Examen intermédiaire. 7 novembre 2008.

Problème 1.

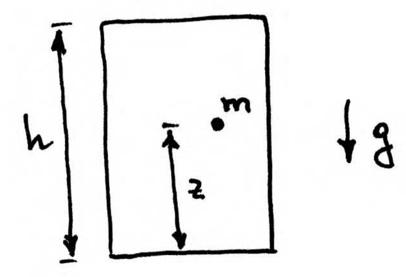
Une tasse de thé à une température de 80 °C est placée dans une grande salle à une température de 20 °C. *Estimer* l'augmentation d'entropie totale (pour le système comprenant la salle et la tasse) par molécule d'eau lorsque le thé se refroidit ($\Delta S_{\rm tot}/N_{\rm mol.d'eau}$). Exprimer le résultat en bits par molécule. Il suffit d'estimer l'ordre de grandeur du résultat.

Pour effectuer le calcul :
La chaleur spécifique de l'eau est 4.2 J/(g·K), et 1 gramme d'eau contient $N_A/18$ molécules (où $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ est le Nombre d'Avogadro). La constante de Boltzmann est $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K. Négliger l'évaporation du thé et la contribution du récipient. Pour convertir les degrés Celsius en Kelvins on ajoute 273 K : [temp en K] = [temp en °C] + 273.

Problème 2.

Considérer une particule ponctuelle de masse m dans une boîte rectangulaire (trois dimensions) de hauteur h. La boîte se trouve dans un champ gravitationnel uniforme avec l'accélération de chute libre g. L'énergie potentielle est mesurée à partir du fond de la boîte $E_{\rm pot} = mgz$, où z est la coordonnée verticale (voir Fig.). Dans l'ensemble microcanonique avec l'énergie $E > 0$ fixée, *calculer* l'énergie potentielle moyenne $\langle E_{\rm pot}\rangle = mg\langle z\rangle$.

Attention: il y a deux cas à traiter: $E \leq mgh$ et $E \geq mgh$.



Problème 3.

Soit a un nombre entier supérieur à 1. Considérer l'ensemble des séquences de longueur N composées de trois nombres 0, 1, et a avec la contrainte que la somme de tous les nombres dans la séquence soit égale à N et avec toutes ces séquences équiprobables. (Exemple: pour $a = 3$ et $N = 5$, la séquence 31001 est admissible). Dans cet ensemble, *calculer* l'entropie par élément de séquence dans la limite $N \to \infty$ (en fonction de a).

Vous pouvez tester votre résultat sur trois cas simples: $a = 2$, $a \to \infty$ et $a \to 1$.

Formules principales du cours :

Equation du gaz parfait: $PV = NT$ (ou $PV = Nk_BT$).

Variation de l'énergie interne dans un processus quasistatique : $dU = TdS - PdV$.

Variation d'entropie (processus réversible) $dS = \frac{\delta Q}{T}$.

Ensemble microcanonique :

$$\langle f(p,q)\rangle = \frac{1}{\rho(E)}\int d\Omega\, \delta(H(p,q) - E) f(p,q)$$

Densité d'états :

$$\rho(E) = \int d\Omega\, \delta(H(p,q) - E)$$

Entropie : $S = -\sum_i p_i \ln p_i$ ou $S = \ln W$.

Formules mathématiques :

Formule de Stirling :

$$N! \approx \sqrt{2\pi N} N^N / e^N.$$

Intégration par la méthode du point selle :

$$\int dx\, e^{f(x)} \approx \sqrt{\frac{2\pi}{-f''(x_0)}} e^{f(x_0)}.$$

Intégration gausienne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2/2} = \sqrt{2\pi}$$

Fonction delta :

$$\delta(f(x) - f_0) = \sum_{f(x_i)=f_0} \frac{1}{|f'(x_i)|}\delta(x - x_i)$$

Développement de la fonction logarithme :

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots$$

Constantes physiques et mathématiques :

Constante de Boltzmann : $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K.
Nombre d'Avogadro : $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$.
$\ln 2 \approx 0.69$
$e \approx 2.72$
$\pi \approx 3.14$