

Série 2.

Température et entropie.

Exercice 2.1 Différentielles exactes.

Déterminer si les différentielles ω suivantes sont exactes. Si la différentielle ω est exacte, l'intégrer (trouver la fonction f telle que $\omega = df$).

$$(a) \quad \omega = x^2 dy + (2xy + x) dx \quad (1)$$

$$(b) \quad \omega = x dy - y dx \quad (2)$$

$$(c) \quad \omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \quad (3)$$

Exercice 2.2 Entropie du gaz parfait monoatomique.

Pour un gaz parfait monoatomique (N particules dans un volume V à température T) trouver l'énergie interne $U(V, T)$ et l'entropie $S(V, T)$.

(a) Supposer que les particules du gaz ont une distribution des vitesses à l'équilibre:

$$dN = N f(\vec{v}) d^3\vec{v} \quad (4)$$

(dN est le nombre de particules dans l'intervalle de vitesse $d^3\vec{v}$). Supposer aussi que la fonction $f(\vec{v})$ dépend uniquement de la grandeur absolue $|\vec{v}|$. Montrer que la pression produite par ces particules est donnée par

$$p = \frac{mN}{3V} \int d^3\vec{v} f(\vec{v}) \vec{v}^2. \quad (5)$$

(b) Dédurre ensuite

$$pV = \frac{2}{3} N \langle E_{\text{cin}} \rangle \quad (6)$$

où $\langle E_{\text{cin}} \rangle$ est l'énergie cinétique moyenne d'une particule. Pour le gaz parfait monoatomique $U = N \langle E_{\text{cin}} \rangle$. Par comparaison avec le loi du gaz parfait $PV = NT$, établir pour le gaz parfait monoatomique

$$U = \frac{3}{2} NT \quad (7)$$

(c) Utiliser la relation

$$dU = T dS - P dV \quad (8)$$

(nombre de particules fixé) pour obtenir l'entropie $S(V, T)$.

Attention!

1. Quand $T \rightarrow 0$, l'expression obtenue pour $S(V, T)$ tend vers $-\infty$. C'est une conséquence du traitement classique. Pour obtenir $S(T \rightarrow 0) = 0$, il est nécessaire de prendre en compte les effets quantiques.

2. Comme on garde le nombre de particules constant, cette dérivation ne permet pas d'obtenir la dépendance de l'entropie vis-à-vis de N .

Exercice 2.3 Cycle de Carnot.

Pour le gaz parfait monoatomique (N particules) considérer le cycle de Carnot suivant (les températures des sources sont $T_2 > T_1$):

Etape 1: Dilatation isothermique à température T_2 du volume V_1 jusqu'à V_2 .

Etape 2: Dilatation adiabatique de la température T_2 jusqu'à T_1 .

Etape 3: Compression isothermique à température T_1 du volume V_3 jusqu'à V_4 .

Etape 4: Compression adiabatique de la température T_1 jusqu'à T_2 .

(a) Sur chaque étape, calculer la chaleur δQ_i et le travail δA_i reçus par le gaz. Vérifier que

$$\sum_{i=1}^4 (\delta Q_i + \delta A_i) = 0. \quad (9)$$

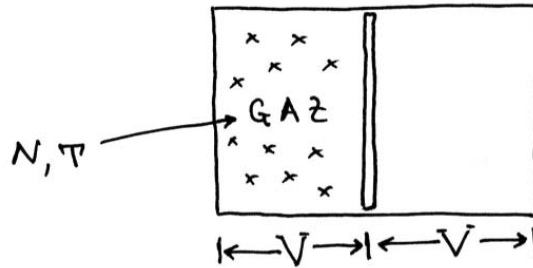
(b) Calculer l'efficacité du cycle de Carnot $\eta = W/Q_+$, où $W = -\sum \delta A_i$ est le travail total fourni par le gaz et $Q_+ = \sum_{\delta Q_i > 0} \delta Q_i$ est la chaleur totale absorbée.

(c) Calculer le changement d'entropie δS_i sur chaque étape en utilisant $\delta S = \delta Q/T$. Vérifier que

$$\sum_{i=1}^4 \delta S_i = 0. \quad (10)$$

Exercice 2.4 Processus non-quasistatiques.

Considérer le processus non-quasistatique suivant. On prend un gaz parfait monoatomique (N particules) confiné dans un sous-volume V à l'intérieur d'un plus grand volume $2V$ (le système est adiabatiquement isolé). Initialement, le gaz est contraint dans le sous-volume V par une paroi (voir Fig.) et il est en équilibre à température T . On enlève la paroi instantanément en permettant au gaz de se dilater jusqu'à le volume $2V$. Calculer le changement d'entropie et de température résultant de ce processus non-quasistatique.

**Exercice 2.5**

Montrer que les principes thermodynamiques et l'extensivité de l'énergie impliquent

$$U = TS - PV + \mu N \quad (\text{Euler}) \quad (11)$$

$$SdT - VdP + Nd\mu = 0 \quad (\text{Gibbs - Duhem}) \quad (12)$$