Série 3.

Transformation de Legendre et potentiels thermodynamiques.

Exercice 3.1 Transformation de Legendre.
La transformée de Legendre d'une fonction $f(x)$ est définie par

$$Lf(p) = x\,p - f(x)\ , \qquad f'(x) = p\,. \tag{1}$$

Montrer que:
(a) Si $f(x)$ est convexe (concave), $Lf(p)$ est aussi convexe (concave).
(b) La transformation de Legendre est involutive: $LLf = f$.

Exercice 3.2
Calculer les transformées de Legendre des fonctions suivantes.

$$(\mathbf{a}) \qquad f(x) = ax^b \tag{2}$$

$$(\mathbf{b}) \qquad f(x) = \ln x \tag{3}$$

Vérifier la propriété $LLf = f$ pour les résultats obtenus.

Exercice 3.3
Pour le gaz parfait monoatomique (N particules) calculer l'énergie libre $f(T, v)$ et l'enthalpie $h(s, P)$ *per particule*. Vérifier si ce sont des fonctions convexes (concaves) de leurs arguments.