesamtstrom in V verschwindet

↑
Gesamtstrom in V

$$0 = \oint_{\partial V} dx^2 \vec{n} \cdot \vec{j} \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_V dx^3 \vec{\partial} \cdot (\vec{j} \times \vec{x})$$

$$= \int_V dx^3 (x_k \vec{\partial} \cdot \vec{j} + j_k) = \int_V dx^3 j_k$$

⇒ Monopol Term von $\vec{A}(\vec{x})$ verschwindet

$$\vec{A}(\vec{x}) = \mu_0 \frac{\vec{m} \times \vec{x}}{4\pi \|\vec{x}\|^3} + \dots$$

\vec{m} ist magnetische Dipolmoment

$$\vec{m} := \frac{1}{2} \int d\vec{x} \vec{x} \times \vec{j}(\vec{x})$$

Kraft und Drehmoment auf kleine Stromverteilung

Entwickle $\vec{B}(\vec{x})$ um $\vec{x} = 0$

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{B}(0) + \left((\vec{x} \cdot \vec{\partial}) \vec{B} \right)^{(0)} + \dots$$

Eingesetzt in \vec{F}

$$\vec{F} = \int d\vec{x} \vec{j} \times \vec{B} = \int d\vec{x} \left(\vec{j} \times \vec{B}(0) + \vec{j} \times \left((\vec{x} \cdot \vec{\partial}) \vec{B} \right)^{(0)} + \dots \right)$$

$$= \vec{\partial} (\vec{m} \cdot \vec{B}) + \dots \quad \text{direkte Konsequenz: keine Kraft im hom. Magnetfeld}$$

Drehmoment

$$\vec{M} = \int d\vec{x}^3 \vec{x} \times (\vec{j} \times \vec{B}) = \dots = \vec{m} \times \vec{B}$$

Drehmoment wirkt so dass \vec{m} entlang \vec{B} ausgerichtet wird

magnetische pot. Energie

$$W = -\vec{m} \cdot \vec{B} \quad \Rightarrow \text{Minimale/Maximale für } \overset{\text{(anti)}}{\text{parallele Ausrichtung}} \text{ von } \vec{m} \text{ in } \vec{B}$$

Durch Gradient bzw. Rotation erhält man

Ausdrücke für Kraft bzw. Drehmoment

Kapitel 5

Elektro- und Magnetostatik in Materie

Dauer: 1:23:19

5. Elektro- und Magnetostatik in Materie

5.1 Makroskopische Felder

E/M-Statik: Felder, Quellen $E(x)$, $\Phi(x)$, $\rho(x)$ mikroskopische Größe

führe ein makroskopische Felder $\bar{E}(x)$, $\bar{\Phi}(x)$, $\bar{\rho}(x)$

Mittelung über klein Raumbereiche

$$\bar{\Phi}(x) := \int d^3y \Phi(y) \varepsilon(x-y)$$

$\varepsilon(x)$ habe Träger in Umfeld von Ursprung.

Normierung: $\int d^3x \varepsilon(x) = 1$

Trägerbereich ist mikroskopisch gross, makroskopisch klein.

Anmerkungen:

- wiederfreq. Anteile bleiben ganz erhalten.
- hochfrequente Anteile werden in $\bar{\Phi}(x)$ herausgemittelt

- kompatibel mit Ableitung

$$\vec{\partial} \bar{\Phi}(x) = \int d^3y \vec{\partial}_x \varepsilon(x-y) \phi(y) = - \int d^3y \vec{\partial}_y \varepsilon(x-y) \phi(y)$$

$$\stackrel{\text{PI}}{=} \int d^3y \varepsilon(x-y) \vec{\partial} \phi(y) = \vec{\partial} \phi(y).$$

- ebenso für zeitliche Mittelung.

Statisch: $\partial_t \bar{\Phi} = 0$

Im Folgenden nur gemittelte Felder betrachten.

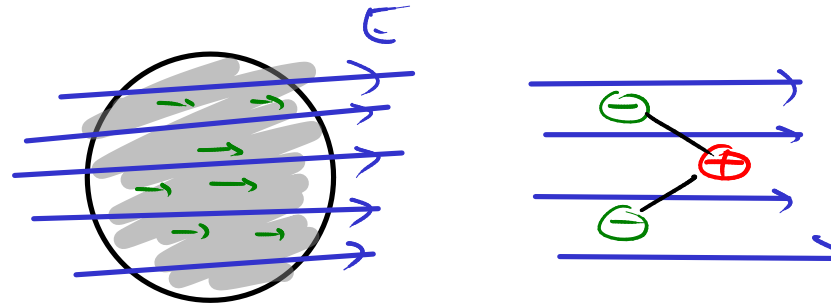
$$\bar{E}, \bar{\Phi}, \bar{\rho} \rightarrow E, \phi, \rho \quad \text{ohne Querstrich}$$

Feldgl. E.S. $\vec{\partial} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_{\text{ges}}, \quad \vec{\partial} \times \vec{E} = 0,$

$$\oint_{\partial V} dx^2 \vec{n} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{\text{ges}, V}, \quad \oint_{\partial A} dx^1 \cdot \vec{E} = 0.$$

5.2 Dielektrika

- Paraelektrikum
- Ferroelektrikum



Freie Ladungen und Dipoldichte

wir unterscheiden zwei Arten von Ladung in Materie

- Ladungen die in der Materie gebunden sind.
- freie Ladungen die nicht an Materie gekoppelt sind

Ladungsstromung in Materie wird durch Dipoldichte \vec{P} beschrieben
 \sim Menge el. Dipole \vec{p} je Volumeneinheit.

Zusammenhang zwischen \vec{P} und äusserer el. Feld \vec{E} ?

Annahme lineare Antwort der Materie

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} + O(E^2)$$

χ beschreibt Stärke der Antwort

- meist isotrop $\chi = \chi_e$ dielektrische Suszeptibilität
- nicht-isotroper Fall: χ Matrix (Festkörper)

Annahme: lineare Zsh. $\vec{P} \sim \vec{E}$ (isotrop)

Aufgabe: bestimme \vec{E} anhand von ρ_{frei}

Dielektrische Verschiebung

Potential wie zuvor berechnen

freie Ladung

$$\Phi(x) = \int d^3y \left(\rho_{\text{frei}}(y) \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \|x-y\|} + \vec{P}(y) \cdot \vec{\partial}_y \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \|x-y\|} \right)$$

$$\vec{E} = -\vec{\partial}\Phi$$

$$\begin{aligned} \vec{\partial} \cdot \vec{E} &= -\Delta_x \Phi(x) = \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3y \left(\rho_{\text{frei}}(y) \delta^3(x-y) + \vec{P}(y) \cdot \vec{\partial}_y \delta^3(x-y) \right) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \left(\rho_{\text{frei}}(x) - \vec{\partial} \cdot \vec{P} \right) \end{aligned}$$

Dielektrische Verschiebung: $\vec{D} := \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{\partial} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{frei}}$

$$\rho_{\text{ges}} = \rho_{\text{frei}} - \vec{\partial} \cdot \vec{P} = \rho_{\text{frei}} + \rho_{\text{dieol}}$$

Im Vergleich: $\vec{E} = \vec{E}_{\text{ges}}, \vec{P} = -\epsilon_0 \vec{E}_{\text{dieol}}, \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_{\text{frei}}$

Anmerkungen:

- E phys., messbar (entspricht ρ_{ges})
- D Hilfsgrösse (entspricht ρ_{frei})
- P Dichte der geb. Dipol (keine el. Feld)

$$\vec{E}, \vec{D}, \rho := \rho_{frei}$$

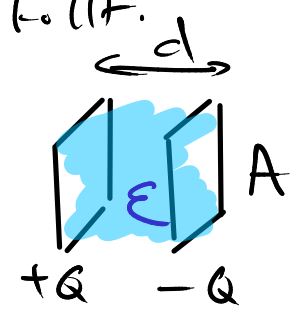
Feldgleichungen $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \quad \nabla \times \vec{E} = 0, \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

el. Materialtant. $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad \epsilon_r = 1 + \chi_e \Rightarrow \vec{D} = \epsilon \vec{E}$

Beispiel Plattenkondensator mit Materie gefüllt.

$\pm Q$ ist freie Ladung auf Platte

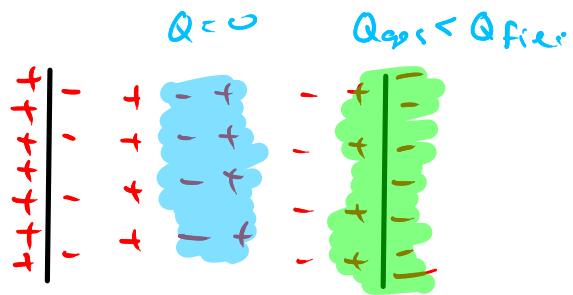
Stärke von D $D = \frac{Q}{A} = \sigma$ freie Flächenladungsdichte.



Die Potentialdifferenz U zw. Platte ergibt sich hingegen aus E

$$U = dE = \frac{dD}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{dQ}{\epsilon_0 \epsilon_r A} \Rightarrow \text{Kap } C := \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} = \epsilon_r \cdot C_0$$

$$\text{Energie } W = \frac{1}{2} UQ = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{Q^2}{2C}$$



5.3 Grenzflächen von Dielektrika

Homogenes Medium führt zu äquiv. Statik mit $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$

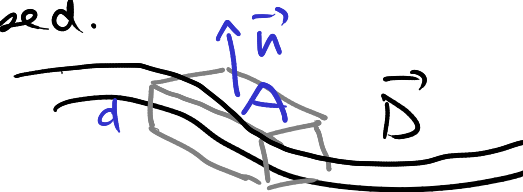
Grenzflächen zwischen verschiedenen Medien

$$\epsilon_r, \vec{E}, \vec{D}$$

Wie verhalten sich Felder \vec{D}, \vec{E} bei Übergang zwischen Medien \Rightarrow Stetigkeitsbed.

$$\epsilon_r', \vec{E}', \vec{D}'$$

Feld \vec{D} : betrachte Gaußsches Kästchen

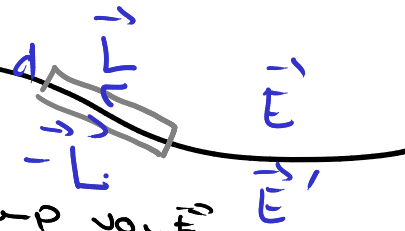


keine Ladung im Kästchen \Rightarrow Fluss von \vec{D} aus Kästchen = 0

$$0 = \oint d\vec{x} \cdot \vec{n} \cdot \vec{D} \approx A \vec{n} \cdot (\vec{D} - \vec{D}') \quad \text{Normalkomponente von } \vec{D} \text{ ist stetig über Grenzfläche}$$

Feld \vec{E} Integral von E entlang Stokesscher

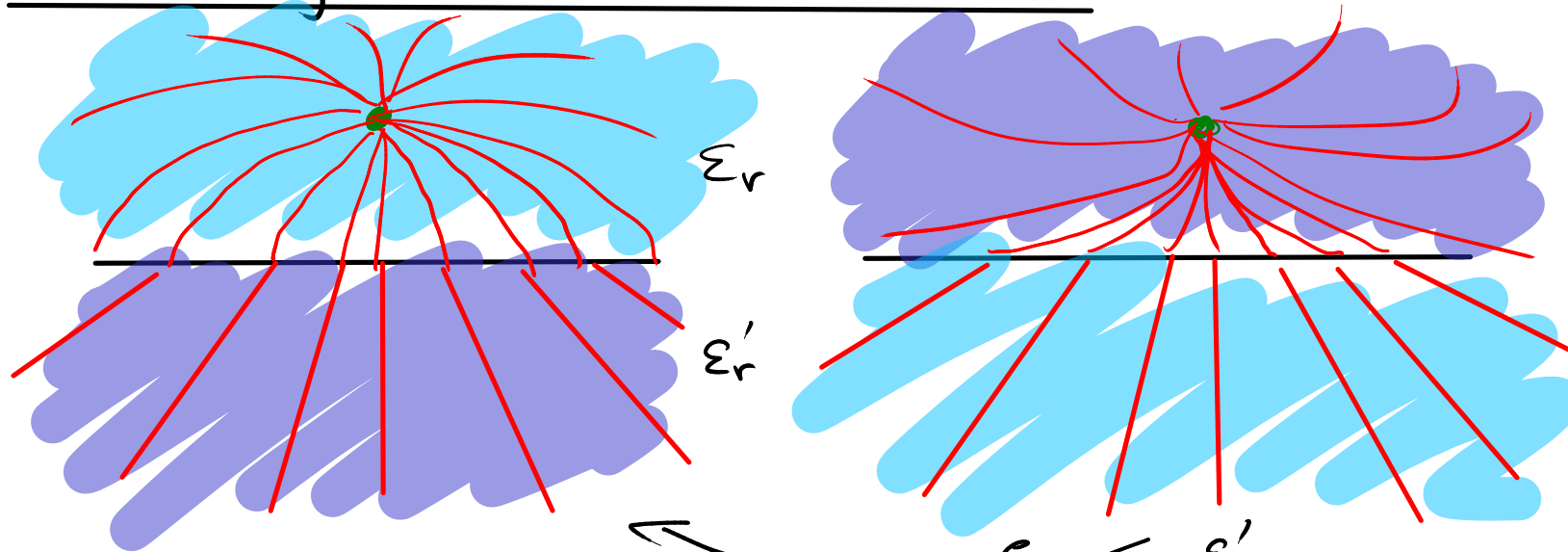
Schleife = 0



$$0 = \oint d\vec{x} \cdot \vec{E} \approx L \cdot (\vec{E} - \vec{E}') \quad \Rightarrow \quad \text{alle Parallelkomponenten von } \vec{E} \text{ sind stetig durch Grenzfl.}$$

\vec{L} beliebig entlang Fläche

Punktladung nahe Grenzfläche (eben)



- Übergang von Feldlinien von dünnere zu dichtere Material
(anderer Fall ^{gegenüber})
- Feldlinien vor Übergang werden zur Oberfläche hin gebogen
 - Am Übergang knicken sie ab
 - nach Übergang sind sie linear zur Ladung ausgerichtet
 - Feldlinien im ersten Medium ergeben sich aus $k_0 \cdot b$. der eigentl. und einer Spiegelladung $q' \neq -q$

5.4 Magnetostatik in Materie

Verallgemeinerung ist analog zu el. St \rightarrow el. Statik in Materie

neue Größen:

- Magnetisierung \vec{M} (\sim Dipoldichte \vec{P})
- Das Magnetfeld \vec{H} (\sim die. versch. \vec{D})
- \vec{H} wird direkt von fr. Strömen $\vec{j} := \vec{j}_{\text{frei}}$ erzeugt

Beziehung zwischen Feldern $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu \vec{H}$ Materie
 Fälle von magn.

magn. Material konst

$$\mu = \mu_0 \mu_r$$

$$\mu_r = 1 + \chi_m$$

Feldgl.

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}$$

freie
Strom

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\oint_{\partial A} d\vec{x} \cdot \vec{H} = I_A$$

$$\oint_{\partial V} d\vec{x} \cdot \vec{n} \cdot \vec{B} = 0$$

- Diamagnetismus
 $\chi_m < 0$ $\mu < \mu_0$
- Paramagnetismus
 $\chi_m > 0$ $\chi_m = \chi_m(T)$
- Ferrom.
- Ferrimag.
- Antiferrom.

Kapitel 6

Maxwell-Gleichungen

Dauer: 1:24:30

6. Maxwell-Gleichungen

6.1 Bewegte Punktladungen

Ladungs- und Stromverteilung $\rho(x), \vec{j}(x)$.
kombiniere E und B -feld

Kraftdichte $\vec{f}_M = \rho(x) \vec{E}(x) + \vec{j}(x) \times \vec{B}(x)$ Kraft $\vec{F} = \int dx^3 \vec{f}(x)$

ruhesches Partikel bei \vec{y} : $\rho(x) = q \delta^3(x - y)$ $\vec{j} = 0 \Rightarrow \vec{F} = q \vec{E}(y)$

bewegtes Partikel $\rho(x, t) = q \delta^3(x - y - vt)$ y ist Pos bei $t=0$
 $\vec{j}(x, t) = q \vec{v} \delta^3(x - y - vt)$ v ist Geschw.

Gesamtkraft (Lorenzkraft) $\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$. ($\vec{y} + \vec{v}t$)

stat. Kontinuitätsgleichung für \vec{j} sondern dynamische

$$\vec{\partial} \cdot \vec{j} + \partial_t \rho = 0.$$

6.2. Faradaysches Induktionsgesetz

Induziertes Potential

Beobachtung (Faraday):

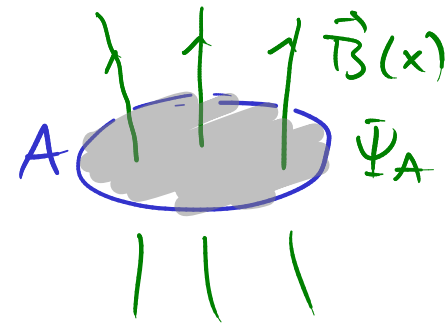
Änderung in mag Fluss Ψ_A durch A
erzeugt ein Potentialdifferenz $\Delta U_{\partial A}$
auf dem Rand von $A \sim \dot{\Psi}_A$

mag. Fluss durch A : $\Psi_A := \int_A dx^2 \vec{n} \cdot \vec{B}$

Ψ_A kann sich ändern, wenn:

- \vec{B} sich ändert
- die Schleife ∂A bewegt sich im Magnetfeld
- die Schleife ∂A dreht sich oder wird deformiert

\Rightarrow Potentialdifferenz entlang ∂A : $\Delta U_{\partial A} = \oint_{\partial A} d\vec{x} \cdot (\vec{E} + \vec{x} \times \vec{B}) = -\dot{\Psi}_A$



Feldgleichung

$$\oint_{\partial A} d\vec{x} \cdot (\vec{E} + \dot{\vec{x}} \times \vec{B}) = - \frac{d}{dt} \int_A dx^2 \vec{n} \cdot \vec{B}$$
$$= - \int_A dx^2 \vec{n} \cdot (\partial_t \vec{B} + \dot{\vec{x}} (\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{B}}_{=0})) + \oint_{\partial A} d\vec{x} \cdot (\dot{\vec{x}} \times \vec{B})$$

- Magnetische Induktion \vec{B} ist weiterhin divergenzfrei $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
- letzter Term entspricht Magnetfeld Beitrag der Lorentz-Kraft

$$\int_A dx^2 \vec{n} \cdot \partial_t \vec{B} = - \oint_{\partial A} d\vec{x} \cdot \vec{E} \stackrel{\text{Stokes}}{=} - \int_A dx^2 \vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E})$$

Im dynamischen Fall ist das el. Feld nicht mehr rotationsfrei
Sollten (diff. Form des Induktionsgesetzes)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0$$

6.3 Maxwell'sche Ergänzung

Bis hier: $\vec{\partial} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$ $\vec{\partial} \times \vec{E}' + \partial_t \vec{B}' = 0$
 $\vec{\partial} \cdot \vec{B} = 0$ $\vec{\partial} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

Konsistenz Unstimmigkeit der Gleichungen

Divergenz der letzten Gl: $0 = \vec{\partial} \cdot (\vec{\partial} \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{\partial} \cdot \vec{j} = -\mu_0 \partial_t \rho$

Betrachte zeitliche Abl. der ersten Gl. $\epsilon_0 \vec{\partial} \cdot \partial_t \vec{E} = \partial_t \rho$

Erweitere letzte Gl. durch \vec{E} -Abhängigkeit

$$\vec{\partial} \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E} = \mu_0 \vec{j}$$

$\vec{\partial} \cdot (\quad \quad \quad) \Leftrightarrow$ Kontinuitätsgleichung für ρ, \vec{j}

Maxwell-Gleichungen

differenzielle Form

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E} = \mu_0 \vec{j}$$

homogen
inhomogen

Kontinuitätsgleichung als Konsistenzbedingung aller 4 Gl

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \partial_t \rho = 0$$

Integralform:

$$\oint_{\partial V} dx^2 \vec{n} \cdot \vec{B} = 0 \quad \frac{d}{dt} \int_A dx^2 \vec{n} \cdot \vec{B} = - \oint_{\partial A} dx^1 (\vec{E} + \vec{x} \times \vec{B})$$

$$\oint_{\partial V} dx^2 \vec{n} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V dx^3 \rho$$

$$\frac{d}{dt} \int_A dx^2 \vec{n} \cdot \vec{E} = \oint_{\partial A} dx^1 \left(\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \vec{B} - \vec{x} \times \vec{E} \right) - \frac{1}{\epsilon_0} \int_A dx^2 \vec{n} \cdot (\vec{j} - \vec{x} \rho)$$

Kraftdichte $\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$

Kraft $\vec{F}_V = \int_V d^3x \vec{F}$ Drehmoment: $\vec{M}_V = \int_V d^3x \vec{x} \times \vec{f}$.

Beachte $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ c : Lichtgeschw. in Vakuum
 $\approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

\leadsto Ausbreitung von Licht wird durch M.-G. bestimmt.

6.4. Elektromagnetische Potentiale

betrachte homogen diff. Feldgleichung

$$\vec{\partial} \cdot \vec{B}' = 0 \quad \vec{\partial} \times \vec{E}' + \partial_t \vec{B}' = 0$$

Potentiale

Wir wollen obige Gl. durch Potentiale allg. lösen.

$$\vec{\partial} \cdot \vec{B}' = 0 \quad \Leftarrow \quad \vec{B}' = \vec{\partial} \times \vec{A}' \quad \Rightarrow \text{gilt für} \\ \text{einb. zsh. Gebiet.}$$

Einsetzen in andere Gl.

$$\vec{\partial} \times (\vec{E}' + \partial_t \vec{A}') = 0 \quad \text{d.h. } \vec{E}' \text{ ist nicht mehr ein} \\ \text{Gaußsches Feld,}$$

$$\text{stattdessen: } \vec{E}' = -\vec{\partial} \Phi' - \partial_t \vec{A}'$$

können beide hom. M. Gl. lösen durch $\vec{B}' = \vec{\partial} \times \vec{A}', \vec{E}' = -\vec{\partial} \Phi' - \partial_t \vec{A}'$

Betrachte inhom. Felder! (Einschreiben von \vec{A}, Φ)

$$-\Delta \Phi - \vec{\partial} \cdot \partial_t \vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$-\Delta \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A} + \vec{\partial} (\vec{\partial} \cdot \vec{A}) + \frac{1}{c^2} \vec{\partial} \partial_t \Phi = \mu_0 \vec{J}$$

D'Alembert Operator $\square := \Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2$

$$\Rightarrow -\square \Phi - \partial_t \left(\frac{1}{c^2} \partial_t \Phi + \vec{\partial} \cdot \vec{A} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$-\square \vec{A} + \vec{\partial} \left(\frac{1}{c^2} \partial_t \Phi + \vec{\partial} \cdot \vec{A} \right) = \mu_0 \vec{J}$$

Eichtransformationen

\vec{B} -Feld ändert sich nicht unter bestimmten Änderung von \vec{A}

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\partial} \Lambda \quad \Rightarrow \quad \vec{B}' = \vec{B}$$

entsprechend Transformation von Φ anpassen:

$$\Phi' = \Phi - \partial_t \Lambda \quad \Rightarrow \quad \vec{E}' = \vec{E}$$

Coulomb-Eichung

gewöhnliche Wahl der Eichung bzw. Eichfixierung

$$\vec{\partial} \cdot \vec{A}' = 0 \quad (\text{zu jeder Zeit } t)$$

$$\Rightarrow \Delta \Phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (\Phi \text{ ist wie in t.S. für alle } t)$$

$$-\Delta \vec{A}' + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A}' = \gamma_0 \vec{j} - \frac{1}{c^2} \vec{\partial} \partial_t \Phi$$

Lorenz Eichung

Verlange: $\vec{\partial} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi = 0$

Verbleibende Feldgl.

$$-\square \Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad -\square \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

- alle (1+3) Gleichungen entkoppeln.
- alle Gleichungen haben identische Struktur
- alles sind einfache Wellengleichungen in 3D. (Licht)

Lorenz Eichung lässt sich immer erreichen: $X := \vec{\partial} \cdot \vec{A} + \partial_t \Phi / c^2$

unkl. Transf: $X \rightarrow X'$ $X' = X + \square \Lambda = X + \Delta \Lambda - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Lambda$

Ziel: $X' = 0$. Lösung als Anfangswertproblem $\Lambda(t=0)$ & $\partial_t \Lambda(t=0)$ vorgegeben

Beachte: Lorenz ist nicht eindeutig! $\Lambda(t)$ folgt aus Gl. $\square \Lambda = -X$

Kapitel 7

Stromkreise

Dauer: 1:24:01

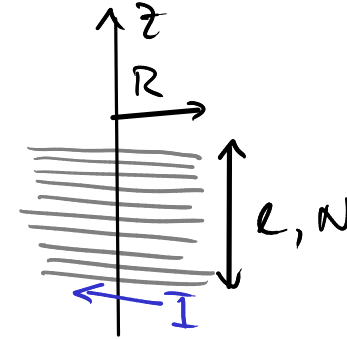
7. Stromkreise

7.1 Induktivitäten

Magnetfeld einer Spule Zyl. Koord: r, z, φ

Stromdichte $\vec{j} = \eta \delta(r-R) \vec{e}_\varphi$

$$\eta = \frac{IN}{l} \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$



Flussdichte mittels Biot-Savart bei Punkt $\vec{x} = (d, 0, 0)$
 integrieren über $\vec{y} = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{x}) &= \mu_0 \int d^3y \frac{\vec{j}(\vec{y}) \times (\vec{x} - \vec{y})}{4\pi \|\vec{x} - \vec{y}\|^3} \\ &= \frac{\mu_0 \eta R}{4\pi} \int d\varphi dz \frac{(-z \cos \varphi, -z \sin \varphi, R - d \cos \varphi)}{(R^2 + d^2 - 2dR \cos \varphi + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 \eta R}{2\pi} \int d\varphi \frac{(0, 0, R - d \cos \varphi)}{R^2 + d^2 - 2dR \cos \varphi} = \mu_0 \eta \Theta(R-d) \vec{e}_z \end{aligned}$$

$\vec{B}(x) = \mu_0 n \vec{E}_z = \frac{\mu_0 N I}{l} \vec{e}_z$ im Inneren der Spule

Feldenergie $W = \frac{\mu_0 R^2 N^2 I^2}{2l}$

Induzierte Spannung

Induktionsgesetz \rightarrow induzierte Spannung aufgrund Änderung von Fluss.

N Schleifen ergeben

$U = -N \dot{\Psi}$ (Ψ was Fluss durch eine Schleife)

z.B. Kopplung zweier Spulen N_1 ; l_1, R gleich auf gleicher Zyl. gewickelt

$U_1 = -N_1 \dot{\Psi}_2 = -N_1 A \partial_t B_2 = -\pi R^2 N_1 \frac{\mu_0 \dot{I}_2 N_2}{l} = -L_{12} \dot{I}_2$

L_{12} Induktivität zwischen Spulen

$L_{12} = \frac{\pi \mu_0 R^2 N_1 N_2}{l}$ • geometrisch
• symmetrisch

Verallgemeinert sich auf alle Paare von Bauelementen (j, k)

$$U_k = - \sum_j L_{kj} \dot{I}_j \quad W = \sum_{j,k} \frac{1}{2} L_{kj} I_j I_k$$

Induktionskoeffizient L_{kj} & Geometrie.

Selbstinduktion von Bauelementen (Spule: $L = \frac{\mu_0 R^2 N^2}{l}$)

Änderung des Stroms durch ein Element erzeugt eine Spannung über dem Element,

Spannung wirkt so dass der Strom in entgegengesetzter Richtung angeregt wird \rightarrow Trägheit des Stroms (analog zur träg. Masse)

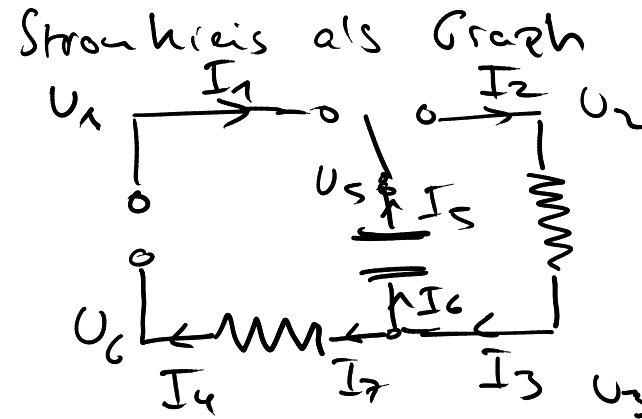
7.2 Stromkreise

Potentiale und Ströme

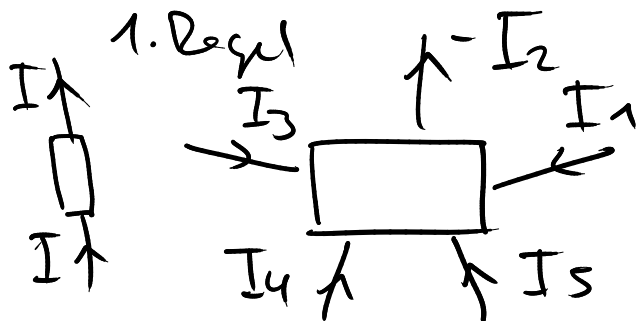
- je Draht/Linie eine gerichtete Stromstärke I_k
- je Draht ein Potential U_n

Zustandsvariablen des Systems I_k, U_n

Bewegungsgleichungen anhand der Bauelemente bestimmen



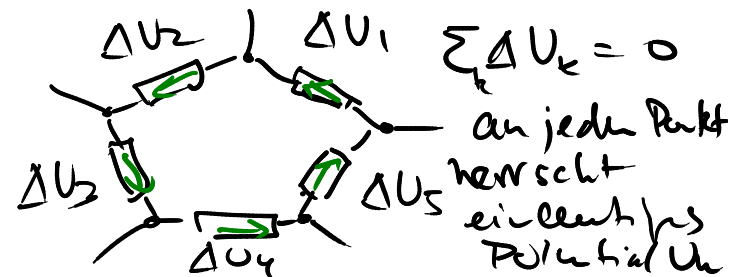
Kirchhoffsche Regeln



alle Ströme
summiert
sich zu Null

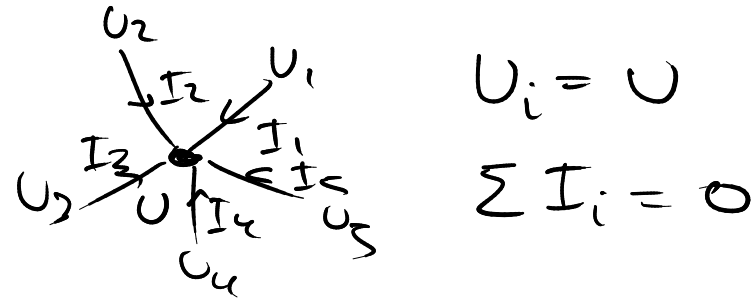
$$\sum_k I_k = 0$$

2. Regel: Summe aller
Potentialdifferenzen über
geschlossene Schleife ist Null



Basiselemente

o Verzweigung



-> Reduziert dyn. Variable $I_k, U_k \rightarrow$ Vereinfachung

o Widerstand $U_1 \xrightarrow{I} \text{---} R \text{---} \xrightarrow{I} U_2$ $U_1 - U_2 = R \cdot I$

o Kondensator $U_1 \xrightarrow{I} \text{---} C \text{---} \xrightarrow{I} U_2$ $\dot{Q} = I, U_1 - U_2 = \frac{Q}{C}$

o Spule $U_1 \xrightarrow{I} \text{---} L \text{---} \xrightarrow{I} U_2$ $U_1 - U_2 = L \dot{I}$

o gekoppelte Spulen

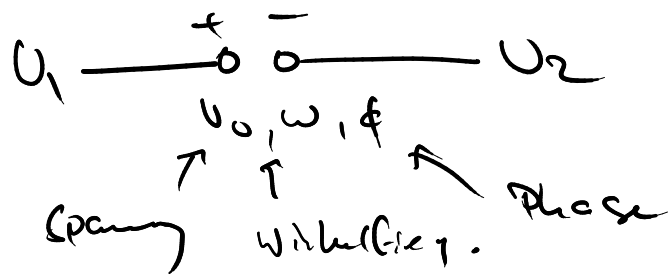
$U_{A1} - U_{A2} = L_A \dot{I}_A + L_{AB} \dot{I}_B$

$U_{B1} - U_{B2} = L_B \dot{I}_B + L_{AB} \dot{I}_A$



$$\left\{ \begin{array}{l} I = 0 \\ U_1 = U_2 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{offen} \\ \text{geschlossen} \end{array}$$

• Spannungsquelle



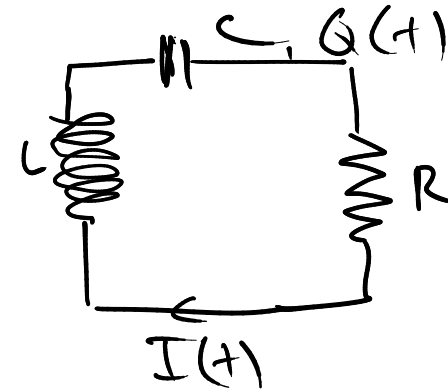
$$\begin{array}{ll} \text{Gleichstrom} & U_1 - U_2 = U_0 \\ \text{Wechselstrom} & U_1 - U_2 = U_0 \cos(\omega t + \phi) \end{array}$$

Für Stromkreis: für jeden Freiheitsgrad gibt es
1 Bewegungsgleichung
bis auf eine (Stromerhaltung)

oder: Spannungen bis auf eine definiert
Nullpotential kann beliebig gewählt werden.

7.3 Schwingkreis

Standardbeispiel mit wichtigsten Bauelementen
Kondensator C , Widerstand R , Spule L
in Serie



$t=0$ Kondensator ungeladen $Q(t=0)=0$
es fließt Strom $I(t=0)=I_0$

Bewegungsgleichung: $\overset{\text{Kond.}}{Q} = I$, $L\dot{I} + RI + \frac{Q}{C} = 0$ 2. Kirchhoff

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = 0$$

(gedämpfter $t=0$)

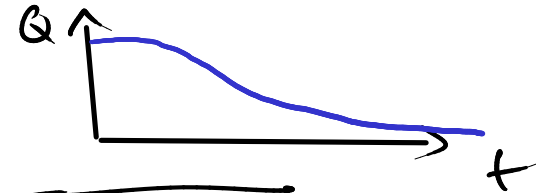
$$\begin{cases} Q(0) = 0 \\ \dot{Q}(0) = I_0 \end{cases} \begin{cases} a_1 = \frac{I_0 - Q_0 b_2}{b_1 - b_2} \\ a_2 = \frac{I_0 - Q_0 b_1}{b_2 - b_1} \end{cases}$$

Ausatz mit Exp.-faktoren $Q(t) = a_1 e^{b_1 t} + a_2 e^{b_2 t}$

$$b_i \text{ durch quad. Gl. } Lb^2 + Rb + \frac{1}{C} = 0 \quad b_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{\sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}$$

3 charakteristische Fälle je nach Vorz. der Diskriminante $CR^2 - 4L$

• $CR^2 > 4L$ starke Dämpfung, b_1, b_2 sind neg. reell.



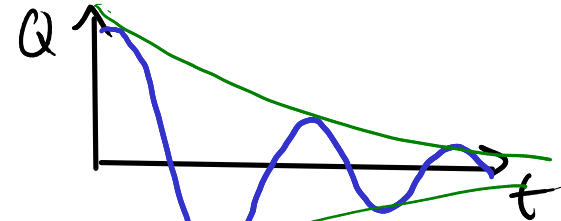
• $CR^2 < 4L$ schwache Dämpfung, Oszillationen, b_1, b_2 komplex

$$b_{1,2} = -k \pm i\omega$$

$$k = \frac{R}{2L}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

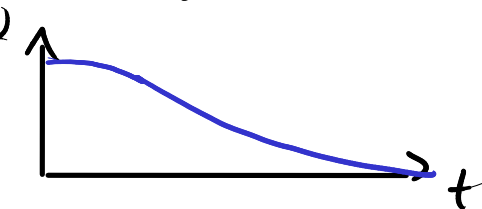
Schwingvorgang mit Kreisfrequenz ω
und exp. Abklingen k



• $CR^2 = 4L$ krit. Dämpfung; beide Exp. gleich $b_1 = b_2$ reell negativ

$$Q(t) = (Q_0 + (I_0 + k Q_0) t) e^{-kt}$$

$$k = \frac{R}{2L}$$



7.4 Wechselstrom

Spannungsquelle / Stromkreis mit vorgegebener Freq. ω

bei lin. ~~geschn~~ ~~essigher~~ können wir alle Variablen komplexifizieren

$$x(t) \in \mathbb{R} \quad x(t) = \operatorname{Re}(X_0 e^{i\omega t}) \quad X_0 \in \mathbb{C}$$

Resistivitäten

$$x \leftarrow U, I, Q$$

alle Bauelemente Widerstand R , Kondensator C , Spule L
haben gleiche Bewegungsgleichung (komplexifiziert)

$$Z = \frac{U_0}{I_0} \in \mathbb{C}$$

(pos. reell)

(pos. imag.)

(neg. imag.)

• Widerstand

$$Z = R$$

• Spule

$$Z = i\omega L$$

• Kond:

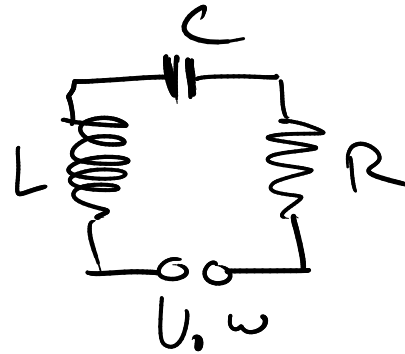
$$Z = \frac{1}{i\omega C}$$

Reihenschaltung, Parallelschaltung von Resistivitäten ist wie



bei Widerständen, nur komplex Z_k

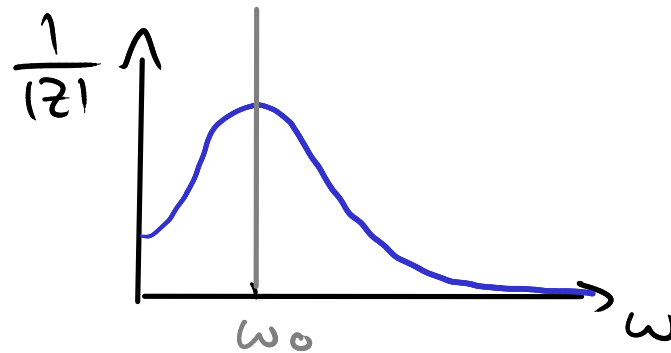
Resonanz



Reihenschaltung $Z = R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L$

Impedanz $|Z| = R \sqrt{1 + \frac{L^2}{R^2} \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}{\omega^2}}$

mit Resonanzfreq $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$



Kapitel 8

Erhaltungsgrößen und Symmetrien

Dauer: 1:30:18

8 Erhaltungsgrößen und Symmetrien

8.1 Ladungserhaltung

Kontinuitätsgleichung für el. Ladungsdichte und Strom

$$\partial_t \rho + \vec{\partial} \cdot \vec{j} = 0$$

Integration über Gebiet V

$$Q_V := \int_V dx^3 \rho$$

$$\partial_t Q_V = \int_V dx^3 \partial_t \rho = - \int_V dx^3 \vec{\partial} \cdot \vec{j} = \oint_{\partial V} dx^2 \vec{n} \cdot \vec{j} =: -J_{\partial V}$$

Für $V = \mathbb{R}^3$ benötigt man geeignete asympt. RB.

dann $J = 0$ und damit $\partial_t Q = 0$ und $Q(t) = Q$

8.2 Energie und Impuls

Wir kennen E-dichte in ES / MS \rightarrow Quelle für ED

$$w(x) = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$$

$$\begin{aligned} \partial_t w &= \epsilon_0 \vec{E} \cdot \partial_t \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \partial_t \vec{B} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot (\vec{\partial} \times \vec{B}) - \vec{E} \cdot \vec{j} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot (\vec{\partial} \times \vec{E}) \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \vec{\partial} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{E} \cdot \vec{j} \end{aligned}$$

Satz von Poynting (Kontinuitätsgl. für E-dichte)

$$\partial_t w + \vec{\partial} \cdot \vec{S} = -\vec{E} \cdot \vec{j} \quad \vec{S} := \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

\vec{S} heißt Energiestromdichte bzw. Poynting-Vektor

Ladungsstromvekt
mit $\vec{j} = \rho \vec{v}$

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \\ &= \rho \vec{E} + \rho \vec{v} \times \vec{B} \end{aligned} \quad \vec{f} \cdot \vec{v} = \rho \vec{v} \cdot \vec{E} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Durch Integration über Gebiet U erhält man

$$\partial_t W_U + S_{\partial U} + P_{\text{mech},U} = 0$$

$$W_U := \int dx^3 w(x)$$

$$S_{\partial U} := \oint_{\partial U} dx^2 \vec{n} \cdot \vec{S}$$

$$P_{\text{mech},U} := \int_U dx^3 \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Ein freies Feld ($\rho = \vec{j} = 0$) in \mathbb{R}^3 (asymptotische Felder): $\partial_t W = 0$

Impuls Kraftdichte \vec{f} , Impulsdichte $\vec{\pi}$

$$\partial_t \vec{\pi} + \vec{f} = \vec{\partial} \cdot \underline{T}$$

Tensor / Matrix

$k = x, y, z$

$$\downarrow \int dx^3$$

$$\partial_t \pi_k + f_k = \sum_{j=1}^3 \partial_j T_{jk}$$

$$\partial_t \vec{P}_V + \vec{F}_V = \oint_{\partial V} dx^2 \vec{n} \cdot \underline{T}$$

Herleitung für $\vec{\pi}, \underline{T}$: $\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$

$$\vec{f} = \epsilon_0 (\vec{\partial} \cdot \vec{E}) \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} (\vec{\partial} \times \vec{B}) \times \vec{B} - \epsilon_0 \partial_t \vec{E} \times \vec{B}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B})$$

$$- \epsilon_0 \vec{E} \times (\vec{\partial} \times \vec{E}) + \epsilon_0 (\vec{\partial} \cdot \vec{E}) \vec{E}$$

$$- \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \times (\vec{\partial} \times \vec{B}) + \frac{1}{\mu_0} (\vec{\partial} \cdot \vec{B}) \vec{B}$$

$$\text{Impulsdichte } \vec{\pi} := \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{S}$$

$$\text{Für } \vec{F} = \vec{E}, \vec{B}$$

$$\begin{aligned} (\vec{\partial} \cdot \vec{F}) \vec{F} - \vec{F} \times (\vec{\partial} \times \vec{F}) &= (\vec{\partial} \cdot \vec{F}) \vec{F} - \vec{\partial} \vec{F} \cdot \vec{F} + (\vec{F} \cdot \vec{\partial}) \vec{F} \\ \sum_{j=1}^3 (F_k \partial_j F_j + F_j \partial_j F_k - F_j \partial_k F_j) &= \sum_{j=1}^3 \partial_j (F_j F_k - \frac{1}{2} \delta_{jk} \vec{F}^2) \end{aligned}$$

Impulstendenzdichte (Maxwell'sche Spannungstensor T)

$$T_{jk} = \epsilon_0 (E_j E_k - \frac{1}{2} \delta_{jk} \vec{E}^2) + \frac{1}{\mu_0} (B_j B_k - \frac{1}{2} \delta_{jk} \vec{B}^2)$$

8.3 Symmetrien

Ladung	↔	Symmetrien
Energie		Zeittranslation der Zeit
Impuls		Ortstranslation, Homogenität des Raums
Drehimpuls		Rotation (kovarianter Vektorschreibv.)
Schwerpunktsbewegung		Bezugssystemtransformation (Galilei)
elektrische Ladung		Eichtransformation

Energie / Impuls $W = \int dx^3 w$ $\vec{P} = \int dx^3 \vec{\pi}$
 $\partial_t W = 0$ $\partial_t \vec{P} = 0$

Drehimpuls / Energieschwerpunkt

$$\vec{L} = \int dx^3 \vec{x} \times \vec{\pi} \quad \vec{G} = \int dx^3 w \vec{x}$$

Erhaltungssätze: $\partial_t \vec{L} = 0$ $\vec{G} - c^2 \vec{P}$ ist erhalten
 zusätzlich: konforme Symmetrie! $\partial_t \vec{G} = c^2 \vec{P}$

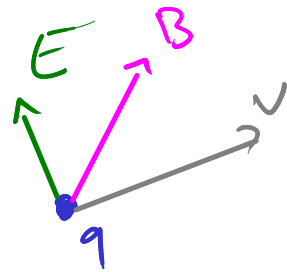
8.4 Galilei-Transformation

Unabhängigkeit von (inertialen) Bezugssystem \leftrightarrow Galilei-Transformation

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t$$

Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$



$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\vec{F}' = q \vec{E}'$$

Für transformierte Felder muss gelten

$$\vec{E}'(x', t) = \vec{E}(x, t) + \vec{v} \times \vec{B}(x, t); \quad \vec{B}'(x', t) = \vec{B}(x, t)$$

Homogenen Maxwell-Gl.

Gelten die hom. MG auch für \vec{E}' , \vec{B}' wie oben?

Divergenzfreiheit von B ? klar: $\vec{B}' = \vec{B}$

$$\vec{\partial} \cdot \vec{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\partial} \cdot \vec{B}' = 0$$

Induktionsgesetz: $\vec{\partial} \times \vec{E}$, $\partial_t \vec{B}$

$$\begin{aligned}\vec{\partial} \times \vec{E}' &= \vec{\partial} \times \vec{E} + \vec{\partial} \times (\vec{v} \times \vec{B}) \\ &= \vec{\partial} \times \vec{E} + \vec{v} (\vec{\partial} \cdot \vec{B}) - (\vec{v} \cdot \vec{\partial}) \vec{B} \\ &= \vec{\partial} \times \vec{E} - (\vec{v} \cdot \vec{\partial}) \vec{B}\end{aligned}$$

$$\partial_t \vec{B}' = \partial_t \vec{B} + (\vec{v} \cdot \vec{\partial}) \vec{B}$$

\Rightarrow Induktionsges. gilt
(weil B divergenzfrei ist)

Invariant / kovariant der hom. MG.

Inhomogene Maxwell-Gleichungen

Inhom. MG sind nicht invariant unter obiger Transf. ..

Stattdessen eine geeignete Transformation

$$\vec{B}'(x,t) = \vec{B}(x+vt, t) - \mu_0 \epsilon_0 \vec{v} \times \vec{E}(x+vt, t)$$

$$\vec{E}'(x,t) = \vec{E}(x+vt, t)$$

$$\vec{j}'(x,t) = \vec{j}(x+vt, t) - \vec{v} \rho(x+vt, t)$$

$$\rho'(x,t) = \rho(x+vt, t)$$

Beachte: für \vec{B}' ist zusätzlich $\vec{v} \times \vec{E} \sim \mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$

für alle solche Geschw $|\vec{v}| \ll c$ sind beide Gal-Transf. ähnlich.

Stattdessen gibt es eine geeignete Transf. zwischen Bezugssystemen die MG invariant löst: Lorentz-Transformation (misch $\text{Zeit} \leftrightarrow \text{Raum}$)

8.5 Elektromagnetische Dualität

$$\begin{aligned} \text{freie MG: } \vec{\partial} \cdot \vec{E}' &= 0 & \vec{\partial} \times \vec{E}' + \partial_t \vec{B}' &= 0 \\ \vec{\partial} \cdot \vec{B}' &= 0 & \vec{\partial} \times \vec{B}' - \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}' &= 0 \end{aligned}$$

E, B treten sehr analog auf, Lorentz-Transformation

$$\begin{pmatrix} \vec{E}' \\ c\vec{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ c\vec{B} \end{pmatrix}$$

erhält die 4 MG im freien Fall \Leftrightarrow elektromagn. Dualität

Mit el. Ladungen und Strömen gilt das nur bei Ergänzung von max. L/S.

$$\rho \rightarrow \rho_{el}, \vec{j} \rightarrow \vec{j}_{el} \quad \text{zusätzlich} \quad \rho_{mag}, \vec{j}_{mag}$$

- max. Ladungen wurden exp. nicht entdeckt
- elektro-sg. Pot ($\vec{\Phi}, \vec{A}$) keine max. L/S. erlaubt

Dennoch wäre paar-ähnliche max. Monopole möglich

Kapitel 9

Spezielle Relativitätstheorie

Dauer: 3:01:42

9. Spezielle Relativitätstheorie

9.1 Poincaré-Transformationen

Galilei-Transformationen

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t \quad t' = t$$

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \quad \vec{B}' = \vec{B}$$

bzw.

$$\vec{E}' = \vec{E} \quad \vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} \quad \rho' = \rho \quad \vec{j}' = \vec{j} - \vec{v} \rho$$

Maxwell-Gl sind nicht invariant unter dieser Transformation
Betrachte ^{hom.} effektive Bewegungsgl. = Wellengleichung

$$\square \psi = 0 \quad \square = \Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2$$

folgt aus Vektorpotentialen $-\square \vec{A} + \vec{\partial} \left(\frac{1}{c^2} \partial_t \phi + \vec{\partial} \cdot \vec{A} \right) = 0$

bilde Rotation ($\vec{\partial} \times \dots$) $\square \vec{B} = 0$ ebenso $\square \vec{E} = 0$

Wende $\vec{x}' = \vec{x} - vt$ $\psi'(x') = \psi(x)$

transformiere Gl. $\left(\square - \frac{2}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{\partial} \partial_t - \frac{1}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{\partial})^2 \right) \psi' = 0$

Symmetrie der Wellengleichung

bleibe die Raum/Zeit Symmetrie der DGL. $\square \psi = 0$ bei.

$$\left(\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \right) \psi(x, t) = 0$$

Vergleichen mit Laplace-Gl

$$\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)^2 \psi(x) = 0$$

Laplace-Gl ist invariant unter Rotation des Raumes

$\psi'(x') = \psi(x)$ mit $x' = Rx$ erfüllt $\Delta \psi' = 0 \Leftrightarrow \Delta \psi = 0$

$\Delta' \psi' = 0 \leftarrow$ aufwärts

$R \in SO(3)$ ist Rotationsmatrix in $3D$ ausgezeichnet durch

2 Vektoren \vec{x}, \vec{y} : erhält das Skalarprodukt $\vec{x} \cdot \vec{y}$

$$\vec{x}' \cdot \vec{y}' = \vec{x}'^T \vec{y}' = \vec{x}^T R^T R \vec{y} \stackrel{!}{=} \vec{x}^T \vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{y} \quad \text{brauchen } R^T R = id$$

$R^T = R^{-1}$ \leftarrow orthogonale Matrizen $R \in O(3)$ bzw $SO(3)$

Transformation von Ableitungsoperatoren: $\vec{\partial}' = R \vec{\partial}$

$$\Delta' = \vec{\partial}'^2 = \vec{\partial}^T R^T R \vec{\partial} = \vec{\partial}^T \vec{\partial} = \Delta$$

Welche (lin) Transf. erhalten $\square \psi = 0$?

Für Faktor $1/c^2$ in D definieren wir $x^0 = ct$

$$\left(\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x^0} \right)^2 \right) \psi(x^0, \vec{x}) = \sum_{\mu=0}^3 \eta^{\mu\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)^2 \psi(x) = 0$$

$\eta = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ best. Diagonalmatrix \leftrightarrow Metrik

Lorentz-Transformationen

Benötige dass $\square = \sum_{\mu, \nu=0}^3 \eta^{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} \right)$

$$\stackrel{!}{=} \sum_{\mu, \nu=0}^3 \eta^{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \right) = \square$$

Ansatz: $x'^{\mu} = \sum_{\nu=0}^3 (\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad \left\| \quad \left(\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \right) = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^{\nu}_{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \right) \right.$

Invarianz von \square benötigt wir

$$\Lambda \eta \Lambda^T \stackrel{!}{=} \eta \quad \sum_{\rho, \sigma=0}^3 \eta^{\rho\sigma} \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} = \eta^{\mu\nu}$$

Λ kann Rotation in 3D verkörpern $(x^1, x^2, x^3) \sim 3$ Freiheitsgr.

3 weitere Freiheitsgrade (1x3 Blockrotation)

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & & & \\ & \frac{\gamma \vec{v}}{c} & & \\ & & \text{id}_3 & \\ & & & \frac{\gamma \vec{v} \vec{v}^T}{c^2(1+\gamma)} \end{pmatrix} \quad \text{Lorentz Boost,} \quad \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\vec{x}' = \vec{x} - \gamma \vec{v} t + \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)} (\vec{v} \cdot \vec{x}) \vec{v} \quad t' = \gamma t - \frac{\gamma}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{x}'$$

Wichtig: für $|\vec{v}| \ll c$ gilt $\gamma \approx 1 \Rightarrow \vec{x}' \approx \vec{x} - \vec{v}t, t' \approx t$

- Zeit transformiert mit Beteiligung von Ort

Eigenschaften: • komposition zweier koll. Lorentz-Boost ist L.B

$$\Lambda(\vec{u}, v_1) \Lambda(\vec{u}, v_2) = \Lambda(\vec{u}, v_3) \quad \text{mit } v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}$$

- zwei nicht-koll. Boosts ergeben Boost + Rot. Gruppenstruktur

- kont. Gruppe ist $SO(3,1)$ Lorentz-Gruppe
- Transformation in Raum + Zeit erweitern zu Poincaré-Gr
- diskrete Transformation: Raum, Zeit Spiegelung.

Maxwell-Gleichungen Lorentz-Boosts auf Maxwell-Gl.

$$\vec{E}' = \gamma \vec{E} + \gamma \vec{v} \times \vec{B} - \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)} (\vec{E} \cdot \vec{v}) \vec{v} \quad \begin{array}{l} \text{neue Felder} \\ \text{an } x' \end{array}$$

$$\vec{B}' = \gamma \vec{B} - \frac{\gamma}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} - \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)} (\vec{B} \cdot \vec{v}) \vec{v} \quad \begin{array}{l} \text{alte Felder} \\ \text{an } x \end{array}$$

Betrachte nicht-rel. Fall $|\vec{v}| \ll c \quad \gamma = 1$

zwei Möglichkeiten $\rightarrow E \sim v B$ Gal für hoch. Gl.
für E vs $B \quad \searrow E \sim \frac{c^2}{v} B$ Gal. für in. hoch. Gl.

Quellen $\rho' = \gamma \rho - \frac{\gamma}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{j} \quad \vec{j}' = \vec{j} - \gamma \rho \vec{v} + \frac{\gamma^2}{c^2 (1+\gamma)} (\vec{j} \cdot \vec{v}) \vec{v}$

9.2 Tensor wir wollen zu 4-er Schreibweise MG gehen

koord. $x^\mu = (ct, \vec{x})$ Transf. mit Matrix Λ^{-1}
und Verschiebung \vec{b}'

Summation.

$$x'^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu x^\nu + b'^\mu := \sum_{\nu=0}^3 (\Lambda^{-1})^\mu_\nu x^\nu + b'^\mu$$

Matrix: $x' = \Lambda^{-1} \cdot x + b'$

Indizes $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$ bzw. t, x, y, z

Summation: \therefore Summation (implizit) über wiederholte Indizes

4er Vektoren mit oberem Index A^μ : kontravariant
~ ähnlich wie x transformiert unter Lorentz (ohne Transl.)

$$A'^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu A^\nu \quad A' = \Lambda^{-1} A$$

Duale Vektoren dazu: kovariant mit unterem Index B_μ

$$B'_\mu = B_\nu \Lambda^\nu_\mu \quad \text{bzw} \quad B' = B \Lambda$$

daher transformiert B_μ wie kov. Adj. ∂_μ

Skalarprodukt eines ko- und eines kontrav. Vektors ist invariant

$$B' \cdot A' = B'_\mu A'^\mu = B_\nu \Lambda^\nu_\mu (\Lambda^{-1})^\mu_\rho A^\rho = B_\nu \delta^\nu_\rho A^\rho = B \cdot A$$

Tensoren und Metrik

Tensoren erlauben es Produkte von Vektoren darzustellen und Produktterme zu addieren

$$A, B \in U \quad C := A \otimes B \in V \otimes U \quad C_{\mu\nu} = A_{\mu} B_{\nu}$$

$$C_{\mu\nu} = A_{\mu} B_{\nu} = A'_{\mu} B'_{\nu} \leftarrow \dots$$

Transformationsverhalten ergibt sich aus von Vektoren

$$C'_{\mu\nu} = C_{\rho\sigma} \Lambda^{\rho}_{\mu} \Lambda^{\sigma}_{\nu} \quad (\text{Rang } (2,0))$$

allgemeiner Rang (p, q)

$$C_{\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_q}$$

transformiert entsprechend mit p Faktoren Λ , q Fakt. Λ^{-1}

Hier interessieren wir uns für Lorentz-Transf.

ausgezeichnet durch $\Lambda^\mu_\rho \eta^{\rho\sigma} \Lambda^\nu_\sigma = \eta^{\mu\nu}$ $\Lambda \eta \Lambda^T = \eta$

(invers)

η Minkowski Metrik $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, \epsilon_1, \epsilon_1, \epsilon_1) = \eta_{\mu\nu}$ nicht-inu. Metrik

$\eta^{\mu\nu}$ Rang (0,2) $\eta_{\mu\nu}$ Rang (2,0)

aber auch invariant $\eta' = \eta$

Mit der Metrik können wir ko- in ko-variante Vekt/Tensoren überführen

$$\begin{aligned} A_{\mu} &= \eta_{\mu\nu} A^{\nu} & A'_{\mu} &= \eta'_{\mu\nu} A'^{\nu} = \eta_{\mu\nu} A'^{\nu} \\ B^{\mu} &:= \eta^{\mu\nu} A_{\nu} & B'^{\mu} &= \eta'^{\mu\nu} B'_{\nu} = \eta^{\mu\nu} B'_{\nu} \end{aligned}$$

ko-/kontra-variante Vektoren/Tensoren äquivalent aber nicht identisch bezgl. Rechnen

Metrik definiert das invariante Skalarprodukt zweier gleichartigen Vekt

$$A \cdot B = A_\mu B^\mu = A^\mu B_\mu = \eta^{\mu\nu} A_\mu B_\nu = \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$$

ebenso kann man über zwei Indizes eines Tensors die Spur bilden

$$C_\mu{}^\mu \dots = \eta_{\mu\nu} C^{\mu\nu} \dots = \eta^{\mu\nu} C_{\mu\nu} \dots$$

Tensorfelder und Part. Ableitungen

Für die jeden Ort/Zeit $\vec{x}, t \rightarrow x^\mu$ ein Vektor/Tensor zweier
verschiedener Arten von Feldern

skalares Feld $\psi'(x') = \psi(x)$

ko- bzw kontravar. Vektorfeld (entsprechend Tensorfelder)

$$A'_\mu(x') = A_\nu(x) \Lambda^\nu{}_\mu \quad B'^\mu(x') = (\Lambda')^\mu{}_\nu B^\nu(x)$$

Betrachte part. Abl eines Skalarfelds $\psi(x)$ $x' = \Lambda^{-1}x + b$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \right) \psi'(x') &= \left(\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \right) \psi(x'(x)) \\ &= \left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \right) \psi(x) = \Lambda^{\nu}_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \psi(x) \end{aligned}$$

Schreibe part. Abl als 4er Vektor $\partial_{\mu} := \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$

Regel $\partial'_{\mu} = \Lambda^{\nu}_{\mu} \partial_{\nu}$ $\partial^{\mu} = \eta^{\mu\nu} \partial_{\nu}$

part. Abl. transformieren natürlich als kov. Vektor

$$A_{\mu}(x) := \partial_{\mu} \psi(x) \quad C^{\mu}_{\nu}(x) := \partial_{\nu} B^{\mu}(x)$$

kov. Vektorfeld

Tensorfeld

9.3 kovariante Elektrodynamik

Felder und Gleichungen Skalarprodukt als Matrixprodukt von Zeile und Sp. Vektor.

Kreuzprodukt mittels total antisym. Tensor ϵ_{ijk} , $\epsilon_{123} = +1$

$$(\vec{A} \times \vec{B})_k = \epsilon_{ijk} A_i B_j$$

Schreibe $\epsilon_{ijk} A_i$ als Matrixprodukt für B_j , führe Notation ein

$$(A^X)_{ij} := -\epsilon_{ijk} A_k = \begin{pmatrix} 0 & -A_3 & +A_2 \\ +A_3 & 0 & -A_1 \\ -A_2 & +A_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Denn Kreuzprodukt als Matrixprodukt
oder äquiv. $(\vec{A} \times \vec{B})^T = \vec{A}^T B^X$

Inverse der \times Abb: $A_k = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (A^X)_{ij}$.

inh. MG $\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E} = \mu_0 \vec{J}$

$$\partial_j B_{jk}^x - \frac{1}{c^2} \partial_t E_k = \mu_0 j_k$$

inh MG $\frac{1}{c} \partial_j E_j = \mu_0 c \rho$

Mittels eines Tensors $F_{\mu\nu}$ (Feldstärke tensor) antisymmetrischer

3x3 Block $F_{\mu\nu} := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c} \vec{E}^T \\ -\frac{1}{c} \vec{E} & \mathbf{B}^x \end{pmatrix}$

$$F_{ij} = B_{ij}^x = -\epsilon_{ijk} B_k$$

$$F_{0k} = \frac{1}{c} E_k = -F_{k0}$$

$$F_{00} = 0$$

Definieren $4er$ -Stromdichte J_μ

3x1 Block

$$J_\mu = \begin{pmatrix} -c\rho \\ \vec{J} \end{pmatrix}$$

$$J_k = j_k$$

$$J_0 = -c\rho = -J^0$$

inh. MG als $4er$ -Gl

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu F_{\nu\rho} = \mu_0 J_\rho$$

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu =: \partial^\nu$$

$$\partial_0 = \frac{1}{c} \partial_t$$

Zwei Vorteile der 4er Notation:

- inh. MG ist kovariant formuliert \Rightarrow manifest kovariant unter Lorentz-Transformation

(falls $F_{\mu\nu}$ Tensorfeld (2,0) und J Vektorfeld)

- Ladungserhaltung / Strom erh. folgt unmittelbar

$$0 = \partial^\rho \partial^\mu F_{\mu\rho} = \mu \partial^\rho J_\rho = \mu_0 \left(\nabla \cdot \vec{J} + \dot{\rho} \right)$$

How MG haben die Form

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0$$

alternativ

$$\partial^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0$$

$$\tilde{F}_{ij} = \frac{1}{c} \epsilon_{ij}^x = -\frac{1}{c} \epsilon_{ijk} E_k$$

dualer
FS Tensor

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{B}^T \\ \vec{B} & \frac{1}{c} \vec{E}^x \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{0k} &= -B_k = -\tilde{F}_{k0} \\ \tilde{F}_{00} &= 0 \end{aligned}$$

Wie transformiert $\hat{F}_{\mu\nu}$ unter Lorentz-Transf.?

betrachte Relation $\hat{F}_{\mu\nu}$ zu $F_{\mu\nu}$ $\epsilon_{0123} := +1$

über total antisymmetrischen Tensor in 4D $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ (Levi-Civita)

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$$

$$\hat{F}_{\mu\nu} := \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \hat{F}^{\rho\sigma} = \dots = -F_{\mu\nu}$$

Allerdings transformiert $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ wie Pseudotensor Rang 4

$$\epsilon_{\mu'\nu'\rho'\sigma'} \Lambda^{\mu'}_{\mu} \Lambda^{\nu'}_{\nu} \Lambda^{\rho'}_{\rho} \Lambda^{\sigma'}_{\sigma} = \det \Lambda \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$$

ϵ invariant $\epsilon'_{\mu\nu\rho\sigma} := \det \Lambda \cdot \epsilon_{\mu'\nu'\rho'\sigma'} \Lambda^{\mu'}_{\mu} \Lambda^{\nu'}_{\nu} \Lambda^{\rho'}_{\rho} \Lambda^{\sigma'}_{\sigma}$
 $\epsilon' = \epsilon$
 ϵ Pseudotensor!

(ϵ als Tensor Rang 4 betrachte $\epsilon' = \det \Lambda \epsilon$ ϵ ist pseudo invariant)

Erhaltungsgrösse

Energie und Impulserhaltung

w E-dichte
 π Impulsdichte
 S E-Stromdichte
 T_{ij} l. Stromdichte

\Rightarrow Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu} \sim \begin{pmatrix} w & S \\ \pi & T_{ij} \end{pmatrix}$

$$T_{ij} = T_{ji} = \epsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \vec{E}^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \vec{B}^2 \right)$$

$$T_{i0} = T_{0i} = \frac{1}{c} S_i = c \pi_i = \frac{1}{\mu_0 c} \epsilon_{ijk} E_j B_k$$

$$T_{00} = -w = -\frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$$

In Ker Notation: $T_{\mu\nu} = -\frac{1}{\mu_0} F_{\mu\rho} F_{\nu}{}^{\rho} + \frac{1}{4\mu_0} \eta_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}, \quad T_{\mu}{}^{\mu} = 0$$

(sym. spurlos)

kontinuitätsgleichung \downarrow inh. MG

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = -\frac{1}{\mu_0} \partial^\mu F_{\mu\rho} F_{\nu\rho} + \frac{1}{\mu_0} F^{\mu\rho} \partial_\mu F_{\nu\rho} - \frac{1}{2\mu_0} F^{\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma}$$

hom. MG = 0
 \downarrow

$$= -J_\rho F_{\nu\rho} \leftarrow \text{Leistung} + \text{Kraftdichte}$$

Potentiale $\vec{\Phi}, \vec{A} \rightarrow A_\mu = \left(-\frac{1}{c} \vec{\Phi}, \vec{A}\right)$

$$\Rightarrow F_{\mu\nu} = -\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu$$

$$\Rightarrow \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0$$

Lorenz-Eichung
 $\partial^\mu A_\mu = \partial \cdot A = 0$
 \Downarrow inh. MG
 $\square A_\mu = \mu_0 J_\mu$

inh. MG: $\mu_0 J_\mu = \partial^\nu F_{\mu\nu} = -\partial^2 A_\mu + \partial_\mu \partial^\nu A_\nu = -\square A_\mu + \partial_\mu (\partial \cdot A)$

Eichtransf. $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$

$$F'_{\mu\nu} = -\partial_\mu A'_\nu + \partial_\nu A'_\mu = F_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu \Lambda - \partial_\nu \partial_\mu \Lambda = F_{\mu\nu}$$

invariant

Differentialformen

$dx^\mu \sim 1\text{-Form}$

$dx^\mu \wedge dx^\nu \sim 2\text{-Formen}$

Feldstärke tensor $F_{\mu\nu}$ entspr. 2-Form

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

(indexfreie Notation)

Differenzialoperator $d = dx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} : 0\text{-Form} \rightarrow 1\text{-Form} \rightarrow \dots \rightarrow n\text{-Form}$

$$d^2 = 0$$

hom. MG

$$dF = 0$$

inhom. MG benötigen duale FS Tensor $*F$ sowie Quellen J

Hodge Dual
n-Form
↓
(n-1)-Form

$$*F = \frac{1}{2} \tilde{F}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = -\frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} dx^\rho \wedge dx^\sigma$$

$$J = *(J_\mu dx^\mu) = \frac{1}{6} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma$$

$$d*F = \mu_0 J \Rightarrow d d*F = \mu_0 dJ$$

$$\left. \begin{aligned} A &= A_\mu dx^\mu \\ F &= dA \\ dF &= ddA = 0 \end{aligned} \right\}$$

Eichtransf. $A' = A + d\Lambda \quad F' = dA' = dA + dd\Lambda = dA = F$

9.4. Geladene Teilchen

Kraft auf Teilchen, Teilchen werden durch Pfade in RZ beschreiben
Pfade in der Raumzeit

In RZ wird ein Teilchen i.d.R. als Pfad $x^\mu(\sigma)$ σ Pfadvar.

spaltet auf in $\vec{x}(\sigma)$ sowie $ct(\sigma) = x^0(\sigma)$

Wahl der Pfadvar. σ ist beliebig

(σ undefiniert soweit $\tilde{\sigma}(\sigma)$ monoton steigt)

3 rel. Arten σ festzulegen:

- Nicht-rel: σ sei so dass $t(\sigma) = \sigma$ $\sigma \stackrel{!}{=} t$
 $x^\mu(t) = (ct, \vec{x}(t))$ aber: verlangt konkretes B.S.
- σ ist Eigenzeit τ $\sigma \stackrel{!}{=} c\tau$ benötigt $(x')^2 = -c^2$
 $x' \stackrel{!}{=} \partial x / \partial \sigma$
- keine Festlegung von $\sigma \rightarrow$ unphys. Freiheitsgrade

rel. mech. Größe: Vierer-Impuls p^μ

$$p^\mu = m c \frac{x'^\mu}{\|x'\|} \quad \|x'\| = \sqrt{-x'^2} \quad x'^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma}$$

Lorentz-Kraft Ker Kraft

$$c \frac{p'_\mu}{\|x'\|} = K_\mu = - \frac{q}{m} F_{\mu\nu} p^\nu$$

Beziehung zwischen Kraft & Leistung: $p' \cdot p = 0 = k \cdot p$

$$p^\mu K_\mu = - \frac{q}{m} p^\mu F_{\mu\nu} p^\nu = 0 \quad \text{Faktisym!}$$

im Komp.

$$p^\mu = \frac{m}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} \quad x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} \quad \sigma = t$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{p}} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad c \dot{p}^0 = q \vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \dot{\vec{p}}$$

Kapitel 10

Lösungen der freien Wellengleichung

Dauer: 2:26:51

10 Lösungen der freien Wellengleichung

10.1 Freie Wellengleichung keine Quellen $\rho=0, \vec{j}=0$

$$\vec{\partial} \cdot \vec{E} = 0 \quad \vec{\partial} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\partial} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \quad \vec{\partial} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E} = 0$$

Entkopplung

Wellengleichungen

$$0 = \vec{\partial} \times (\vec{\partial} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B})$$

$$= \vec{\partial} (\vec{\partial} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E} = -\square \vec{E} = 0$$

$$0 = \vec{\partial} \times (\vec{\partial} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E})$$

$$= \vec{\partial} (\vec{\partial} \cdot \vec{B}) - \Delta \vec{B} + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{B} = -\square \vec{B} = 0$$

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2$$

10.2 Ebene Wellen

Skalares Feld $\psi(\vec{x}, t)$ $\square\psi = 0$ $x := \vec{n} \cdot \vec{x}$

Annahme (eb. Wellen) $\psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{n} \cdot \vec{x}, t)$

Wellengl. $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \psi = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \psi$

$$\psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{n} \cdot \vec{x}, t) = \psi_+ (\vec{n} \cdot \vec{x} + ct) + \psi_- (\vec{n} \cdot \vec{x} - ct)$$

- nicht-dispersiv

- Ausbreitungsgeschw. $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ (D)
Lichtgeschwindigkeit (universell!)

Monochromatische Wellen

$$\psi(\vec{x}, t) = \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t) \in \mathbb{C}$$

Wellenzahlvektor $\vec{k} = \|\vec{k}\| \vec{n}$ kreisfreq. $\omega = \pm \|\vec{k}\| c$

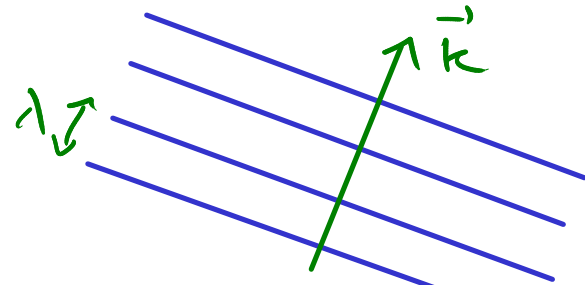
löst $\square \psi = 0$ ergibt weiterhin (Diff. Gl. 1. Ord)

$$\vec{\partial} \psi = i\vec{k} \psi \quad \text{und} \quad \partial_t \psi = -i\omega \psi$$

$$\Rightarrow \square \psi = 0 \quad \text{falls} \quad \omega^2 = c^2 \vec{k}^2$$

$$\text{Wellenlänge } \lambda = \frac{2\pi}{\|\vec{k}\|}$$

$$\text{Takt } \tau = \frac{2\pi}{\omega} \in \mathbb{R}$$



Für reelle Wellen

$$\psi = 2\text{Re}(A e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t}) = A e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t} + A^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x} + i\omega t}$$
$$= 2\text{Re}(A) \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) - 2\text{Im}(A) \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$$

Fourier-Transformation

$$\psi(\vec{x}, t) = \sum_j (A_j e^{i(\vec{k}_j \cdot \vec{x} - \omega_j t)} + \text{konj.})$$

$$\psi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(A(\vec{k}) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\|\vec{k}\|ct) + \text{konj.} \right) \quad \omega > 0 \quad \bar{A}(\vec{k}) \dots$$

Realität der Lsg.: $\bar{A}(\vec{k}) = A(\vec{k})^*$ ist kompl. konj. zu $A(\vec{k})$

Transformation für Fkt $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ (+)

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \tilde{F}(\omega)$$

$$\tilde{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\omega t} F(t)$$

Vollständigkeits Relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\omega t} = 2\pi \delta(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{+i\omega t} = \delta(t)$$

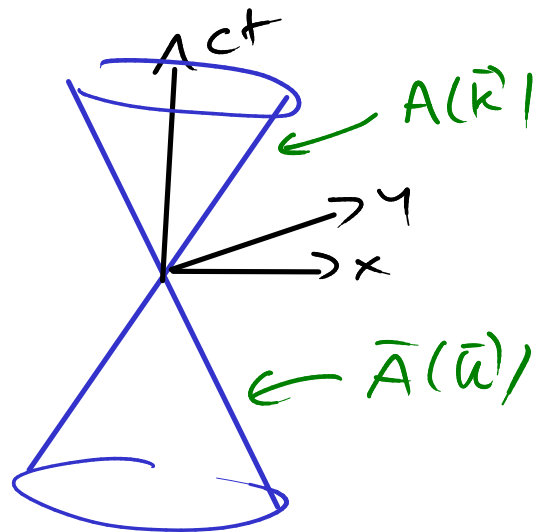
(Konvergenzfaktor $\exp(-\frac{1}{2}\omega^2 \epsilon)$ $\epsilon > 0$)

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{-i\omega t'} F(t')$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \delta(t-t') F(t') = F(t)$$

Fourier-Transformierte der allg. Lsg.

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(\vec{k}, \omega) &= \int dx^3 \int dt e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\omega t} \psi(x, t) \\ &= \int dt \left(A(\vec{k}) e^{-i\|\vec{k}\|ct} + \bar{A}(-\vec{k}) e^{+i\|\vec{k}\|ct} \right) e^{i\omega t} \\ &= 2\pi \delta(\omega - \|\vec{k}\|c) A(\vec{k}) + 2\pi \delta(\omega + \|\vec{k}\|c) \bar{A}(-\vec{k})\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\square \psi &= 0 \\ \Downarrow \\ \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{\psi} &= 0\end{aligned}$$

10.3 Polarisation

ebene, nicht-monochr. Welle $\frac{\partial}{\partial t} = -c \frac{\partial}{\partial \omega}$

$$\vec{E} = \vec{E} (\vec{n} \cdot \vec{x} - ct), \quad \vec{B} = \vec{B} (\vec{n} \cdot \vec{x} - ct)$$

Divergenzgl. $\vec{n} \cdot \vec{E}' = \vec{n} \cdot \vec{B}' = 0$ ← Ableitung nach $\vec{n} \cdot \vec{x} - ct$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

M.G. $\vec{\nabla} \times \vec{E} - \partial_t \vec{B} = 0 \quad \vec{B}' = \frac{1}{c} \vec{n} \times \vec{E}'$

MG $\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E} = \vec{n} \times \vec{B}' + \frac{1}{c} \vec{E}' = \frac{1}{c} (\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E}') + \vec{E}')$
 $= \frac{1}{c} (\vec{n} (\vec{n} \cdot \vec{E}') - \vec{n}^2 \vec{E}' + \vec{E}') = 0 \quad \checkmark$

$E, B' \rightarrow E, B \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{E} = 0 \quad \vec{n} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{n} \times \vec{E}$

Mächtigkeit $\vec{n} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow 2/3$ Komp. von \vec{E} frei, \vec{B} folgt

Monochromatische Wellen

$$E, B \sim \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\|\vec{k}\|ct)$$

$\vec{k} = \|\vec{k}\| \vec{n}$ WZ-Vektor, \vec{n} Ausbreitungsrichtung, $\|\vec{n}\|=1$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2 \perp \vec{n}$, $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ orthogonale Normalektoren.

$$\vec{E} = \operatorname{Re} \left((a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2) \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\|\vec{k}\|ct) \right) \quad a_k \in \mathbb{C}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \operatorname{Re} \left((a_1 \vec{e}_2 - a_2 \vec{e}_1) \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\|\vec{k}\|ct) \right)$$

Klassifizierung bis auf „offensichtliche“ Aspekte

- bis auf Translation in Raum und Zeit \rightarrow Phasenverschieb.
 - Rotationsinvarianz: \vec{n} ist egal; Rotation um \vec{n} rotiert a_1 und a_2
 - Skalierung der Amplitude: a_1, a_2 normieren.
- \Rightarrow Klassifizierung als $(a_1, a_2) = (1, i\alpha) \quad |1| \leq \alpha \leq +1$

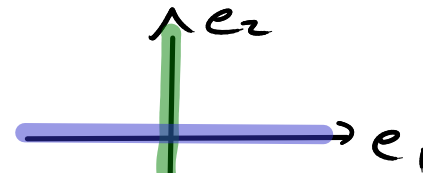
Lineare Polarisierung $\alpha = 0$

$$\vec{E} \sim \vec{e}_1$$

$$\vec{B} \sim \vec{e}_2$$

\vec{E} und \vec{B} in phase

$$\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{n} \perp \vec{E}$$



2 Polarisationsmoden

a_1 reell
 a_2 imaginär $\rightarrow 90^\circ$

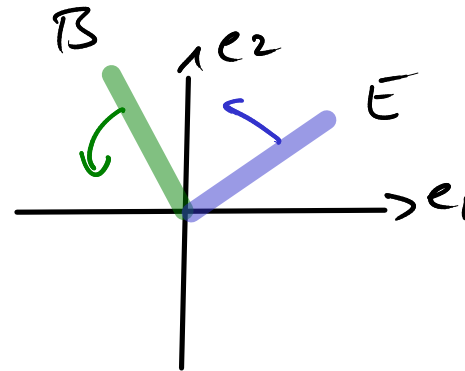
Phasenverschiebung

Zirkulare Polarisierung $\alpha = \pm 1$

\vec{E} und \vec{B} haben konst. Länge

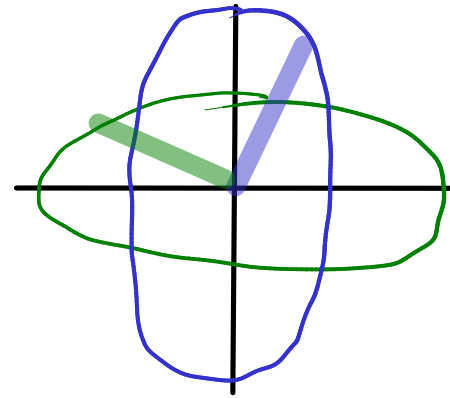
\vec{E} und \vec{B} drehen sich um \vec{n}

2 Polarisationsmoden ± 1



Elliptische Polarisation $|\alpha| \neq 0, 1$

\vec{E} und \vec{B} bewegen sich
auf unterschiedlichen Ellipsen.



10.4 Energietransport

Zirkulare Polarisation reelle Form

$$\vec{E} = E_0 (\vec{e}_1 \cos(k\vec{u} \cdot \vec{x} - \omega t) - \vec{e}_2 \sin(k\vec{u} \cdot \vec{x} - \omega t))$$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} (\vec{e}_1 \sin(k\vec{u} \cdot \vec{x} - \omega t) + \vec{e}_2 \cos(k\vec{u} \cdot \vec{x} - \omega t))$$

Kombinationen für ω , \vec{S} , $\vec{\pi}$, T

$$\epsilon_0 \vec{E}^2 = \epsilon_0 E_0^2 (\vec{e}_1^2 \cos^2 - 2\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \cos \sin + \vec{e}_2^2 \sin^2) = \epsilon_0 E_0^2$$

$$\frac{1}{\mu} \vec{B}^2 = \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} (\vec{e}_1^2 \sin^2 + 2\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \cos \sin + \vec{e}_2^2 \cos^2) = \epsilon_0 E_0^2$$

$$\epsilon \vec{E} \times \vec{B} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{c} (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \cos^2 - \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 \sin^2) = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{c} \vec{n}$$

E/I-Dichte

$$w = \epsilon_0 E_0^2 \quad \vec{\pi} = \frac{\epsilon_0}{c} E_0^2 \vec{n} = \frac{w}{c} \vec{n}$$

E-Flussdichte $\vec{S} = \epsilon_0 c E_0^2 \vec{n} = \omega c \vec{n}$. Ausbreitungsgeschw.
der Energiedichte

Spannungstensor $T = -\epsilon_0 E_0^2 \vec{n} \vec{n}^T = -c \vec{n} \vec{\pi}^T$

Lineare Polarisation

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_1 \cos(k\vec{u} \cdot \vec{x} - \omega t) \quad \vec{B} = \frac{E_0}{c} \vec{e}_2 \cos(k\vec{u} \cdot \vec{x} - \omega t)$$

Dichte: $\epsilon_0 \vec{E}^2 = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2 = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2$

↳

$$\vec{S} = \epsilon_0 c E_0^2 \vec{n} \cos^2$$

$$\vec{\pi} = \frac{\epsilon_0}{c} E_0^2 \vec{n} \cos^2$$

$$T = -\epsilon_0 E_0^2 \vec{n} \vec{n}^T \cos^2$$

$$\vec{\pi} = \frac{\omega}{c} \vec{n}$$

$$\vec{S} = c \omega \vec{n}$$

$$T = -\omega \vec{n} \vec{n}^T = -c \vec{n} \vec{\pi}^T$$

$$W = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(k\vec{u} \cdot \vec{x} - \omega t)$$

10.5 weitere Wellenlösungen

Wellenpakete

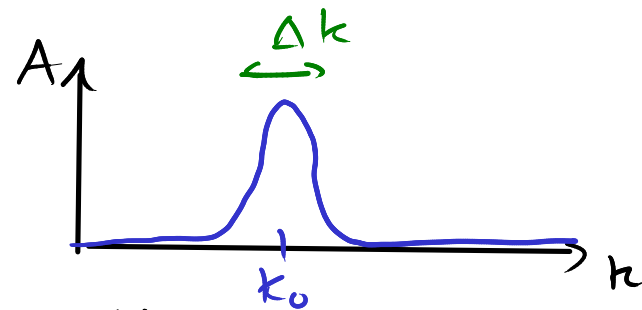
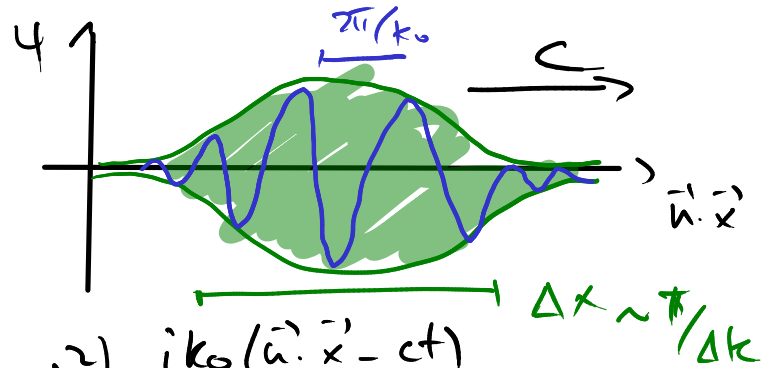
Gaußsches Wellenpaket

$$\psi(x,t) \sim \text{Re} \left(\exp \left(-\frac{1}{2} A k^2 (\vec{u} \cdot \vec{x} - ct)^2 \right) e^{i k_0 (\vec{u} \cdot \vec{x} - ct)} \right)$$

(hier ebene Welle)

Fourier-Transf. $\psi(x,t) = 2 \text{Re} \int \frac{d\mathbf{k}}{2\pi} A(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \vec{x} - c\mathbf{k}t}$

$$A(k) \sim \exp \left(-\frac{1}{2} (k - k_0)^2 / \Delta k^2 \right)$$



Zwei relevante
Geschwindigkeiten
in jedem Fall $|v_g| \leq c$

Phasengeschwindigkeit $v_0 = \omega / \|\mathbf{k}\| \sim v$ (Berge/Täler)

Gruppengeschwindigkeit $v_g = d\omega / d\|\mathbf{k}\| \sim v$ (Einhüllende)

Kugelwellen (skalares Fall 4)

$$\bar{\Psi}(\vec{x}, t) = \frac{1}{r} \psi(r, t) \quad r = \|\vec{x}\|$$

Wellengl $\square \bar{\Psi} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 \psi - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \psi = 0$

allg Lsg

$$\Psi = \frac{1}{r} \psi_+ \overset{\substack{\text{einlaufende} \\ \text{Welle}}}{(r+ct)} + \frac{1}{r} \psi_- \overset{\substack{\text{auslaufende} \\ \text{Welle}}}{(r-ct)} \quad \psi_{\pm} \text{ beliebig}$$

Energie / Impuls transport $\bar{\Psi} \sim \frac{1}{r} e^{i\vec{k}\vec{n}\cdot\vec{x} - i\omega t}$

$$\omega \sim \frac{1}{r^2} \quad \vec{\pi} \sim \vec{S} \sim \frac{1}{r^2} \vec{n} \quad T \sim \frac{1}{r^2} \vec{n} \vec{n}^T$$

Vergleich ^{Fläche} Flächen einer Kugeloberfläche $A = 4\pi r^2$

- Energie je Kugelschale ist unabh. von Abstand
- Energiefluss durch Kugelschale ist unabh. von Abstand

Kapitel 11

Erzeugung elektromagnetischer Wellen

Dauer: 5:10:15

11 Erzeugung Elektromagnetischer Wellen

11.1 Anfangswertproblem

Quellfreier Raum $\rho = \vec{j} = 0$; Felder \vec{E}, \vec{B} zu einer Zeit ($t=0$) vor.

hier Zwangsbedingungen (DG ohne ∂_t)

$$\vec{\partial} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho = 0 \quad \vec{\partial} \cdot \vec{B} = 0$$

Zeitentwicklung:

$$\partial_t \vec{B} = -\vec{\partial} \times \vec{E}; \quad \partial_t \vec{E} = c^2 \vec{\partial} \times \vec{B} - \frac{1}{\epsilon_0} \vec{j} = c^2 \vec{\partial} \times \vec{B},$$

* Zwangsbed für $t \neq 0$ folgen aus z.B. Zeit entw.

$$\partial_t (\vec{\partial} \cdot \vec{E}) = \vec{\partial} \cdot (\partial_t \vec{E}) = c^2 \vec{\partial} \cdot (\vec{\partial} \times \vec{B}) = 0$$

* Feldenergie
erhalten;

$$W = \int dx^3 \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) \geq 0$$

$W(t) = W(0)$. und Lösung für $t \in \mathbb{R}$ existiert

* Eindeutigkeit: Linearität \Rightarrow Differenz zweier Lsg $\Delta \vec{E}$, $\Delta \vec{B}$
 erfüllt MG ebenso. Zudem für $t=0$: $\Delta \vec{E} = \Delta \vec{B} = 0$
 $\Rightarrow W_{\Delta}(0) = 0 \Rightarrow W_{\Delta}(t) = 0 \Rightarrow \Delta \vec{E} = \Delta \vec{B} = 0$ für $t \neq 0$

Fourier-Raum

gesucht allg. Lsg $\nabla \vec{E} = \nabla \vec{B} = 0$, $\omega = \omega(\vec{k}) = c \|\vec{k}\| \geq 0$

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \int \frac{d\vec{k}^3}{(2\pi)^3} \left(\vec{\alpha}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t} + \vec{\alpha}(\vec{k})^\dagger e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x} + i\omega t} \right)$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \int \frac{d\vec{k}^3}{(2\pi)^3} \left(\vec{\beta}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t} + \vec{\beta}(\vec{k})^\dagger e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x} + i\omega t} \right)$$

weitere MG: $\vec{k} \cdot \vec{\alpha} = 0$, $\vec{k} \cdot \vec{\beta} = 0$, $\vec{\beta} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{\alpha}$, $\vec{\alpha} = \frac{c^2}{\omega} \vec{k} \times \vec{\beta}$

Bestimmung von $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ mittels FT.

$$\vec{E}(\vec{x}, 0) = \int \frac{d\vec{k}^3}{(2\pi)^3} \vec{E}_0(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad \vec{B}(\vec{x}, 0) = \int \frac{d\vec{k}^3}{(2\pi)^3} \vec{B}_0(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$$

Vergleichen mit Lsg.ansatz

$$\vec{\alpha}(k) + \vec{\alpha}(-k)^* = \vec{E}_0(k), \quad \vec{\beta}(k) + \vec{\beta}(-k)^* = \vec{B}_0(k)$$

aus MG folgt zudem

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}(k) - \vec{\alpha}(-k)^* &= -\frac{c^2}{\omega} \vec{k} \times \vec{\beta}(k) - \frac{c^2}{\omega} \vec{k} \times \vec{\beta}(-k)^* \\ &= -\frac{c^2}{\omega} \vec{k} \times \vec{B}_0(k) \end{aligned}$$

$$\vec{\alpha}(k) = \frac{1}{2} \vec{E}_0(k) - \frac{c^2}{2\omega} \vec{k} \times \vec{B}_0(k)$$

z.B.

$$\begin{cases} \vec{k} \cdot \vec{E}_0(k) = 0 \\ \vec{k} \cdot \vec{B}_0(k) = 0 \end{cases}$$

$$\vec{\beta}(k) = \frac{1}{2} \vec{B}_0(k) + \frac{1}{2\omega} \vec{k} \times \vec{E}_0(k).$$

Selbiges für Potentiale Φ, \vec{A} .

Eichfixierung!

* Eindeutigkeit Lösung nur modulo Eichtransformationen.

* Anfangswerte für Potentiale sind: $\Phi, \vec{A}, \dot{\Phi}, \dot{\vec{A}}$. Warum?

Freiheitsgrade $\vec{E}, \vec{B}(k)$ vs $\Phi, \vec{A}, \dot{\Phi}, \dot{\vec{A}}(k)$

$$\begin{matrix} 3 & \times & 3 \\ 3 & \times & 3 \end{matrix}$$

Ortsraum (für skalares Feld ψ , $\square \psi = 0$, $\psi(x, 0) = \psi_0(x)$
 $\partial_t \psi(x, 0) = \dot{\psi}_0(x)$)

$$\psi(x, t) = \int d^3y \left(\partial_t D(x-y, t) \psi_0(y) + D(x-y, t) \dot{\psi}_0(y) \right)$$

mittels Fourier-~~Rechen~~ Analyse $\omega = \omega(k) = c \|\vec{k}\|$

$$\psi(x, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\psi_0(k) \cos(\omega t) + \dot{\psi}_0(k) \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$$

Vergleiche

$$\leadsto D(x, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$$

Eigenschaften von D : $\square D = 0$ $\partial_t^2 D(x, 0) = 0$

$$\square D = 0 \quad \checkmark \quad D(x, 0) = 0 \quad \partial_t D(x, 0) = \delta^3(x)$$

$\leadsto \psi(x, t)$ ist tatsächlich die gewählte Lsg.!

$D(x,t)$ im Ortsraum? D ist rotationssym.

FT mit Rot. sym $\vec{k} \cdot \vec{x} = kr \cos \vartheta$, $\int dk^3 = 2\pi \int_0^\infty dk k^2 \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \dots$

$$D(x,t) = \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^2} \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta e^{i kr \cos \vartheta} \frac{k^2}{\omega} \sin(\omega t)$$

$$\stackrel{z = \cos \vartheta}{=} \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 dz e^{i kr z} \frac{k}{2ic} (e^{ikct} - e^{-ikct})$$

$$= \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{1}{ikr} (e^{i kr} - e^{-i kr}) \frac{k}{2ic} (e^{ikct} - e^{-ikct})$$

$$= \frac{1}{2cr} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{(2\pi)^2} (e^{ik(r-ct)} - e^{ik(r+ct)})$$

$$= \frac{1}{4\pi rc} (\delta(r-ct) - \delta(r+ct))$$

$$= \frac{1}{4\pi rc} \begin{cases} \delta(r-ct) & t > 0 & \text{Zukunft} \\ -\delta(r+ct) & t < 0 & \text{Vergangenheit} \end{cases}$$

\Rightarrow Ausbreitungsgeschw. der Wellen ist konstant c !

11.2 Greensche Funktionen

Skalares Feld ψ mit Quellenen: $\square \psi = -\rho$

Ausatz $\psi(\vec{x}, t) = \int d^3y ds G(\vec{x} - \vec{y}, t - s) \rho(\vec{y}, s) + \psi_{\text{hom}}(x, t)$

G : Greensche Fkt mit Eigenschaft

$$\square G = -\delta^3(\vec{x})\delta(t)$$

Lösung für $G_{\text{ret}}(x, t) = \frac{c}{4\pi r} \delta(r - ct)$

Beweis für $\vec{x} \neq 0$ nutze: $\Delta = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^2 r$ für $\vec{x} \neq 0$

$$\Delta G_{\text{ret}} = \frac{c \delta''(r - ct)}{4\pi r} \quad \frac{1}{c^2} \partial_t^2 G_{\text{ret}} = \frac{c \delta''(r - ct)}{4\pi r} \Rightarrow \square G_{\text{ret}} = 0$$

Für $\vec{x} \approx 0$ $\Delta \frac{1}{4\pi r} = -\delta^3(\vec{x}) \Rightarrow \square G_{\text{ret}} = -c \delta^3(\vec{x}) \delta(r - ct) = -c \delta^3(\vec{x}) \delta(ct)$
 $= -\delta^3(\vec{x}) \delta(t).$

G_{ret} ist die retardierte Greensche Fkt denn

$G_{ret} \neq 0$ nur für $t \geq 0$ da $r \geq 0$

Quelle ρ bei Zeit s nur zu Feldern ψ bei Zeit $t > s$ beiträgt:

\sim Kausalität

Anm: es gibt auch avancierte Greensche Fkt G_{av}

$$G_{av} = \frac{1}{4\pi r} \delta(r+ct) \quad (t < 0)$$

Fourier-Raum

$$G(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t} \hat{G}(\vec{k}, \omega)$$

$$\text{mit } \hat{G}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{k^2 - \omega^2/c^2} \Leftrightarrow \square G = - (k^2 - \omega^2/c^2) \hat{G}$$
$$\delta^3(\vec{x}) \delta(t) \hat{=} 1$$

Vorsicht: Pole bei $\|\vec{k}\| = \omega/c$!

Erweiterung des Defbereichs für ω von $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ($\sim t$)

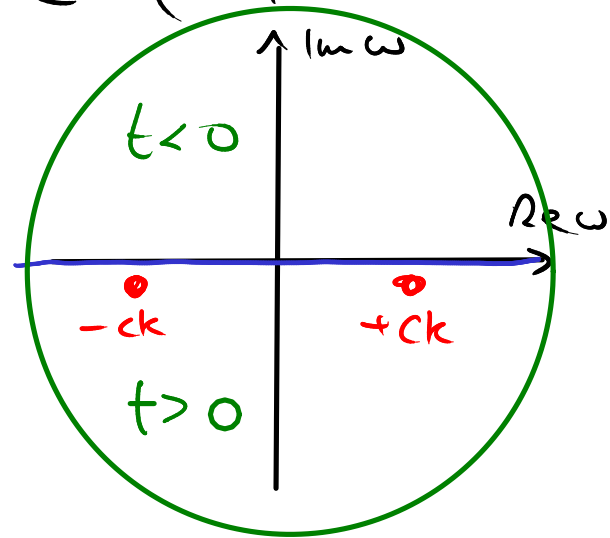
Arbeiten mit komplex. hol. Fkt $\tilde{G}(\vec{k}, \omega)$

Verschieben Pole etwas (ϵ) nach unten

Für $t < 0$ + Residuensatz + holomorph
(keine Pole) $\Rightarrow \hat{G}_{ret} = 0$

Für $t > 0$ zwei Pole in unterer HE . $\Rightarrow \hat{G}_{ret} \neq 0$

$$\hat{G}_{ret}(x, t) = \frac{c}{4\pi r} \delta(r - ct)$$



Elektrodynamik

Betrachte Lösung für Potentiale $\underline{\Phi}$, \vec{A} bei geg. Quellen ρ, \vec{j}
Eichtransformationen \rightarrow Fixierung Lorenz \rightarrow Eichung $\frac{1}{c^2} \partial_t \Phi + \vec{\partial} \cdot \vec{A} = 0$

$$\square \underline{\Phi} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad \square \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

$$\text{Lösung } \Phi(x, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3y ds G_{\text{ret}}(x-y, t-s) \rho(y, s)$$

$$\vec{A}(x, t) = \mu_0 \int d^3y ds G_{\text{ret}}(x-y, t-s) \vec{j}(y, s)$$

Eichbedg folgt aus Ladungserhaltung

$$\frac{1}{c^2} \partial_t \Phi + \vec{\partial} \cdot \vec{A} = \int d^3y ds \dots (\partial_t \rho + \vec{\partial} \cdot \vec{j}) = 0$$

Erinnerung $G_{\text{ret}}(x, t) = \frac{c}{4\pi r} \delta(r-ct)$ Retardierung

$$\Rightarrow \Phi(x, t) = \int d^3y \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \|x-y\|} \rho(y, t - \|x-y\|/c),$$

$$\vec{A}(x, t) = \int d^3y \frac{\mu_0}{4\pi \|x-y\|} \vec{j}(y, t - \|x-y\|/c).$$

Relativistische Formulierung

Problem: $\square \psi = -\rho$

Ausatz $\psi(x) = \int d^4 y G(x-y) \rho(y) + \psi_{\text{hom}}(x)$

mit Greenscher Fkt Eigenschaft $\square G = -\delta^4(x) = -\frac{1}{c} \delta^3(\vec{x}) \delta(t)$

$$\begin{aligned} G_{\text{ret}}(x) &= \frac{1}{2\pi} \delta(x^2) \Theta(x^0) && \text{Skalarfkt} && \vec{x}^2 - c^2 t^2 = (r-ct)(r+ct) \\ &= \frac{1}{2\pi} \delta(\vec{x}^2 - c^2 t^2) \Theta(t) && \text{↙} && \text{↘} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{2r} \delta(r-ct) + \frac{1}{2r} \delta(r+ct) \right) \Theta(t) && \text{↖} && \text{↗} \\ &= \frac{1}{4\pi r} \delta(r-ct) \end{aligned}$$

Fourier-Transf. $G(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot x} \tilde{G}(k) \quad \tilde{G}(k) = \frac{1}{k^2}$

$$k^\mu = \begin{pmatrix} \omega/c \\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}$$

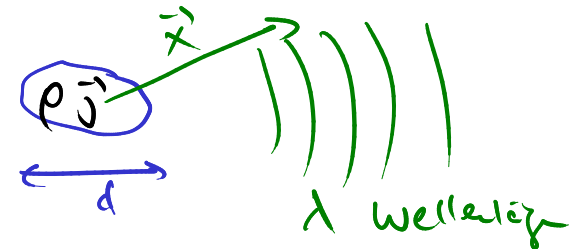
$$k \cdot x = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t$$

11.3 Strahlung oszillierender Ströme

Dyn. Strom / Ladungsverteilung auf kleinen Raum $\|y\| < d$

Interessieren uns für Felder in grossen Abstand $\|x\| = r \gg d$

3 rel. Skalen: r Abstand
 d Grösse
 λ Wellenlänge



Verhältnis $r : d : \lambda$ beeinflusst Form / Näherung für Felder

Monochromatische Wellen

Allgemeine Lösung für Felder lässt sich nach Freq. ω zerlegen

\Rightarrow fixiere ω Alle Felder (Quelle der Form

$$\in \mathbb{R} \rightarrow F(x,t) = \operatorname{Re} \left(F_0(\vec{x}) e^{-i\omega t} \right) \in \mathbb{C}$$

Für Mittelwert in quad $t \rightarrow b$.

$$\partial_t F \approx \operatorname{Re} \left(\dot{F}_0 e^{-i\omega t} \right) \quad \dot{F}_0 = -i\omega F_0 \quad \parallel$$

$$\langle FG \rangle = \dots = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(F_0 G_0^* \right)$$

Allg. Lösungssystem

$$\phi_0(\vec{x}) = \int d^3y \frac{\rho_0(y)}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{x}-y\|} e^{i\|\vec{x}-y\|k}$$

$$\vec{A}_0(\vec{x}) = \int d^3y \frac{\mu_0 \vec{j}_0(y)}{4\pi \|\vec{x}-y\|} e^{i\|\vec{x}-y\|k}$$

$$k = \omega/c$$

$\phi_0(x)$ wird durch Lorenz-Fidung algebraisch durch \vec{A} bestimmt

$$\frac{1}{c^2} \partial_t \phi_0 + \vec{\partial} \cdot \vec{A}_0 = 0$$

$$\Rightarrow \phi_0 = -i \frac{c^2}{\omega} \vec{\partial} \cdot \vec{A}_0$$

Felder

$$\vec{B}_0 = \vec{\partial} \times \vec{A}_0$$

$$\vec{E}_0 = i\omega \vec{A}_0 + i \frac{c^2}{\omega} \vec{\partial} (\vec{\partial} \cdot \vec{A}_0)$$

Ab hier $F_0 \rightarrow \mathcal{F}$

Strahlungszone, grosser Abstand

$$\|x\| = r \gg d > \|y\|, \quad \& \quad r \gg \lambda \sim 1/k$$

Dominate Terme für $r \rightarrow \infty$? Annahme d/λ bleibt konstant wenn $r \rightarrow \infty$

Entwicklung von $\|x-y\| = \sqrt{(x-y)^2}$

$$\|x-y\| = r \sqrt{1 - 2 \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{r^2} + \frac{y^2}{r^2}} = r - \vec{n} \cdot \vec{y} - \frac{(\vec{n} \cdot \vec{y})^2}{2r} + \frac{y^2}{2r} + O(1/r^2)$$

$$A(x) = A_{\text{as}}(x) + O(e^{ikr}/r^2)$$

$$A_{\text{as}}(x) = \int d^3y \frac{\rho_{\text{av}}(\vec{y})}{4\pi r} e^{ikr} e^{-ik\vec{n} \cdot \vec{y}} \sim \frac{e^{ikr}}{r}$$

Für Auskirkung von ∂ beachte dass $\partial \frac{P(r)}{Q(r)} \sim \frac{\hat{P}(r)}{rQ(r)} \quad \partial \sim \frac{1}{r} \ll 1$

$$\text{aber} \quad \partial e^{ikr} \sim ik e^{ikr} \quad \partial \sim ik \approx 1$$

Anwenden auf \vec{E}, \vec{B} $\vec{n} = \frac{\vec{x}}{r}$

$$\vec{B} = ik\vec{n} \times \vec{A} + O(e^{ikr}/r^2)$$

$$\vec{E} = ikc(\vec{A} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{A})) + O(e^{ikr}/r^2) = -ikc\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{A}) + \dots$$

$$\vec{B}, \vec{E} \sim e^{ikr}/r$$

Erhaltene Größen und Flüsse $\sim 1/r^2$

$$\langle \frac{1}{4} \epsilon_0 \vec{E}^2 \rangle = \epsilon_0 k^2 c^2 (\|\vec{A}\|^2 - |\vec{n} \cdot \vec{A}|^2) + O(1/r^3) = \langle \frac{1}{4\mu_0} \vec{B}^2 \rangle$$

$$\langle w \rangle = \frac{k^2}{2\mu_0} (\|\vec{A}\|^2 - |\vec{n} \cdot \vec{A}|^2) + O(1/r^3)$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{S} \rangle &= \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} [\vec{E} \times \vec{B}^*] = \frac{k^2 c}{2\mu_0} \text{Re} (\vec{A} \times (\vec{n} \times \vec{A}^*) - (\vec{A} \cdot \vec{n}) \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{A}^*)) \\ &= c\vec{n} \langle w \rangle + O(1/r^3) \sim \langle \vec{\pi} \rangle \end{aligned}$$

$$\langle T \rangle = \dots = -\vec{n} \vec{n}^T \langle w \rangle + O(1/r^3)$$

Strahlungsbilanz (Abgestrahlte Leistung je Raumwinkel $d\Omega$)

$$\frac{d^2 P}{d^2 \Omega} := r^2 \vec{n} \cdot \vec{S} = \frac{c k^2 r^2}{2\mu_0} \left(\|\vec{A}\|^2 - |\vec{n} \cdot \vec{A}|^2 \right) + O(1/r)$$

Gesamte Strahlungsleistung

$$P = \int d^2 \Omega \frac{d^2 P}{d^2 \Omega} = \frac{c k^2 r^2}{2\mu_0} \int d^2 \Omega \left(\|\vec{A}_{\text{as}}\|^2 - |\vec{n} \cdot \vec{A}_{\text{as}}|^2 \right) + O(\downarrow)$$

wegen Energiebilanz.

Multipolentwicklung weitere Annahme $\|\vec{y}\| \ll 1/k \sim \lambda$
 (Wellenlänge λ gross gegenüber Quellregion) Entwicklung $\|\vec{y}\|/\lambda$

$$\vec{A}_{\text{as}}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} e^{ikr} \int d^3 y \vec{j}(\vec{y}) \left(1 - ik\vec{n} \cdot \vec{y} + \dots \right) \dots$$

Ziel: werke Integrale aus $\left(\vec{\partial} \cdot \vec{j} = -\partial_t \rho = ikc\rho \right)$

$$\int d^3 y \vec{j}(\vec{y}) \quad \text{etc.}$$

Betrachte für Quellregion V mit $\rho = \vec{j} = 0$ auf ∂V

$$0 = \sum_{k=1}^3 \oint_{\partial V} dx^2 n_k (x_e j_k) \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_V dx^3 \partial_k (x_e j_k)$$

$$= \int dx^3 \vec{j}_e + \int dx^3 x_e \vec{\partial} \cdot \vec{j}$$

Dipolmoment
von ρ

$$\int dx^3 \vec{j} = - \int dx^3 \vec{x} (\vec{\partial} \cdot \vec{j}) = -ikc \int dx^3 \vec{x} \rho = -ikc \vec{P}$$

Für nächsthöhere Ordnung: ab. mit über $\vec{\partial} \cdot (x_k x_e \vec{j})$

$$\dots \Rightarrow \int dx^3 j_e(y) \vec{n} \cdot \vec{y} = \dots = -\frac{1}{6} ikc R \vec{n} - \frac{1}{2} ikc \vec{u} \left(dx^3 \vec{y}^2 \rho + \vec{M} \times \vec{n} \right)$$

el. Quadr. Tensor $R = \int dx^3 (3 \vec{x} \vec{x}^T - \vec{x}^2) \rho$ $\text{tr } R = 0$

mag. Dipolmom. $\vec{M} = \frac{1}{2} \int dx^3 \vec{x} \times \vec{j}$

und $\int dx^3 \vec{x}^2 \rho$

$$\vec{A}_{as}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi r} e^{ikr} \left(\overset{\text{f\u00fcr den}}{-ike \vec{P}} - \overset{\text{N\u00e4chsterf\u00fchrer}}{ik \vec{M} \times \vec{n}} - \frac{1}{6} k^2 c R \vec{n} + \dots \right)$$

Multipolentwicklung: $r = \|x\| \gg \lambda \sim \frac{1}{k} \gg d = \|y\|$ Entw. nach (kd)

$$\vec{A}_{\text{as}}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi r} e^{ikr} \int d^3y \vec{j}(y) (1 - ik\vec{n} \cdot \vec{y} + \dots) \quad r \sim \vec{n}$$

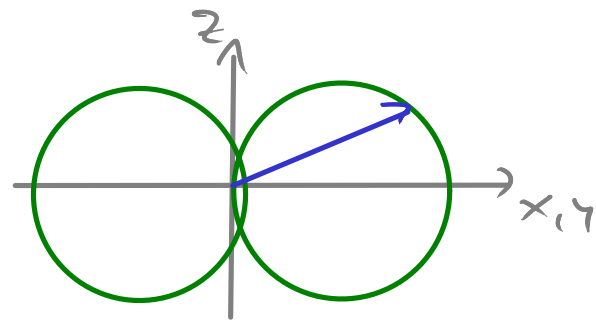
$$\vec{A}_{\text{as}}(x) = \frac{\mu}{4\pi r} e^{ikr} \left(\underbrace{-ikc\vec{P}}_{\text{el. Dipol}} - ik\vec{M} \times \vec{n} \underbrace{- \frac{1}{6}k^2 c R \vec{n}}_{\text{el. Quadr. / mag. Quad.}} + \dots \underbrace{\dots}_{\text{höherer M.}} \right)$$

el. Dipol $\vec{A}_{\text{as}}(x) = -ikc\mu_0 \frac{e^{ikr}}{r} \vec{P}$

Abstrahlungscharakteristik (Leistung je Raumwinkel (element))

$$\frac{d^2 P_{\text{as}}}{d^2 \Omega} = \frac{c^3 k^4 \mu_0}{32\pi^2} (\|\vec{P}\|^2 - |\vec{P} \cdot \vec{n}|^2)$$

$$\vec{P} \sim \vec{e}_z = \frac{c^3 k^4 \mu_0 \|\vec{P}\|}{32\pi^2} \underbrace{(1 - \cos^2 \vartheta)}_{\sin^2 \vartheta}$$



Gesamtleistung

$$P_{\text{ges}} = \int d\Omega \sin^2 \vartheta \int d\varphi \frac{d^2 P_{\text{ges}}}{d^2 \Omega} = \frac{c^3 k^4 \mu_0 \|P\|^2}{16\pi} \int d\vartheta \sin^3 \vartheta$$

$z = \cos \vartheta$

$$= \frac{c^3 k^4 \mu_0 \|P\|^2}{16\pi} \int_{-1}^1 dz (1-z^2) = \frac{c^3 k^4 \mu_0 \|P\|^2}{12\pi} = \frac{ck^4 \|P\|^2}{12\pi \epsilon_0}.$$

rein mag. Dipolmoment

$$\vec{A}_{\text{ges}} = -i \mu_0 k \frac{e^{i\omega r}}{4\pi r} \vec{M} \times \vec{n}$$

$$\leadsto \frac{d^2 P_{\text{ges}}}{d^2 \Omega} = \frac{ck^4 \mu_0}{32\pi^2} (\|M\|^2 - |\vec{M} \cdot \vec{n}|^2) \quad \left(\begin{array}{l} \text{analog zu zuvor} \\ \text{mit } \vec{P} \leftrightarrow c\vec{M} \end{array} \right)$$

gemischtes Dipolmoment

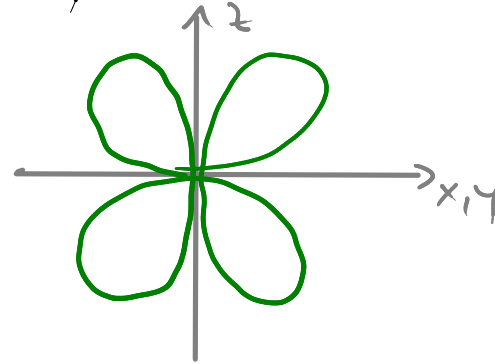
$$\frac{d^2 P_{\text{ges}}}{d^2 \Omega} = \frac{d^2 P_{\text{el}}}{d^2 \Omega} + \frac{d^2 P_{\text{mag}}}{d^2 \Omega} + \frac{c^2 k^4 \mu_0}{16\pi} \text{Re} \left((\vec{P} \times \vec{M}^*) \cdot \vec{n} \right)$$

Abstrahlung als $(Y_{0,0}, Y_{1,m}, Y_{2,m})$

Quadrupolstrahlung $R \sim \text{diag}(+1, +1, -2) R$

$$\rightarrow \frac{d^2 P_{\text{as}}}{d^2 \Omega} \sim c^3 k^6 \mu_0 |R| \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta$$

allg. $\Upsilon_{\ell, m}$ mit $\ell \leq 4$



Nahzone andere Näherung mit $d < r \ll \lambda$ Wellenlänge gross!

$$\vec{A} = \int d^3 y \frac{\mu_0 \vec{j}(y)}{4\pi \|x-y\|} e^{i \|x-y\| k} \approx \int d^3 y \frac{\mu_0 \vec{j}(y)}{4\pi \|x-y\|} \quad \text{statisch v. Potential}$$

Potentiale aus EM statisch, keine Retardierung.

Problem r-Abh. der Strahlung? Monopol $\sim E, B \sim 1/r^2$ Dipol $\sim E, B \sim 1/r^3$

$$\Rightarrow S \sim 1/r^4 \text{ oder höher.} \Rightarrow P \sim \int_{r^2}^{r^4, 5, 6} \sim 1/r^{2,3,4} \quad \text{Tatsächlich} \\ \oint \vec{S} \cdot \vec{n} = 0$$

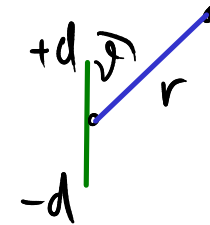
11.4 Lineare Antenne

- linearer Draht, Länge $2d$ entlang z -Achse $z = -d$ bis $z = +d$
- Stromquelle bei $z=0$. Strom mit c entlang Antenne $e^{\pm ikz}$
 - Reflexion an Enden: $j=0$

$$\Rightarrow \vec{j}(x) = I \vec{e}_z \sin(kd - k|z|) \delta(x) \delta(y) \quad |z| < d$$

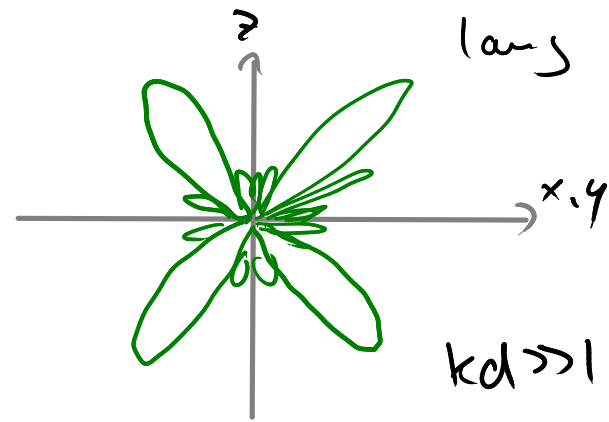
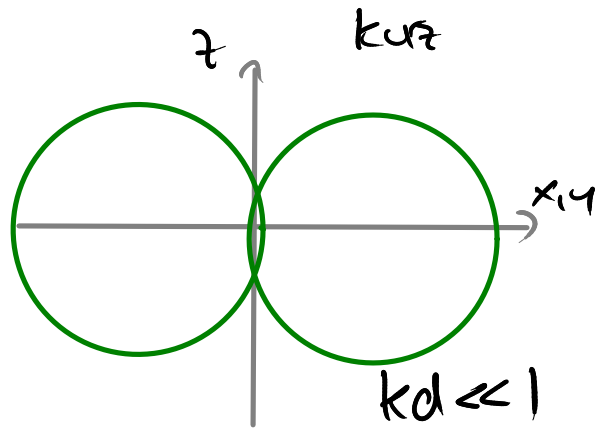
$$\vec{A}_{\text{as}} = \frac{\mu_0 \vec{e}_z I}{4\pi r} e^{ikr} \int_{-d}^{+d} dz e^{-ikz \cos \vartheta} \sin(kd - k|z|)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \vec{e}_z e^{ikr} \frac{2}{k} \frac{\cos(kd \cos \vartheta) - \cos(kd)}{\sin^2 \vartheta}$$



Abstrahlungsscher.

$$\frac{d^2 P_{\text{as}}}{d^2 \Omega} = \frac{c \mu_0}{8\pi^2} \left(\frac{\cos(kd \cos \vartheta) - \cos(kd)}{\sin \vartheta} \right)^2$$



11.5 Beschleunigte Punktladungen

Potentiale Pfad $\vec{y}(t)$ Ladung q

$$\Rightarrow \rho(x,t) = q \delta^3(x - y(t)), \quad \vec{j}(x,t) = q \dot{\vec{y}}(t) \delta^3(x - y(t))$$

Greensche Fkt (ret) $G_{\text{ret}} = \frac{c}{4\pi \|x\|} \delta(\|x\| - ct)$

$$\Phi(x,t) = \int dx'^3 dt' \frac{cq}{4\pi \epsilon_0 \|x-x'\|} \delta^3(x' - y(t')) \delta(\|x-x'\| - c(t-t'))$$

$$= \int dt' \frac{cq}{4\pi \epsilon_0 \|x - y(t')\|} \delta(\|x - y(t')\| - c(t-t'))$$

$$\vec{A}(x,t) = \int dt' \frac{c q \mu_0 \dot{\vec{y}}(t')}{4\pi \|x - y(t')\|} \delta(\|x - y(t')\| - c(t-t'))$$

Zwei Effekte der δ -Fkt.

- legt $t' = s(x, t)$ fest

so dass $\|x - y(s)\| = c(t - s)$

Falls $\|x\| < c$ dann ist s eindeutig!

(in der Praxis ist Gleichung nichtlinear \Rightarrow schwierig)

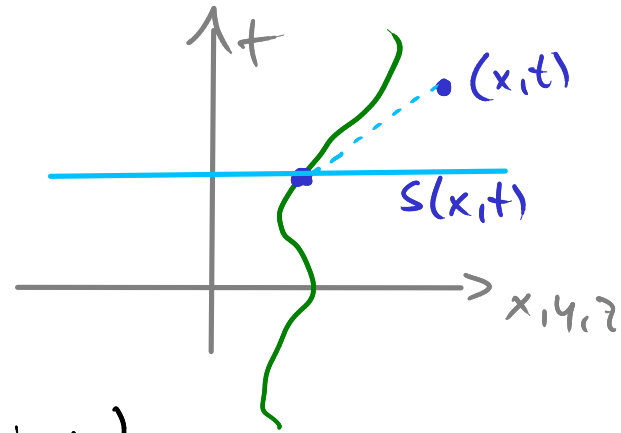
- Argument $\delta(f(t')) \Rightarrow$ Faktor $\frac{1}{f'(s)}$

$$f(t') = \|x - y(t')\| - ct + ct'$$

$$f'(s) = c - \frac{\dot{y}_{(s)} \cdot (\vec{x} - \vec{y}(s))}{\|x - y(s)\|} =: ck$$

$$\Rightarrow \Phi(x, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 rk}, \quad \vec{A}(x, t) = \frac{\mu_0 q \vec{v}}{4\pi rk}$$

$$\vec{A}(x, t) = \frac{\mu_0 q \vec{v}}{4\pi rk}$$



Abstand

$$r(x, t) = \|x - y(s)\|$$

$$\vec{v}(x, t) = \dot{\vec{y}}(s)$$

$$\vec{n}(x, t) = \frac{\vec{x} - \vec{y}(s)}{r}$$

$$k(x, t) = 1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c}$$

Elektromagnetische Felder

Betrachte implizite Abh. von $s(x, t)$ um $\vec{\partial}$, ∂_t zu berechnen.

Def 61. $\|\vec{x} - \vec{y}(s)\| = c(t - s)$

Gleichung variieren nach \vec{x} , t , s :

$$\frac{(\delta\vec{x} - \delta s \vec{v}) \cdot (\vec{x} - \vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} = c(\delta t - \delta s)$$

$$\Leftrightarrow \delta\vec{x} \cdot \vec{n} - \delta s \vec{v} \cdot \vec{n} - c\delta t + c\delta s = 0$$

$$\Leftrightarrow \delta s = \frac{\delta t - \delta\vec{x} \cdot \vec{n} / c}{1 - \vec{n} \cdot \vec{v} / c} = \frac{\delta t}{k} - \frac{\delta\vec{x} \cdot \vec{n}}{ck}$$

$$\Rightarrow \partial_t s = \frac{1}{k} \quad \vec{\partial}_s = -\frac{\vec{n}}{ck}$$

Weiterhin: $\delta \vec{v} = \vec{a} \delta s$ $\vec{a}(x,t) := \ddot{\vec{y}}(s)$ Beschl.

Für r : $r = \|x - y(t)\| = c(t - \tau) \Rightarrow \delta r = c \delta t - c \delta s$

Statt k betrachte $kr = r - (\vec{x} - \vec{y}(s)) \cdot \vec{v} / c$

$$\delta(rh) = \delta r + \frac{\vec{v}^2 - r \vec{n} \cdot \vec{a}}{c} \delta s = c \delta t - c \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right) \delta s - \frac{r \vec{n} \cdot \vec{a}}{c} \delta s$$

Herleitung Strahlung beschleunigtes geladenes Teilchen:

\vec{x}, t : Empfänger; $\vec{y}(s), s(\vec{x}, t)$: Teilchen, avancierte Zeit; r : Abstand, k : Faktor
 $\vec{v}(s)$: Geschwindigkeit, $\vec{a}(s)$: Beschleunigung, \vec{n} : Richtung

Ruhendes Teilchen $\vec{v} = 0, \vec{a} \neq 0$

$$k=1, \quad \delta s = dt - \frac{\delta \vec{x} \cdot \vec{n}}{c}, \quad \delta \vec{v} = \vec{a} \delta s, \quad \delta(rk) = \delta \vec{x} \cdot \vec{n} - r \frac{\vec{n} \cdot \vec{a}}{c} \delta s$$

$$\vec{A} \sim \vec{v} = 0 \quad \delta \vec{A} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r} \delta \vec{v} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r} \vec{a} \delta s$$

$$\vec{B} = \vec{\partial} \times \vec{A} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r} \vec{\partial} s \times \vec{a} = - \frac{\mu_0 q}{4\pi c r} \vec{n} \times \vec{a}$$

$$\vec{E} = - \partial_t \vec{A} - \vec{\partial} \Phi = - \frac{\mu_0 q \vec{a}}{4\pi r} \partial_t s + \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{\partial} (rk)$$

$$= - \frac{\mu_0 q \vec{a}}{4\pi r} + \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \left(\vec{n} + \frac{r}{c} \vec{n} \cdot \vec{a} \frac{\vec{n}}{c} \right)$$

$$= \frac{q \vec{n}}{4\pi \epsilon_0 r^2} - \frac{\mu_0 q}{4\pi r} (\vec{a} - \vec{n} (\vec{n} \cdot \vec{a})) \leftarrow \sim \vec{n} \times \vec{B}$$

Ausdrücke für $\vec{v} \neq 0$:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 k^2} \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right) \left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}\right) + \frac{q\mu_0}{4\pi r k^3} \vec{n} \times \left(\left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}\right) \times \vec{a}\right)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{n} \times \vec{E}$$

Strahlung Energiestrahlung durch Beschleunigung, $\vec{v} = 0$

Poynting-Vekt

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0 c} \vec{E} \times (\vec{n} \times \vec{E}) = \frac{1}{\mu_0 c} (\vec{n} E^2 - \vec{E} (\vec{n} \cdot \vec{E}))$$

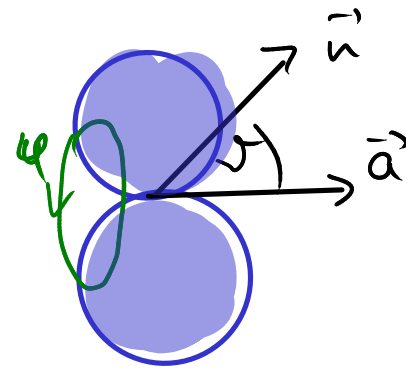
$$= \frac{q^2 \mu_0}{16\pi^2 c r^2} \left(\vec{n} (a^2 - (\vec{n} \cdot \vec{a})^2) + \frac{c^2}{r} (\vec{a} - \vec{n} (\vec{n} \cdot \vec{a})) \right)$$

↑
Strahlung durch Beschl. $\sim \frac{1}{r^2}$ $\sim \frac{1}{r^3}$ Umorganisation der Energiedichte

$$\text{rad. Strahlung: } \vec{n} \cdot \vec{S} = \frac{q^2 \mu_0}{16\pi^2 c r^2} (a^2 - (\vec{a} \cdot \vec{n})^2) = \frac{q^2 \mu_0 a^2}{16\pi^2 c r^2} \sin^2 \vartheta = \frac{1}{r^2} \frac{d^2 P}{d^2 \Omega}$$

Gesamtleistung P durch Strahlung

$$P = r^2 \int d^2\Omega \vec{n} \cdot \vec{S} = 2\pi \frac{\mu_0 q^2 \dot{a}^2}{16\pi^2 c} \int_0^\pi \sin^3 \vartheta = \frac{\mu_0 q^2 \dot{a}^2}{6\pi c}$$

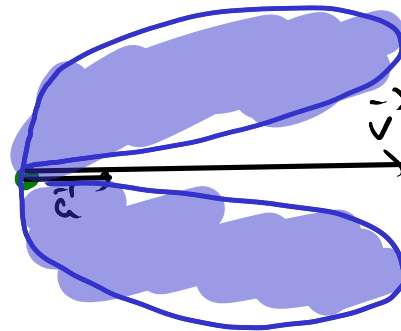
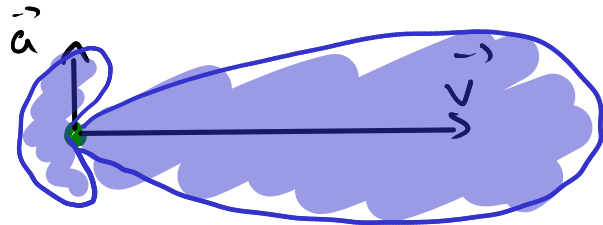


Für allg. Geschwindigkeit \vec{v}

$$\frac{d^2 P}{d^2 \Omega} = r^2 \vec{n} \cdot \vec{S} = \frac{q^2 \mu_0}{16\pi^2 c k^5} \left(\vec{n} \times \left(\left| \vec{n} - \frac{\vec{v}}{c} \right| \times \vec{a} \right) \right)^2$$

bei rel. Geschw. ist grosse Strahlungsleistung möglich ($\frac{1}{k^5}$)

→ Synchrotronstrahlung



Relativistische Formulierung Anfang ruhendes Teilchen $\vec{v} = 0$

Feld bei x^M mit $x^2 = 0$ $y^M = (0, \vec{0})$ $s = 0$ $\vec{y} = 0$

$$v^M = (c, \vec{0}), \quad a^N = (0, \vec{a}), \quad v^2 = -c^2, \quad v \cdot a = 0$$

Abstand $r = -\frac{v \cdot x}{c}$

Feldstärke tensor $F_{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} (v_\nu E_\mu - v_\mu E_\nu) - \frac{1}{c} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} v^\rho B^\sigma$

$$B_\sigma = -\frac{\mu_0 q}{4\pi c^2 r^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} v^\mu x^\nu a^\rho$$

$$E_\sigma = \frac{q x_\mu}{4\pi \epsilon_0 r^3} - \frac{\mu_0 q}{4\pi r^2} (a_\sigma r^2 - x_\sigma (x \cdot a))$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{\mu_0 c^3 q}{4\pi (v \cdot x)^3} (v_\mu x_\nu - v_\nu x_\mu) + \frac{\mu_0 c q (x \cdot a)}{4\pi (v \cdot x)^3} (v_\mu x_\nu - v_\nu x_\mu) - \frac{\mu_0 c q}{4\pi (v \cdot x)^2} (a_\mu x_\nu - a_\nu x_\mu)$$

Strahlungsbeitrag

$$T_{\mu\nu} = \frac{\mu_0 c^2 q^2}{16\pi^2 (v \cdot x)^6} \left(c^2 (a \cdot x)^2 - \dot{a}^2 (v \cdot x)^2 \right) x_\mu x_\nu$$

Kapitel 12

Elektrodynamik mit Materie

Dauer: 2:26:32

12 Elektrodynamik mit Materie

Effekte: Dispersion, Reflexion und Brechung, Streuung

12.1 Wellen im Medium

Übertragung der Statik mit Materie auf Dynamik

Maxwell-Gl.

$$\begin{aligned} \vec{\partial} \cdot \vec{D} &= \rho, & \vec{\partial} \times \vec{H} - \partial_t \vec{D} &= \vec{j}, \\ \vec{\partial} \cdot \vec{B} &= 0, & \vec{\partial} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} &= 0. \end{aligned}$$

Erhaltene Größe: $w = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} + \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$ $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

$$\vec{\pi} = \vec{D} \times \vec{B} \quad T_{ij} = D_i E_j + B_i H_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})$$

Materielbeziehungen zwischen $(D, H) \leftrightarrow (E, B)$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$$

↑ rel. konstanten
↑ rel. konstanten (numerisch)

Ebene monochromatische Wellen

Ergeben sich aus Vak-Wellen durch Ersetzen von $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$
 $\mu_0 \rightarrow \mu = \mu_r \mu_0$

Ausbreitungsgeschw. von Wellen in Medium

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{c}{n}$$

Brechungsindex des M.

$$n = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$$

Felder $\vec{E} = \text{Re} \left(\vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t} \right)$ $\vec{B} = \text{Re} \left(\vec{B}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t} \right)$

Relationen:

$$\|\vec{k}\| = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega n}{c}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = \vec{k} \cdot \vec{B}_0 = \vec{E}_0 \cdot \vec{B}_0 = 0$$

$$\vec{B}_0 = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}_0$$

gemittelte
Ströme/Dichte

$$w = \frac{\|\vec{E}_0\|^2}{2\mu v^2} = \frac{n^2}{2\mu_0 c^2} \|\vec{E}_0\|^2$$

$$\vec{s} = \frac{1}{\mu v} \frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|} \|\vec{E}_0\|^2 = \frac{c}{n} \frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|} w$$

Dispersion

$$D = \epsilon_0 E + P \quad \text{und} \quad E \quad (\text{analog für } H, M, P)$$

P ist Reaktion des Mediums auf E

$D = \epsilon_0 \epsilon_r E$ gilt nur für lange Zeiten bzw. klein Freq. ω

für höher Freq (lineare Näherung, klein Amplituden)

$$D(\omega) = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) E(\omega) \quad \epsilon_r \text{ Frequenzabh.}$$

Relationen:

$$\|k\| = \frac{\omega}{c} n(\omega) \quad \Leftrightarrow$$

Dispersionsrelation

$$\omega = \omega(\|k\|)$$

nicht-linear

Dispersion im Medium

zwei Kenngrößen: Phasengeschw. $\frac{\omega(\|k\|)}{\|k\|}$

$$\text{Gruppengeschw.} \quad \frac{d\omega(\|k\|)}{d\|k\|} < c$$

12.2 Reflexion und Brechung

Wie verhalten sich dynamische Felder/Wellen an Grenzflächen
Stetigkeitsbed. sind bekannt aus Statik.

Es gilt weiterhin: $\vec{E}_{\parallel}, \vec{H}_{\parallel}, D_{\perp}, B_{\perp}$ stetig!

bestimmen die Felder hinter Grenzfläche eindeutig (zusammen mit $D = \epsilon E, B = \mu H$)

Normalenvektor \vec{n} $\vec{n} \times \Delta \vec{E} = \vec{n} \times \Delta \vec{H} = 0$ $\vec{n} \cdot \Delta \vec{D} = \vec{n} \cdot \Delta \vec{B} = 0$

Einlaufende und auslaufende Welle

Welle trifft auf Grenzfläche,

Linearität, Translationsinvarianz (entlang Fläche, Zeit)

können monochromatische Ebene Wellen betrachten.

können ω und \vec{k}_{\parallel} eindeutig festlegen, k_{\perp} aber nicht aber $k_{\perp}(\omega, k_{\parallel})$

$$\vec{k}_{1||} = \vec{k}_{2||} = \vec{k}_{3||}$$

$$k_{1\perp} \neq k_{2\perp} \neq k_{3\perp}$$

Alle (komplexe) Felder
schwingen mit gemeinsamer Fokt ω

$$\exp(i\vec{k}_{1||} \cdot \vec{x}_{1||} - i\omega t)$$

$$\vec{k}_1 = k_1 \begin{pmatrix} \sin \alpha_1 \\ 0 \\ -\cos \alpha_1 \end{pmatrix}$$

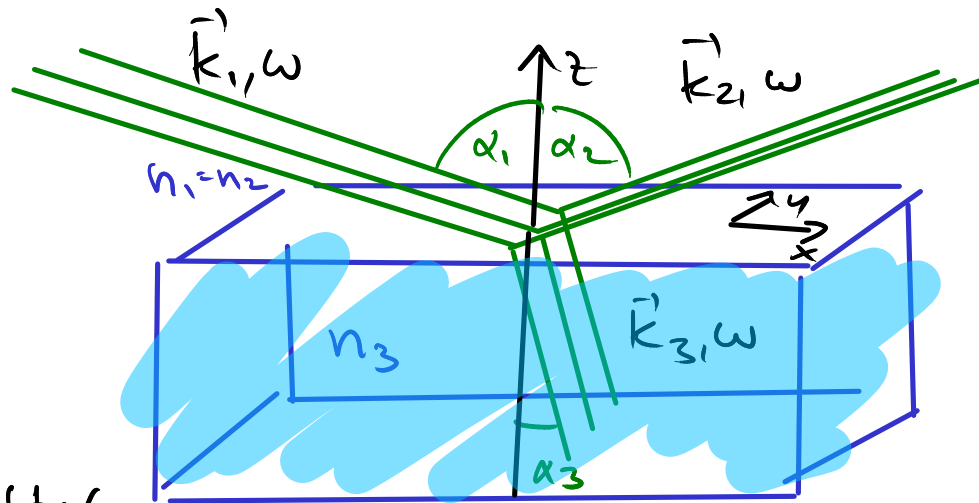
$$\vec{k}_2 = k_2 \begin{pmatrix} \sin \alpha_2 \\ 0 \\ \cos \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{k}_3 = k_3 \begin{pmatrix} \sin \alpha_3 \\ 0 \\ -\cos \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{k}_{1||} = \vec{k}_{2||} = \vec{k}_{3||} : k_1 \sin \alpha_1 = k_2 \sin \alpha_2 = k_3 \sin \alpha_3$$

Dispersionsvel $\omega_1(k_1) = \omega_2(k_2) = \omega_3(k_3)$

$$k_1 = \frac{\omega n_1}{c}, \quad k_2 = \frac{\omega n_2}{c}, \quad k_3 = \frac{\omega n_3}{c}$$



Zusammen: $k_1 = k_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$, $\frac{k_3}{k_1} = \frac{n_3}{n_1}$, $\frac{\sin \alpha_3}{\sin \alpha_1} = \frac{n_1}{n_3}$

Snellius Gesetz $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_3} = \frac{n_3}{n_1} =: n$

Elektromagnetische Felder

$$\vec{E}_{z>0} = \text{Re} \left(\vec{E}_1 e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} + \vec{E}_2 e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}} \right) e^{-i\omega t}$$

$$\vec{E}_{z<0} = \text{Re} \left(\vec{E}_3 e^{i\vec{k}_3 \cdot \vec{x}} e^{-i\omega t} \right)$$

\vec{E}_1 vorgegeben $\Rightarrow E_2, E_3, B_1, B_2, B_3$

Annahme: $\mu_r = 1$ überall rel. Brechungsindex $n := n_3/n_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_{r,3}}{\epsilon_{r,1}}}$

$$\vec{B}_j = \frac{1}{\omega} \vec{k}_j \times \vec{E}_j$$

$$\|\vec{B}_j\| = \frac{k_j}{\omega} \|\vec{E}_j\| = \frac{n_j}{c} \|\vec{E}_j\|$$

Stetigkeit an der Grenzfläche $z=0$

$$\vec{e}_z \times (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 - \vec{E}_3) = 0$$

$$\vec{e}_z \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 - n^2 \vec{E}_3) = 0$$

$$\vec{k} \cdot \vec{x} = \vec{k}_{||} \cdot \vec{x}_{||}$$

$$\vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \vec{B}_3$$

Zerlegung nach Polarisationen von \vec{E}_1

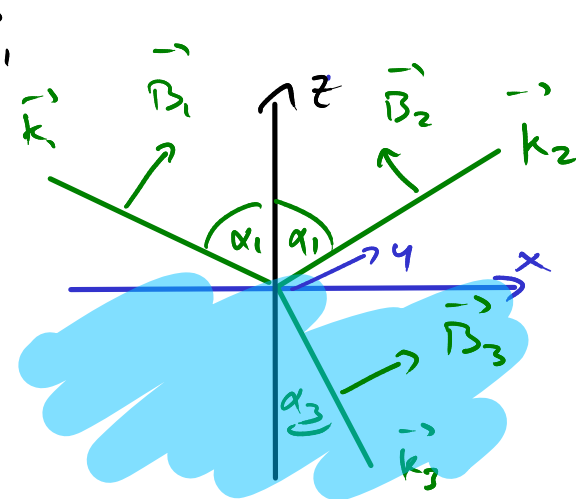
Transversal Elektrische Mode

$$\vec{E}_n = \vec{e}_y E_n$$

$$\Rightarrow E_1 + E_2 = E_3$$

$$||B_n|| = \frac{n_n}{c} |E_n|$$

$$\frac{n_1}{c} E_1 \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 \\ 0 \\ \sin \alpha_1 \end{pmatrix} + \frac{n_1}{c} E_2 \begin{pmatrix} -\cos \alpha_1 \\ 0 \\ \sin \alpha_1 \end{pmatrix} = \frac{n_3}{c} E_3 \begin{pmatrix} \cos \alpha_3 \\ 0 \\ \sin \alpha_3 \end{pmatrix}$$



$$E_2 = \frac{\cos \alpha_1 - n \cos \alpha_3}{\cos \alpha_1 + n \cos \alpha_3} E_1 \quad E_3 = \frac{2 \cos \alpha_1}{\cos \alpha_1 + n \cos \alpha_3} E_1$$

Energiebilanz, Reflexions / Transmissions koef.

$$R = - \frac{\vec{S}_2 \cdot \vec{e}_z}{\vec{S}_1 \cdot \vec{e}_z} = \frac{W_2}{W_1} = \frac{\|E_2\|^2}{\|E_1\|^2} = \left(\frac{\cos \alpha_1 - n \cos \alpha_3}{\cos \alpha_1 + n \cos \alpha_3} \right)^2$$

$$T = \frac{\vec{S}_3 \cdot \vec{e}_z}{\vec{S}_1 \cdot \vec{e}_z} = \frac{\cos \alpha_3}{n \cos \alpha_1} \frac{W_3}{W_1} = \frac{n \cos \alpha_3}{\cos \alpha_1} \frac{\|E_3\|^2}{\|E_1\|^2}$$

$$= \frac{4n \cos \alpha_1 \cos \alpha_3}{(\cos \alpha_1 + n \cos \alpha_3)^2}$$

es gilt $0 \leq R, T \leq 1$, $R + T = 1$

Transversal magnet'sche Mode

$$\vec{B}_n = \vec{e}_n B_n$$

$$B_1 + B_2 = B_3$$

$$\|E_n\| = \frac{c}{n_n} |B_n|$$

$$\frac{c}{n_1} B_1 \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 \\ 0 \\ \sin \alpha_1 \end{pmatrix} + \frac{c}{n_2} B_2 \begin{pmatrix} -\cos \alpha_2 \\ 0 \\ \sin \alpha_2 \end{pmatrix} = \frac{c}{n_3} B_3 \begin{pmatrix} \cos \alpha_3 \\ 0 \\ \sin \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \frac{n \cos \alpha_1 - \cos \alpha_3}{n \cos \alpha_1 + \cos \alpha_3} B_1 \quad ; \quad B_3 = \frac{2n \cos \alpha_1}{n \cos \alpha_1 + \cos \alpha_3} B_1$$

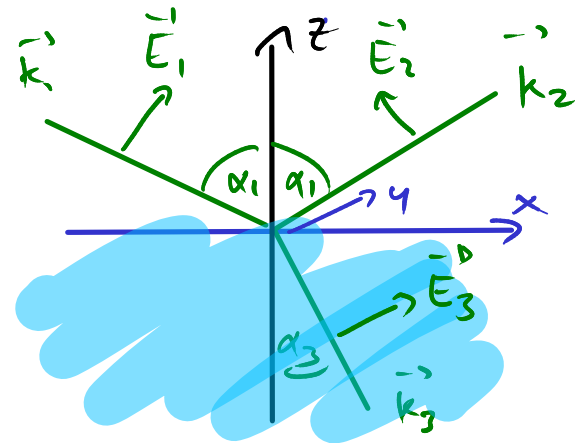
R/T/coeff.

$$0 \leq R, T \leq 1$$

$$R + T = 1$$

$$R = \frac{\|B_2\|^2}{\|B_1\|^2} = \left(\frac{n \cos \alpha_1 - \cos \alpha_3}{n \cos \alpha_1 + \cos \alpha_3} \right)^2$$

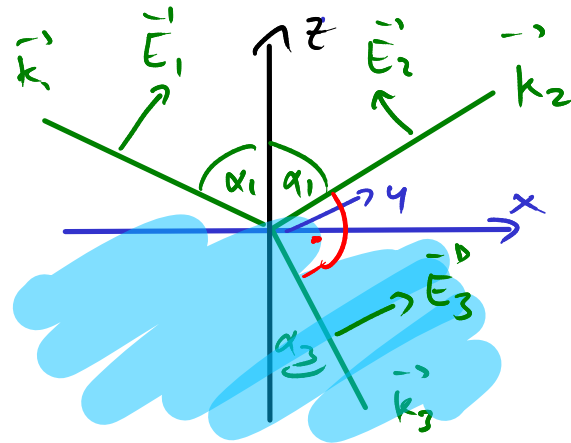
$$T = \frac{\cos \alpha_3 \|B_3\|^2}{n \cos \alpha_1 \|B_1\|^2} = \frac{4n \cos \alpha_1 \cos \alpha_3}{(n \cos \alpha_1 + \cos \alpha_3)^2}$$



Brewster-Winkel

$$R_{TE} = \left(\frac{\cos \alpha_1 - n \cos \alpha_3}{\cos \alpha_1 + n \cos \alpha_3} \right)^2$$

$$R_{TM} = \left(\frac{n \cos \alpha_1 - \cos \alpha_3}{n \cos \alpha_1 + \cos \alpha_3} \right)^2$$



Brewster-Winkel α_B mit $\tan \alpha_B = n$

Falls $\alpha_1 = \alpha_B \Leftrightarrow \alpha_3 = 90^\circ - \alpha_1 = 90^\circ - \alpha_B$ $n > 1$

$$\Leftrightarrow \underbrace{R_{TM} = 0}_{\text{reflektierte Welle ist linear polarisiert (egal was eingestrahlt wird)}} , \quad R_{TE} \neq 0$$

möglichkeit lin. pol. Licht zu erzeugen!

Warum? Anregung in Medium $\vec{p} \sim \vec{E}_3 \sim \vec{k}_2 \Rightarrow$ keine Intensität

Totalreflexion

Übergang in optisch dünneres Medium ($n < 1$)

⇒ keine Transmission falls $\sin \alpha_1 > n$ (Snellius Gesetz
kein Lösung für Trig Eq. 1)

$$\sin \alpha_3 = \frac{\sin \alpha_1}{n} > 1.$$

Lösung verläuft α_3 komplex! ⇒ $\cos \alpha_3 \in i\mathbb{R}$

komplexer Wellenzahlvektor \vec{k}_3

$$\vec{k}_3 = k_3 \begin{pmatrix} \sin \alpha_3 \\ 0 \\ -\cos \alpha_3 \end{pmatrix} = nk_1 \begin{pmatrix} \sin \alpha_3 \\ 0 \\ -i\sqrt{\sin^2 \alpha_1 - 1} \end{pmatrix}$$

Eindringtiefe $e^{i\vec{k}_3 \cdot \vec{x}} \sim e^{ik_3 z}$

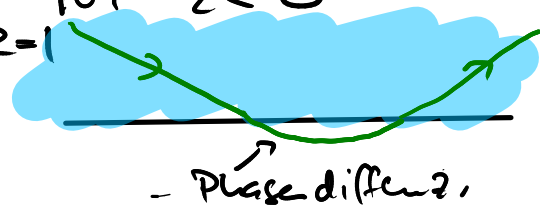
$$1/|k_{3z}| = 1/k_1 \sim e^{k_1 z}$$

$$E_2^{TE} = \frac{\cos \alpha_1 - n \cos \alpha_3}{\cos \alpha_1 + n \cos \alpha_3} E_1$$

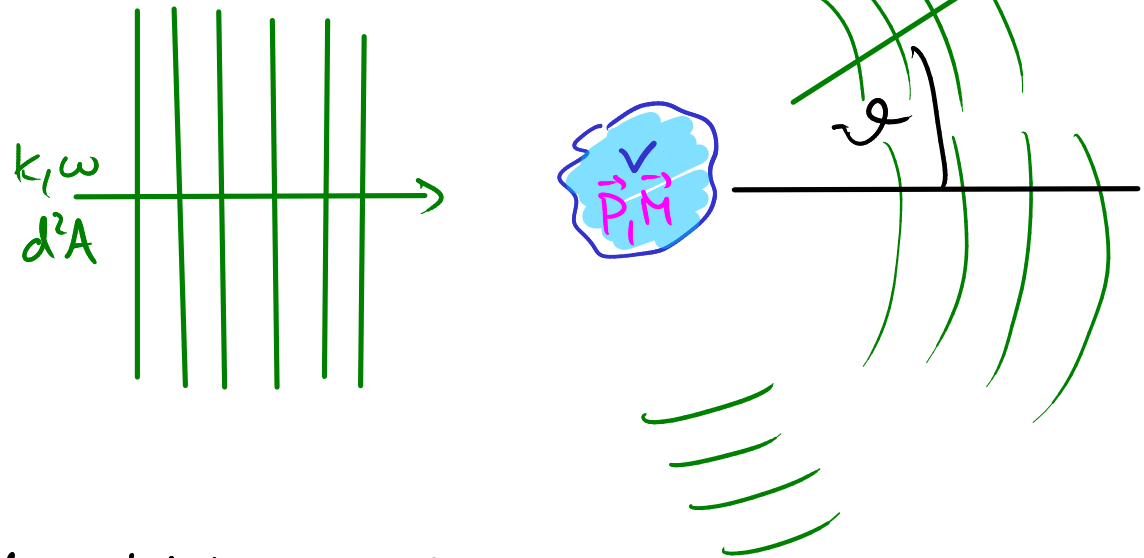
$ik_3 z$ ist reell ⇒ exponentieller Abfall für $z < 0$

komplexe Phase ⇒ $R=1$

$$E_1^{TM} = \frac{n \cos \alpha_1 - \cos \alpha_3}{n \cos \alpha_1 + \cos \alpha_3} E_1$$



12.3 Streuung an Materie



Streuquerschnitt

Einlaufende Welle, Wellenzahl k , Kreisfreq. ω

Asymptotik ausstrahlende Welle $E, B \sim 1/r$

Poynting Vektor beschreibt jeweils Energiefluss je Zeit + Fläche

$$\frac{d^2 P_{\text{ein}}}{d^2 A} = \vec{S}_{\text{ein}} \cdot \vec{e}_z$$

$$\frac{d^2 P_{\text{aus}}}{d^2 \Omega} = r^2 \vec{S}_{\text{aus}} \cdot \vec{e}_r$$

$$\text{diff s.o.} \quad \frac{d^2 \sigma}{d^2 \Omega} = \frac{d^2 P_{\text{aus}} / d^2 \Omega}{d^2 P_{\text{ein}} / d^2 A} = \frac{r^2 \vec{S}_{\text{aus}} \cdot \vec{e}_r}{\vec{S}_{\text{ein}} \cdot \vec{e}_z} \quad (\text{totaler s.o.}) \quad \sigma = \int d\Omega \frac{d^2 \sigma}{d^2 \Omega}$$

Dipolstrahlung

einlaufende Welle erzeugt Dipoldichte im Objekt.

⇒ Fernzone strahlung mit dem so angeregten Dipolmoment.

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 k}{4\pi r} \operatorname{Re} \left((-i\vec{P} - i\vec{M} \times \vec{n}) e^{i(kr - \omega t)} \right)$$

Strahlungsleistung

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P}{d^2 \Omega} &= \frac{c k^4 \mu_0}{32 \pi^2} \left(c^2 \|\vec{P}\|^2 - c^2 |\vec{P} \cdot \vec{n}|^2 + \|\vec{M}\|^2 - |\vec{M} \cdot \vec{n}|^2 \right) \\ &= \frac{c k^4 \mu_0}{32 \pi^2} \left(c^2 \|\vec{P}\|^2 \sin^2 \vartheta(P, \vec{n}) + \|\vec{M}\|^2 \sin^2 \vartheta(M, \vec{n}) \right) \end{aligned}$$

nach Polarisation aufgelöst Pol \vec{e} , $\vec{e} \cdot \vec{n} = 0$ der emitt. Strahl.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P_e}{d^2 \Omega} &= \frac{c k^4 \mu_0}{32 \pi^2} \left(c^2 |\vec{P} \cdot \vec{e}|^2 + \left| (\vec{M} \times \vec{n}) \cdot \vec{e} \right|^2 \right) \\ \frac{d^2 P_{e1}}{d^2 \Omega} + \frac{d^2 P_{e2}}{d^2 \Omega} &= \frac{d^2 P}{d^2 \Omega} \end{aligned}$$

Dielektrische Kugel

$$\epsilon_r \neq 1 \quad \mu_r = 1$$

R: Radius

$$\vec{P} = 4\pi\epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} R^2 \vec{E}_{\text{ein}} \quad \vec{M} = 0$$

$$\frac{d^2 P_{\text{ein}}}{d^2 A} = \frac{11 \epsilon_0 \|\vec{E}_0\|^2}{2 \epsilon_0 c} \quad \text{Polarisation } \vec{E}_{\text{ein}}$$

$$\frac{d^2 \sigma_{\text{el}}}{d^2 \Omega} = \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right)^2 \underset{\uparrow}{(kR)^4} R^6 \left| \vec{E}_{\text{ein}} \cdot \vec{E}_{\text{aus}} \right|^2$$

unpol. S.G.

Effekte: wenn $\vec{n} \sim \vec{E}_{\text{ein}} \Rightarrow$ keine Strahlung
zu Pol. Streuquerschnitte.

Auflösung nach einl. Welle: mittelung der S.G.
aus Welle: summierung über S.G.

$$\frac{d^2 \sigma}{d^2 \Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right)^2 k^4 R^6 (1 + \cos^2 \vartheta)$$
$$\Downarrow$$
$$\sigma = \frac{8}{3} \pi \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right)^2 k^4 R^6$$

Inhomogenitäten \sim Rayleigh Streuung

Annahme: $\epsilon_r = \epsilon_r(x, \omega)$ ω fest

Entwicklung:
 $\epsilon_r(x) = \bar{\epsilon}_r + \delta\epsilon_r(x) + \dots$ $\delta\epsilon_r(x) \ll \bar{\epsilon}_r$ $\mu_r = 1$

Entsprechend für Felder Einkommende Welle

$$E = \bar{E} + \delta E + \dots \quad D = \bar{D} + \delta D + \dots \quad B = \bar{B} + \delta B + \dots$$

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{\epsilon}_r \bar{E} \quad \delta D = \epsilon_0 \bar{\epsilon}_r \delta E + \epsilon_0 \delta\epsilon_r \bar{E}$$

Maxwell-G (keine Quellen) nächstführende Ord.

$$\vec{\partial} \cdot \delta B = 0 \quad \vec{\partial} \times \delta \vec{E} + \partial_t \delta \vec{B} = 0$$

$$\vec{\partial} \cdot \delta E = -\vec{\partial} \cdot (\delta\epsilon_r \vec{E}) \quad \vec{\partial} \times \delta \vec{B} - \epsilon_0 \bar{\epsilon}_r \partial_t \delta \vec{E} = \gamma_0 \epsilon_0 \delta\epsilon_r \vec{E}$$

Maxwell-G1 für $\delta \vec{E}, \delta \vec{B}$ mit $\delta p = -\epsilon_0 \vec{\partial} \cdot (\delta\epsilon_r \vec{E}), \delta \vec{j} = \epsilon_0 \delta\epsilon_r \partial_t \vec{E}$.
 $\delta p, \delta \vec{j}^D$ erfüllen Stromerhaltung

Strahlung wird von $\delta\rho, \delta\vec{j}$ Feruzone

$$\delta\vec{A}(\vec{x}) = \text{Re} \left(\frac{-ikc}{c} \frac{e^{ikr - i\omega t}}{4\pi r} \vec{E} \delta\hat{\epsilon}_r(k\vec{e}_z - \vec{k}) \right)$$

$$\delta\hat{\epsilon}_r(\vec{k}) = \int d^3y \delta\epsilon_r(y) e^{i\vec{y} \cdot \vec{k}}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\sigma}{d^2\Omega} = \frac{k^4}{(6\pi)^2} |\vec{e}_{\text{ein}} \cdot \vec{e}_{\text{aus}}|^2 F(\vec{k})$$

Strukturfaktor: $F(\vec{k}) = \left| \delta\hat{\epsilon}_r \left(\underset{\substack{\uparrow \\ \vec{k}_{\text{ein}}}}{\|\vec{k}\| \vec{e}_z} - \underset{\substack{\uparrow \\ \vec{k}_{\text{aus}}}}{\vec{k}} \right) \right|^2$

Kapitel 13

Wellenleiter

Dauer: 2:22:42

13 Wellenleiter

13.1 Wellen in Leitern

Leiter: \vec{E} erzeugt Strom \vec{j} über $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ σ spez Widerstand,

Ladungsdichte ρ in einem Leiter kühlt exponentiell ab:

$$\partial_t \rho = -\vec{\partial} \cdot \vec{j} = -\sigma \vec{\partial} \cdot \vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho \quad \rightarrow \quad \text{nach char. Zeit } \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

nach einiger Zeit gilt $\rho \approx 0$.

Für Dynamik: Maxwell-Gl. durch Kombination d. Gl. für \vec{E}

$$\mu_0 \sigma \partial_t \vec{E} = \mu_0 \partial_t \vec{j} = \vec{\partial} \times \partial_t \vec{B} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E}$$

$$= -\vec{\partial} \times (\vec{\partial} \times \vec{E}) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E}$$

$$= \Delta \vec{E} - \vec{\partial} (\vec{\partial} \cdot \vec{E}) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E}$$

$$= \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E}$$

$$\vec{\partial} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

Telegrapher Gl.

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E} - \mu_0 \sigma \partial_t \vec{E} = 0$$

Lösung mittels mon. eb. Wellen

$$\Delta \psi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \psi - \mu_0 \sigma \partial_t \psi \quad \psi = e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t}$$

$$\rightarrow -k^{\rightarrow 2} + \frac{\omega^2}{c^2} + i\omega \mu_0 \sigma = 0 \quad \text{algebraisch}$$

komplexe Gleichung \sim Dissipation / el. Widerstand
komplexe Lsg.

2 Fälle k reell, ω komplex
 k komplex, ω reell

Zeitlich abklingende Welle k reell ω komplex

$$\omega = -\frac{i}{2} \mu_0 \sigma c^2 \pm \sqrt{\vec{k}^2 c^2 - \frac{1}{4} \mu_0^2 \sigma^2 c^4} = \omega_r + i\omega_i$$

mit $\omega_i < 0 \Rightarrow \psi = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t} = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{-i\omega_r t} e^{\omega_i t}$ mit

Räumlich abklingende Welle ω reell k komplex

\Rightarrow zeitlich konstante Amplitude

Räumlich Welle mit exponentieller Abhängigkeit

z.B. entlang z-Achse: $\vec{k} = (k_r + ik_i) \vec{e}_z$

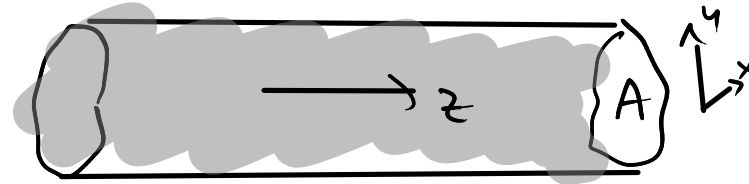
$$-k_r^2 - 2ik_r k_i + k_i^2 + \frac{\omega^2}{c^2} + \mu_0 \sigma i\omega = 0 \Rightarrow k_i = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2k_r}$$

$$-k_r^2 + \frac{\mu_0^2 \sigma^2 \omega^2}{4k_r^2} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad k_r^2 = \frac{\omega^2}{2c^2} + \sqrt{\frac{\omega^4}{4c^4} + \frac{1}{4} \mu_0^2 \sigma^2 \omega^2}$$

$1/k_r$ ist Eindringtiefe in Leiter

13.2 Wellenleiter

Hohlleiter beruht auf id. Leiter



Reduktion auf 2 Dim

Translationsinvarianz in $z, t \sim e^{ikz - i\omega t}$ ω : kreisfreq.
 k : Wellenzahl

$$F(x, y, z, t) = \text{Re} \left[F(x, y) e^{ikz} e^{-i\omega t} \right] \quad \partial_t F = -i\omega F$$

Vektorielle Größe \vec{F}_3 zerfällt in \vec{F}, f $\vec{F} \cdot \vec{e}_z = 0$ $f = \vec{F}_3 \cdot \vec{e}_z$

$$\vec{F}_3 = \vec{F} + \vec{e}_z f \quad \vec{x}_3 = \vec{x} + \vec{e}_z z$$

$$\vec{F}_3 \cdot \vec{G}_3 = \vec{F} \cdot \vec{G} + fg \quad \partial_3 \cdot \vec{F}_3 = \partial \cdot \vec{F} + ikf$$

Dualer Vektor

$$\vec{F}^x = \vec{F} \times \vec{e}_z = \begin{pmatrix} F_y \\ -F_x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Rotation um } 90^\circ)$$

Rechenregeln für duale Vektoren

$$\vec{F}^{\rightarrow x} \cdot \vec{e}_2 = \vec{F}^{\rightarrow x} \cdot \vec{F} = 0$$

$$\vec{F}^{\rightarrow xx} = -\vec{F}^{\rightarrow}$$

$$\vec{F}^{\rightarrow} \cdot \vec{G}^{\rightarrow x} = -\vec{F}^{\rightarrow x} \cdot \vec{G}^{\rightarrow} = F_x G_y - F_y G_x$$

$$\vec{\partial}_3 \times \vec{F}_3^{\rightarrow} = -ik \vec{F}^{\rightarrow x} + \vec{\partial}^{\rightarrow x} F + \vec{e}_z \vec{\partial} \cdot \vec{F}^{\rightarrow x}$$

$$\vec{F}_3^{\rightarrow} \times \vec{G}_3^{\rightarrow} = f \vec{G}^{\rightarrow x} + g \vec{F}^{\rightarrow x} + \vec{e}_z \vec{F} \cdot \vec{G}^{\rightarrow x}$$

Maxwell-Gl von 3D \rightarrow 2D.

Wellengleichung $\square_{3+1} \psi = 0$ $\psi = \vec{E}, \vec{B}, e, b$

$$0 = \square_{3+1} \psi = \Delta_3 \psi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \psi = \Delta_2 \psi - k^2 \psi + \frac{\omega^2}{c^2} \psi$$

$$\Delta \psi = -\lambda \psi \quad \lambda := \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$$

keine Quellen, indu. M.G.

$$0 = \vec{\partial}_3 \cdot \vec{E}_3 = \vec{\partial} \cdot \vec{E} + i k e$$

Skalar:

$$0 = \vec{\partial}_3 \cdot \vec{B}_3 = \vec{\partial} \cdot \vec{B} + i k b$$

vektoriell: $0 = -i k \vec{E}^x + \vec{\partial}^x e - i \omega \vec{B}$ $0 = \vec{\partial} \cdot \vec{E}^x - i \omega b$

$$0 = -i k \vec{B}^x + \vec{\partial}^x b + \frac{i \omega}{c^2} \vec{E}$$
 $0 = \vec{\partial} \cdot \vec{B}^x + \frac{i \omega}{c^2} e$

insgesamt $\Delta \varphi = -\lambda \varphi$ λ fest Annahme $k \neq 0$ $\omega \neq 0$

Lösung: $e = \frac{i}{k} \vec{\partial} \cdot \vec{E}$ $b = -\frac{i}{\omega} \vec{\partial} \cdot \vec{E}^x$

$$\vec{B} = -\frac{k}{\omega} \vec{E}^x + \frac{1}{k \omega} \vec{\partial}^x (\vec{\partial} \cdot \vec{E})$$

Laplace Problem in 2D

Randbedingungen auf ∂A : Feld dringt (fast) nicht ein.

$$\vec{E}_3 \parallel \vec{n} \quad \vec{B} \perp \vec{n} \quad \vec{n} \cdot \vec{e}_2 = 0$$

$$0 = \vec{n} \times \vec{E}_3 = \vec{n} \times \vec{e} + \vec{e}_2 (\vec{n} \cdot \vec{E}^x)$$

$$0 = \vec{n} \cdot \vec{B}_3 = \vec{n} \cdot \vec{B}$$

Auf ∂A : $\rho = 0 \quad \vec{n} \cdot \vec{E}^x = 0 \quad \vec{n} \cdot \vec{B} = 0$

$$\rho = \frac{1}{\kappa} \vec{\partial} \cdot \vec{E} \rightarrow \vec{\partial} \cdot \vec{E} = 0 \quad \vec{n} \cdot \vec{B} = 0 \leftarrow \vec{n} \cdot \vec{E}^x = 0$$

$$\Delta \vec{E} = -\lambda \vec{E} \quad \vec{n} \cdot \vec{E}^x \Big|_{\partial A} = 0 \quad \vec{\partial} \cdot \vec{E} \Big|_{\partial A} = 0$$

Dirichlet RB für $\vec{n} \cdot \vec{E}^x$
Neumann - RB für $\vec{n} \cdot \vec{E}$ } legt Lösung „eindeutig“ fest

Eigenwertproblem

$\Delta \vec{E} = -\lambda \vec{E}$ mit D/N RB für festes λ ; Lsg ist eindeutig.

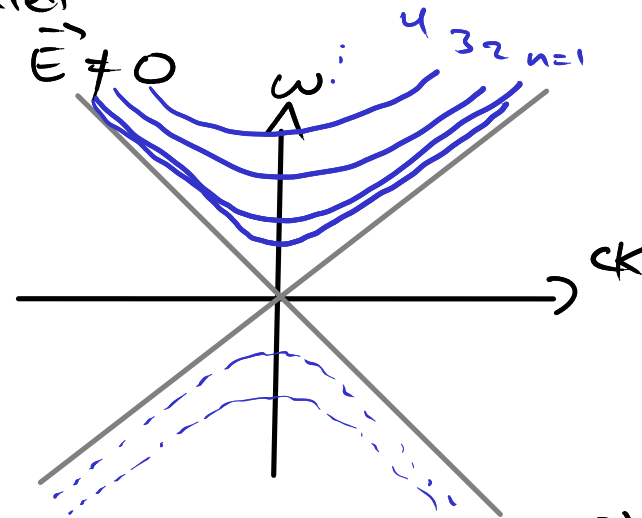
Lösung ist $\vec{E} = 0$ in der Regel

Ausnahmen für gewisse $\lambda \equiv \lambda_n$ ^{diskret} mit $\vec{E} \neq 0$

Beziehung zwischen ω und k

$$\omega = c \sqrt{\lambda_n + k^2}$$

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \lambda_n}$$



Spektrum der erlaubten Werte (Eigenwerte) λ_n von $\Delta \vec{E} = -\lambda \vec{E}$ hängt nur von Geometrie von Gebiet A ab.

$$e = \frac{i}{k} \vec{\partial} \cdot \vec{E} \quad b = -\frac{i}{\omega} \vec{\partial} \cdot \vec{E}^x \quad \vec{B} = -\frac{k}{\omega} \vec{E}^x + \frac{1}{k\omega} \vec{\partial}^x (\vec{\partial} \cdot \vec{E})$$

$$\Delta \vec{E} = -\lambda \vec{E} \quad \lambda = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \quad \lambda \in \{\lambda_n\} \quad e = 0|_{\partial A} \quad \vec{n} \cdot \vec{E}^x = 0|_{\partial A}$$

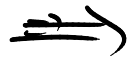
Ziel: $\lambda \geq 0$ Annahme: Lsg \vec{E} zu $\Delta \vec{E} = -\lambda \vec{E}$ und R.B.

Greensche Identität (2D Vektorfeld in \mathcal{C})

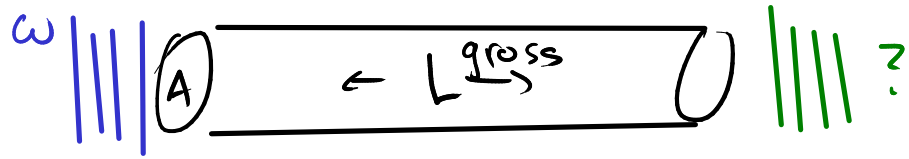
$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \oint_{\partial A} dx \vec{n} \cdot \left(\vec{E} \overbrace{(\vec{\partial} \cdot \vec{E}^x)}^{=0} + \overbrace{\vec{E}^x (\vec{\partial} \cdot \vec{E}^{xx})}^{=0} \right) \\ &= \int_A dx^2 \left(|\vec{\partial} \cdot \vec{E}|^2 + |\vec{\partial} \cdot \vec{E}^x|^2 + \operatorname{Re} (\vec{E} \cdot \overset{-\lambda}{\Delta \vec{E}}) \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_A dx^2 \left(|\vec{\partial} \cdot \vec{E}|^2 + |\vec{\partial} \cdot \vec{E}^x|^2 - \lambda \|\vec{E}\|^2 \right) = 0$$

Positivität der Quadrate



$$\lambda \geq 0$$



ω fest, k durch λ_n gegeben $k_n = \sqrt{\omega^2/c^2 - \lambda_n}$

$\frac{\omega}{c} > \sqrt{\lambda_n} \Rightarrow k_n \in \mathbb{R}$, räumlich oszillierende Welle, volle Amplitude an Ende

$\frac{\omega}{c} < \sqrt{\lambda_n} \Rightarrow k_n \in i\mathbb{R}$, räumlich exp. abklingende Welle
 Intensität gedämpft durch $\exp(-2|k_n| \cdot L)$

Für gegebenes ω werden nur endlich viele Moden mit $\lambda_n < \frac{\omega^2}{c^2}$ Wert übertragen

Fall $\lambda > 0$: TE- / TM-Moden

TE: transversal elektrisch $\Leftrightarrow e = 0$

TM: transversal magnetisch $\Leftrightarrow b = 0$

Einschränkungen möglich da alle MG noch e, b gelöst werden können

$$\vec{E} = \frac{ik}{\lambda} \vec{\partial} e + \frac{i\omega}{\lambda} \vec{\partial}^{\times} b \quad \leftarrow \lambda \neq 0$$

$$\vec{B} = -\frac{i\omega}{c^2 \lambda} \vec{\partial}^{\times} e + \frac{ik}{\lambda} \vec{\partial} b$$

Zu lösende Problem $\Delta e = -\lambda e$ $\Delta b = -\lambda b$

DRB $e = 0|_{\partial A}$ NRB $\vec{n} \cdot \vec{\partial} b = 0|_{\partial A}$

2 Probleme für e, b entkoppeln.

Fall $\lambda = 0$: TEM-Moden

Grenzwerte 10.

$$\int_A dx^2 \left(|\vec{\partial} \cdot \vec{E}|^2 + |\vec{\partial} \cdot \vec{E}^x|^2 \right) = 0$$

Positivität $\Rightarrow e = b = 0$ $\vec{\partial} \cdot \vec{E} = 0$ $\vec{\partial} \cdot \vec{E}^x = 0$

transversal elektrisch, magnetische Mode (TEM) RB $\vec{n} \cdot \vec{E}^x = 0 \Big|_{\partial A}$

Lösungen existieren nicht für alle A insbesondere nicht für einfach zush. A

Beweis; nicht zush. A gilt $\vec{E} = -\vec{\partial} \Phi$

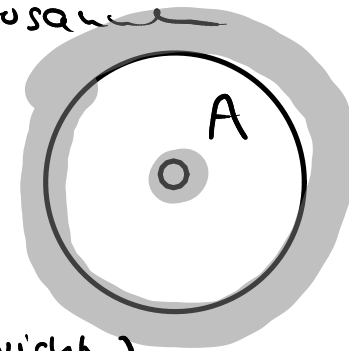
DGL: $\Delta \Phi = 0 \Rightarrow e = b = 0$ RB $\vec{n} \cdot \vec{E}^x \Rightarrow \Phi = \text{const} \Big|_{\partial A}$

für einfach zush. A einen zush. Rand ∂A

Laplace problem hat eindeutige Lsg $\Rightarrow \Phi = \text{const} \Big|_A$
 $\Rightarrow \vec{E} = 0$

Lösungen hängen mit der Topologie von A zusammen

Es gibt eine TEM-Mode für jedes Loch in A



Begründung ist analog:

können Ansatz $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ machen (RB $\vec{n} \cdot \vec{E} = 0$ wichtig)

Laplace Problem mit $\phi = \text{const}$ auf jeder Komponente des Randes ∂A

1 Freiheitsgrad je Randkomp. -1 Freiheitsgrad für niv. Lsg
 $\phi = \text{const} \mid_A$

Wichtig: TEM sind nicht-dispersiv

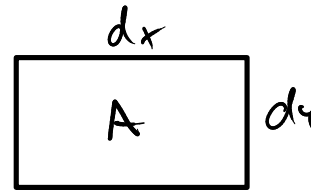
$$\omega = kc$$

(kein minimales ω)

- Alle Frequenzen ω können über lange Strecken übertragen werden
- Wird die Form des Signals nicht verformt

Rechteckige Hohlleiter

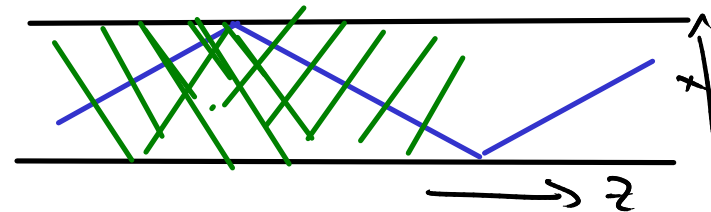
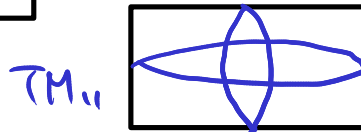
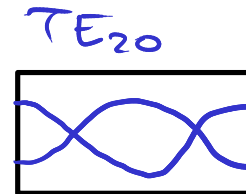
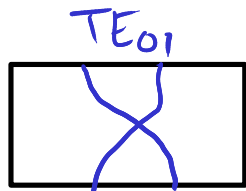
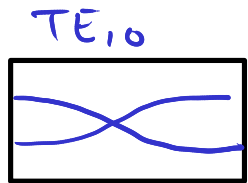
$$A = [0, d_x] \times [0, d_y]$$



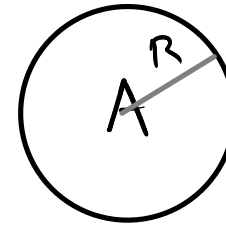
$n_{x,y} \in \mathbb{Z}_0^+$
 $TE_{n_x, n_y}: b_{n_x, n_y} \sim \cos \frac{\pi n_x x}{d_x} \cos \frac{\pi n_y y}{d_y}$
 $n_x > 0$ od. $n_y > 0$

$TM_{n_x, n_y}: e_{n_x, n_y} \sim \sin \frac{\pi n_x x}{d_x} \sin \frac{\pi n_y y}{d_y}$
 $n_x > 0$ und $n_y > 0$

Eigenwerte $\lambda_{n_x, n_y} = \pi^2 \left(\frac{n_x^2}{d_x^2} + \frac{n_y^2}{d_y^2} \right)$



kreisförmige Hohlleiter



Problem in radialkoordinaten r, φ lösen!

$$e, b \sim f(r) e^{im\varphi}$$

$$\text{DGL} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} f \right) - \frac{m^2}{r^2} f + \Delta f = 0$$

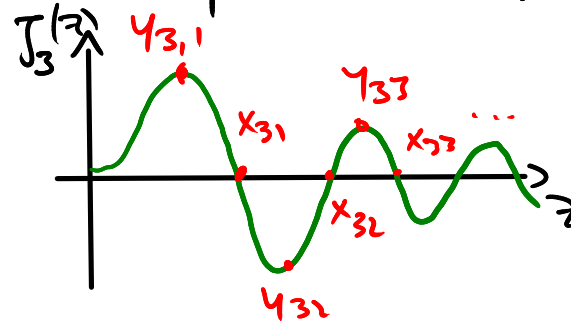
Bessel Funktionen $f \sim J_m(\sqrt{\lambda} r)$

Randbed bei $r=R \Rightarrow$ TM f : Nullstelle
TE f : Wendepunkt

Nullst. $x_{m,n}$: von $J_m(x)$ Wendepunkt $y_{m,n}$ von $J_m(x)$

$$\Rightarrow \lambda_{m,n}^{\text{TE}} = \frac{y_{m,n}^2}{R^2}$$

$$\lambda_{m,n}^{\text{TM}} = \frac{x_{m,n}^2}{R^2}$$



Energiefluss in WL

rel. Größen: Energie je Länge dW/dz , ^{übertragene} Leistung P

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dz} &= \frac{\epsilon_0}{4} \int_A dx^2 \left(\|\vec{E}\|^2 + |\epsilon|^2 + \|\vec{B}\|^2 + |b|^2 \right) \\ &= \dots = \frac{\epsilon_0}{2} \int_A dx^2 \left(\|\vec{E}\|^2 + \frac{1}{k^2} |\vec{\partial} \cdot \vec{E}|^2 \right)\end{aligned}$$

$$P = \frac{1}{2\mu_0} \int_A dx^2 \vec{e}_z \cdot \vec{S}_3 = \frac{1}{2\mu_0} \int_A dx^2 \operatorname{Re}(\vec{E} \cdot \vec{B}^{-1k*})$$

$$= \dots = \frac{k}{2\mu_0 \omega} \int_A dx^2 \left(\|\vec{E}\|^2 + \frac{1}{k^2} |\vec{\partial} \cdot \vec{E}|^2 \right) = \frac{k}{\omega} c^2 \frac{dW}{dz}$$

$$V_{\text{str.}} = \frac{k}{\omega} c^2 = \frac{2kc^2}{2\omega} = \frac{dW}{dk} = v_g$$

$$\omega = c \sqrt{\lambda_n + k^2}$$

13.3 Kavitäten

Welche Wellen sind in V erlaubt?

$$\Delta_3 \psi = -\lambda \psi \quad \lambda = \frac{\omega^2}{c^2}$$

V kompakt $\Rightarrow \lambda$ diskrete Lösungen

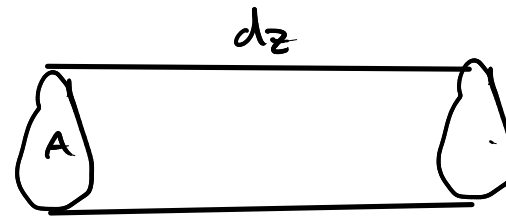
Geometrie von V bestimmt Spektrum $\{\lambda_n\}$



∂V ist
Leiter

Terminierter Wellenleiter

$$V = A \times [0, d_z]$$



∂V ist
Leiter
A bei
 $z=0, d_z$

Damit RB bei $z=0, d_z$ erfüllt sind \Rightarrow Wellenzahl $k_z = \pm \frac{\pi n}{d}$

Randbed $\vec{E} = 0$ und $b = 0$

$$\text{TE} \quad b(z) \sim \sin \frac{\pi n z}{d_z} \quad n_z > 0$$

$$\text{TM} \quad e(z) \sim \cos \frac{\pi n z}{d_z} \quad n_z \geq 0$$

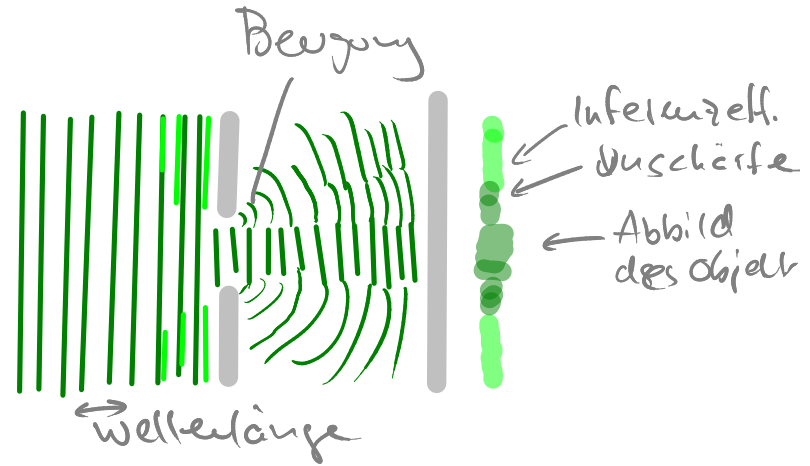
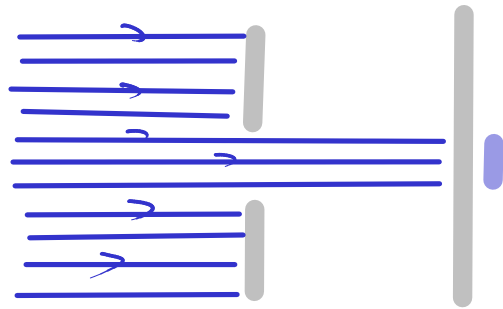
$$\omega_{n, n_z}^{\text{TE/TM}} = c \sqrt{\lambda_n^{\text{TE/TM}} + \frac{\pi^2 n_z^2}{d_z^2}}$$

Kapitel 14

Wellenoptik

Dauer: 1:15:50

14 Wellenoptik

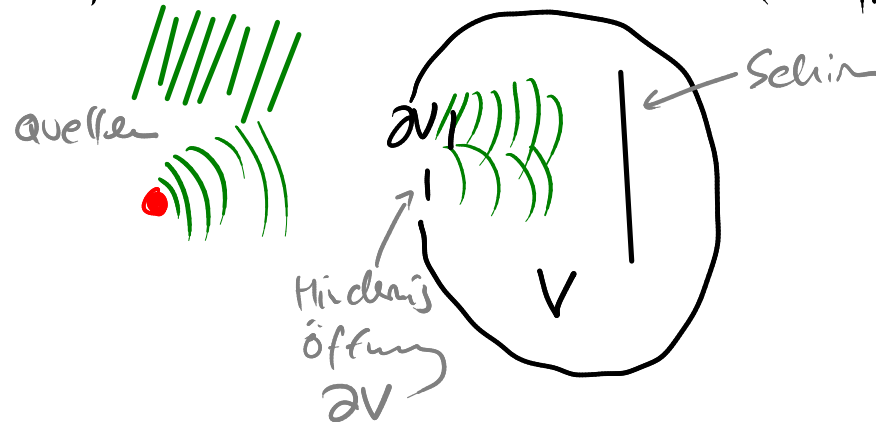


14.1 Kirchhoffsche Beugungstheorie

Skalares Feld ψ , $\nabla\psi = 0$, Objekte als Randbed z.B. $\psi = 0$ / Rand

Aufteilung des Problems in zwei Zone

- Gebiet der Quellen (vor Hindernis)
- Gebiet der Beugung (nach Hindernis)



Ausatz: Zeit-Translationssinv. \Rightarrow Zerlegung nach Freq, ω fest Wellenzahl

$$\psi \sim e^{-i\omega t}$$

$$0 = \square \psi = \Delta \psi + \frac{\omega^2}{c^2} \psi = \Delta \psi + k^2 \psi$$

Greensche Fkt $G(x, y) = \frac{e^{ik\|x-y\|}}{4\pi\|x-y\|}$ in freiem Raum

freie Ausbreitung im Quellgebiet, Streuung mit Rand ∂V , Ausbreiten im Zielgel.

\Rightarrow Kirchhoffsche Formel

Feld im Quellraum

$$\psi(x) = \oint_{\partial V} d\gamma^2 \vec{n} \cdot \left(\frac{e^{ik\|x-y\|}}{4\pi\|x-y\|} \vec{\partial}_y \psi_0(y) - \psi_0(y) \vec{\partial}_y \frac{e^{ik\|x-y\|}}{4\pi\|x-y\|} \right)$$

im Zielgebiet ∂V

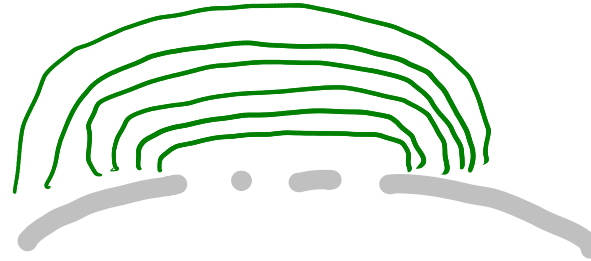
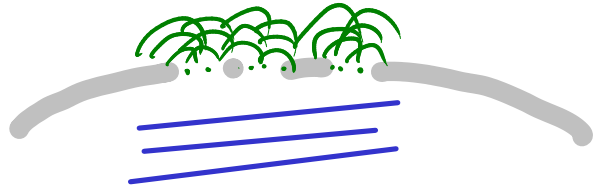
Feld $\psi(x)$ erfüllt die Feldgleichung $(\Delta \psi + k^2 \psi) = 0$.

Erfüllt nicht die Randbed genau ψ_0 , $\vec{n} \cdot \vec{\partial} \psi_0$ können nicht gleichzeitig erfüllt werden
 k. Näherung: $\psi_0 = \vec{n} \cdot \vec{\partial} \psi_0 = 0$ auf ∂V ohne Öffnung

\bullet ψ_0 und $\vec{n} \cdot \vec{\partial} \psi_0$ mit Öffnung werden durch Quellfelder gegeben

14.2. Interferenz und Huygens-Prinzip

Huygens-Prinzip:

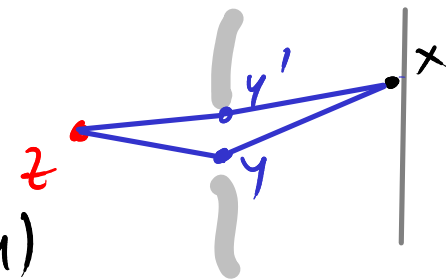


An der Öffnung entstehen kugelwellen, die sich überlagern und in Zielgebiet neue Wellenfronten erzeugen, die dort die Beugung (gute) beschreiben.

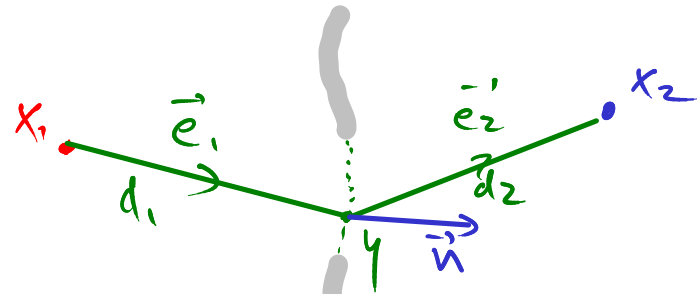
Optische Weglänge L Betrachtete Phase in Kirchhoff Formel und den geraden Weg von (Punkt) Quelle z zu Ziel x

$$\psi(x) \sim \int dy^2 e^{ik\|x-y\|} e^{i\|y-z\|k}$$

$$L_y(x, z) = \|x-y\| + \|y-z\|; \text{ Äquivalent } L_y = \int dy n(y)$$



14.3 Fraunhofer- und Fresnel-Beugung



Tem aus Kirchhoffschen Formel

$$\vec{n} \cdot \left(\frac{e^{ikd_1}}{4\pi d_1} \vec{\partial}_y - \frac{e^{ikd_2}}{4\pi d_2} \vec{\partial}_y \right)$$

$$= \frac{e^{ikd_1 + ikd_2}}{16\pi^2 d_1 d_2} \left(\left(1 - \frac{1}{d_2} + ik\right) \vec{e}_2 + \left(\frac{1}{d_1} - ik\right) \vec{e}_1 \right) \cdot \vec{n}$$

$$\approx \frac{e^{ikd_1 + ikd_2} ik}{16\pi^2 d_1 d_2} (\vec{e}_2 - \vec{e}_1) \cdot \vec{n} \quad \text{für } d_1, d_2 \gg \lambda \sim 1/k$$

$$\vec{e}_{1,2} \cdot \vec{n} = \cos \alpha_{1,2} \quad \frac{e^{ik(d_1 + d_2)} ik}{16\pi^2 d_1 d_2} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)$$

Fraunhofer-Biegung

für Quelle, Detektor in einiger Entfernung vom Objekt

⇒ entwickle d_1, d_2

$$d_1 + d_2 = \sqrt{(\vec{x}_1 - \vec{y})^2} + \sqrt{(\vec{y} - \vec{x}_2)^2}$$

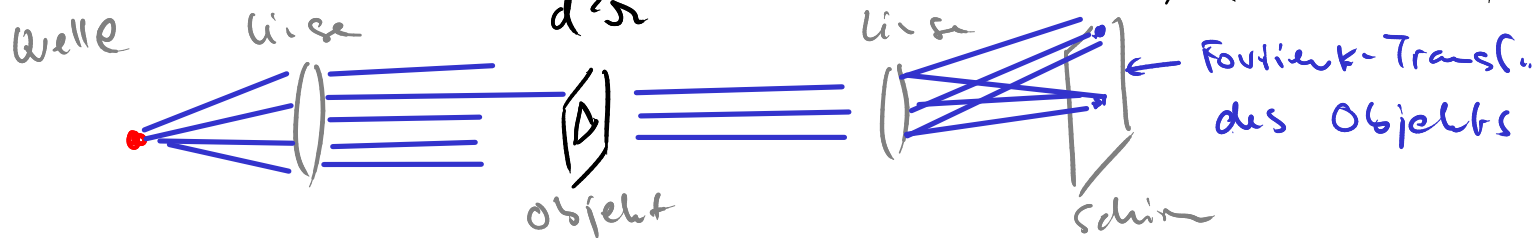
$$= r_1 - \frac{\vec{x}_1 \cdot \vec{y}}{r_1} + r_2 - \frac{\vec{x}_2 \cdot \vec{y}}{r_2} + \dots \quad \|\vec{y}\| \ll r_1, r_2$$

$$\psi(x) \approx k (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \frac{e^{ik(r_1+r_2)}}{r_1 r_2} \int dy^2 e^{ik(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \cdot \vec{y}}$$

\uparrow
 $F(\vec{n})$
 Fourier-Transformierte von Obj.

Fraunhofer-Biegung: Abbild erscheint als Fouriertransf. des Obj.

diffr. Streuquerschnitt $\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega} \sim k^2 (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)^2 |F(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)|^2$

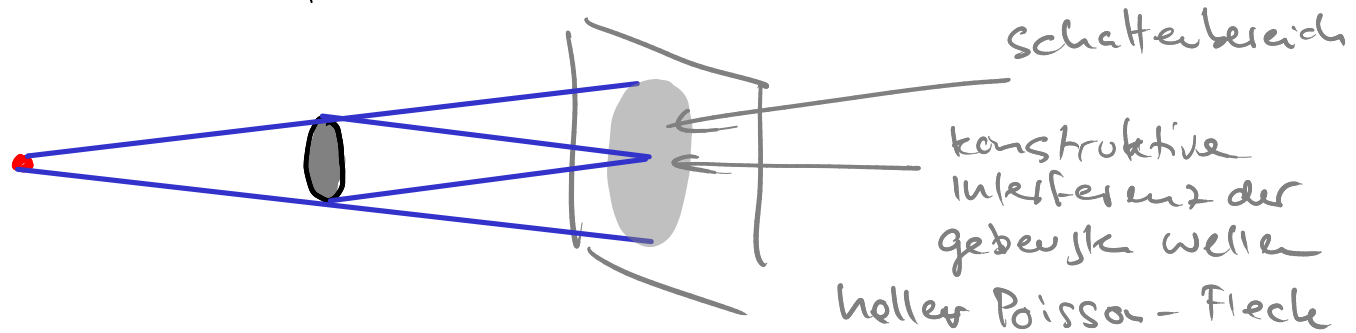


Fresnel - Beugung

Quelle oder Detektor in Nähe des Objekts

=> benötigt exakte Phase allgemein nicht in geschl Form integrierbar

Beispiele: Kreisscheibe,



kreisförmige Öffnung:

Intensität oszilliert mit Abstand $\sim \sin^2 \left(\frac{ka^2}{2\rho} \right)$

Abstand \downarrow Radius \downarrow
Wellenzahl \uparrow

Intensitätsminima + maxima