Série 1.
Loi des grands nombres. Théorème de la limite centrale.

Exercice 1.1
Soit A et B deux variables numériques aléatoires avec moyenne et variance finies. Montrer que :
(a) $\langle A+B \rangle = \langle A \rangle + \langle B \rangle$, pour A et B indépendantes ou non;
(b) Si A et B sont indépendantes, alors $\langle AB \rangle = \langle A \rangle \langle B \rangle$;
(c) Si A et B sont indépendantes, alors $\sigma^2_{A+B} = \sigma^2_A + \sigma^2_B$ (où σ_A, σ_B et σ_{A+B} sont les écarts types pour respectivement A, B et $A+B$).
(d) Proposer deux exemples de paires de variables A et B corrélées avec $\sigma^2_{A+B} > \sigma^2_A + \sigma^2_B$ et $\sigma^2_{A+B} < \sigma^2_A + \sigma^2_B$

Exercice 1.2
On considère N particules ponctuelles, indiscernables et indépendantes équidistribuées dans une enceinte de volume $V \subset \mathbf{R}^3$. On considère une région $\Lambda \subset V$ et on s'intéresse à la densité ρ_Λ de particules dans Λ et ses fluctuations.
(a) Moyenne et écart type de ρ_Λ.
Les calculs de la moyenne $\langle \rho_\Lambda \rangle$ et de l'écart type σ_{ρ_Λ} peuvent être effectués de deux manières différentes : soit on les calcule pour une particule et on multiplie par N en utilisant les proprietés démontrés dans l'Exercice 1.1, soit on utilise directement les probabilités de trouver un nombre de particules donné dans Λ.
En suivant la deuxième méthode, montrer que la probabilité de trouver K particules dans Λ est donnée par

$$P_{\Lambda,V,N}(K) = p^K q^{N-K} \frac{N!}{(N-K)!K!}\,, \tag{1}$$

où $p = |\Lambda|/|V|$ est la probabilité de présence d'une particule donnée dans Λ et $q = 1-p$.
En utilisant cette expression, montrer que le nombre moyen de particules dans Λ est donné par

$$\langle K \rangle = \sum_{K=0}^{N} K \cdot P_{\Lambda,V,N}(K) = Np = \rho|\Lambda| \tag{2}$$

et donc $\langle \rho_\Lambda \rangle = \rho$.
Montrer que les fluctuations de K sont données par

$$\sigma^2_K = \left\langle (K - \langle K \rangle)^2 \right\rangle = Npq\,. \tag{3}$$

Finalement, montrer que les fluctuations de la densité ρ_Λ rapportées à la densité moyenne ρ sont

$$\frac{\sigma_{\rho_\Lambda}}{\rho} = \frac{\sigma_K}{\langle K \rangle} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{q}{p}} = \sqrt{\frac{q}{\langle K \rangle}}\,. \tag{4}$$

Comme application physique, considérer un gaz parfait de $N \sim 6 \cdot 10^{23}$ particules dans un volume $|V| = 1$ dm^3. Pour un sous-volume $|\Lambda| = 1$ cm^3, établir le résultat:

$$\frac{\sigma_{\rho_\Lambda}}{\rho} \sim 10^{-10} . \tag{5}$$

(b) Loi de Poisson.

On s'intéresse au comportement de la loi de probabilité (1) dans la limite thermodynamique, c'est-à-dire lorsque $N \to \infty$ et $|V| \to \infty$ avec $\rho = \text{const}$.

Prenant la limite avec $|\Lambda|$ fixé, montrer qu'on obtient la loi de Poisson:

$$\lim_{\substack{N\to\infty,\ |V|\to\infty \\ \rho=\text{const}}} P_{\Lambda,V,N}(K) = P_\lambda(K) \equiv e^{-\lambda}\frac{\lambda^K}{K!} , \tag{6}$$

où $\lambda = \rho|\Lambda|$.

Calculer la moyenne et l'écart quadratique moyen pour la distribution de Poisson:

$$\langle K \rangle = \sum_K K P_\lambda(K) = \lambda , \tag{7}$$

$$\sigma_K^2 = \langle (K - \langle K \rangle)^2 \rangle = \lambda . \tag{8}$$

En utilisant la formule de Stirling: $N! \sim \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N}$ (démontré dans l'exercice suivant), montrer que la loi de Poisson s'approche de la loi normale quand $\lambda \to \infty$:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sqrt{\lambda} P_\lambda(\lambda + x\sqrt{\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} . \tag{9}$$

Exercice 1.3 Théorème du col de Laplace. Formule de Stirling.

Soit $f(y)$, $a \leq y \leq b$, telle que $f(y)$ possède un minimum unique en $y = u$, $a < u < b$. Alors,

$$\begin{aligned} I(N) &:= \int_a^b dy\, e^{-Nf(y)} \\ &\sim e^{-Nf(u)} \int_a^b dy\, e^{-N\frac{(y-u)^2}{2} f''(u)} \\ &\sim e^{-Nf(u)} \sqrt{\frac{2\pi}{N f''(u)}}, \qquad N \to \infty \end{aligned} \tag{10}$$

(a) Montrer que la formule s'obtient en développant $f(y)$ jusqu'à l'ordre quadratique autour de son minimum dans l'intégrand.

(b) En utilisant ce théorème et la représentation $N! = \int_o^\infty dt\, t^N e^{-t}$, démontrer la formule de Stirling:

$$N! \sim \sqrt{2\pi N}\, N^N e^{-N} \tag{11}$$

Exercice 1.4 Théorème de la limite centrale.

(a) Fonction caractéristique d'une variable aléatoire.

Pour une distribution de probabilité $P(x)$ d'une variable réelle aléatoire x, on définit la fonction caractéristique $f(\alpha)$ comme la transformée de Fourier de $P(x)$:

$$f(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x)\, e^{i\alpha x}\, dx. \tag{12}$$

Avec cette definition, $f(0) = 1$, $f'(0) = i\langle x \rangle$, et $f''(0) = -\langle x^2 \rangle$.

Montrer que la fonction caractéristique de la somme de deux variables aléatoires indépendantes est donnée par le produit de leur deux fonctions caractéristiques.

(b) Théorème de la limite centrale.

Soit $X_1, X_2, \ldots$ un ensemble de variables aléatoires suivant la même statistique $P(X)$ et indépendantes. Supposons que l'espérance μ et l'écart type σ de $P(X)$ soient *finis*.

Considérons la somme de n variables $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. On sait déjà (Exercice 1.1) que l'espérance de S_n est $n\mu$ et que son écart type vaut $\sigma\sqrt{n}$.

Le *théorème de la limite centrale* affirme que la distribution de probabilité $P_n(S)$ pour S_n tend vers la loi normale quand n tend vers l'infini:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma\sqrt{n}\; P_n(n\mu + x\sigma\sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{13}$$

Ce théorème peut facilement être obtenu en utilisant les fonctions caractéristiques. Soit $f(\alpha)$ la fonction caractéristique de $P(X)$, celle de $P_n(S)$ est donnée par $[f(\alpha)]^n$ [voir la partie (b)]. Exprimer

$$P_n(S) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{2\pi}\, e^{n \ln f(\alpha) - i\alpha S} \tag{14}$$

et utiliser la méthode du col de Laplace (Exercice 1.2) pour prouver le théorème.