Série 9.
Matrice densité.

Exercice 9.1

Considérons un système quantique à deux niveaux $|0\rangle$ et $|1\rangle$. Définissons les deux états (purs) normés:

$$\Psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right), \qquad \Psi_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - |1\rangle\right). \tag{1}$$

(1) Exprimer la matrice densité $\hat{\rho}$ dans la base $|0\rangle$, $|1\rangle$ (comme une matrice 2×2) pour les trois états (ensembles) suivants:

Le système est dans l'état Ψ_+ avec la probabilité p_+ et dans l'état Ψ_- avec la probabilité p_-, où

(a) $\quad p_+ = 1, \quad p_- = 0;$

(b) $\quad p_+ = 0, \quad p_- = 1;$

(c) $\quad p_+ = p_- = 1/2;$

(2) Vérifier que la condition $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ est satisfaite pour les états (a) et (b), mais pas pour l'état (c).

(3) Pour chacune des trois observables,

$$L_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad L_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

calculer la moyenne et la fluctuation (écart quadratique moyen) dans les trois ensembles (a), (b), et (c).

Exercice 9.2

Définissons l'espace de matrices densités par les trois conditions suivantes:
(1) La matrice densité est hermitienne: $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$.
(2) La trace est égale à 1: $\mathrm{Tr}\,\hat{\rho} = 1$.
(3) La matrice densité est definie positive ou nulle: $\langle\Psi|\hat{\rho}|\Psi\rangle \geq 0$ pour un état arbitraire Ψ.

Prouver que les matrices $\hat{\rho}$ satisfaisant les trois conditions ci-dessus forment une région convexe dans l'espace des opérateurs.

Exercice 9.3

Considérons un système quantique à deux niveaux et un état défini par la matrice densité

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} 1/2 & \alpha \\ \alpha^* & 1/2 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

où α est un nombre complexe.

(1) Déterminer toutes les valeurs de α produisant une matrice densité admissible.

(2) Calculer l'entropie de l'état

$$S = -\mathrm{Tr}\left(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}\right) \tag{4}$$

en fonction de α.

(3) Quelles valeurs de α correspondent à des états purs ?