

**Série 2.**

Température et entropie.

**Exercice 2.1** Différentielles exactes.

Déterminer si les différentielles  $\omega$  suivantes sont exactes. Si la différentielle  $\omega$  est exacte, l'intégrer (trouver la fonction  $f$  telle que  $\omega = df$ ).

$$(a) \quad \omega = x^2 dy + (2xy + x) dx \quad (1)$$

$$(b) \quad \omega = x dy - y dx \quad (2)$$

$$(c) \quad \omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \quad (3)$$

**Exercice 2.2** Entropie du gaz parfait monoatomique.

Pour un gaz parfait monoatomique ( $N$  particules dans un volume  $V$  à température  $T$ ) trouver l'énergie interne  $U(V, T)$  et l'entropie  $S(V, T)$ .

(a) Supposer que les particules du gaz ont une distribution des vitesses à l'équilibre:

$$dN = N f(\vec{v}) d^3\vec{v} \quad (4)$$

( $dN$  est le nombre de particules dans l'intervalle de vitesse  $d^3\vec{v}$ ). Supposer aussi que la fonction  $f(\vec{v})$  dépend uniquement de la grandeur absolue  $|\vec{v}|$ . Montrer que la pression produite par ces particules est donnée par

$$p = \frac{mN}{3V} \int d^3\vec{v} f(\vec{v}) \vec{v}^2. \quad (5)$$

(b) Dédurre ensuite

$$pV = \frac{2}{3} N \langle E_{\text{cin}} \rangle \quad (6)$$

où  $\langle E_{\text{cin}} \rangle$  est l'énergie cinétique moyenne d'une particule. Pour le gaz parfait monoatomique  $U = N \langle E_{\text{cin}} \rangle$ . Par comparaison avec le loi du gaz parfait  $PV = NT$ , établir pour le gaz parfait monoatomique

$$U = \frac{3}{2} NT \quad (7)$$

(c) Utiliser la relation

$$dU = T dS - P dV \quad (8)$$

(nombre de particules fixé) pour obtenir l'entropie  $S(V, T)$ .

Attention!

1. Quand  $T \rightarrow 0$ , l'expression obtenue pour  $S(V, T)$  tend vers  $-\infty$ . C'est une conséquence du traitement classique. Pour obtenir  $S(T \rightarrow 0) = 0$ , il est nécessaire de prendre en compte les effets quantiques.

2. Comme on garde le nombre de particules constant, cette dérivation ne permet pas d'obtenir la dépendance de l'entropie vis-à-vis de  $N$ .

**Exercice 2.3** Cycle de Carnot.

Pour le gaz parfait monoatomique ( $N$  particules) considérer le cycle de Carnot suivant (les températures des sources sont  $T_2 > T_1$ ):

Etape 1: Dilatation isothermique à température  $T_2$  du volume  $V_1$  jusqu'à  $V_2$ .

Etape 2: Dilatation adiabatique de la température  $T_2$  jusqu'à  $T_1$ .

Etape 3: Compression isothermique à température  $T_1$  du volume  $V_3$  jusqu'à  $V_4$ .

Etape 4: Compression adiabatique de la température  $T_1$  jusqu'à  $T_2$ .

(a) Sur chaque étape, calculer la chaleur  $\delta Q_i$  et le travail  $\delta A_i$  reçus par le gaz. Vérifier que

$$\sum_{i=1}^4 (\delta Q_i + \delta A_i) = 0. \quad (9)$$

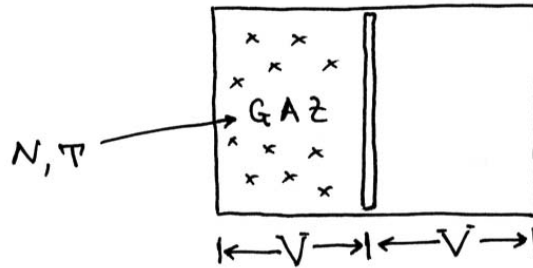
(b) Calculer l'efficacité du cycle de Carnot  $\eta = W/Q_+$ , où  $W = -\sum \delta A_i$  est le travail total fourni par le gaz et  $Q_+ = \sum_{\delta Q_i > 0} \delta Q_i$  est la chaleur totale absorbée.

(c) Calculer le changement d'entropie  $\delta S_i$  sur chaque étape en utilisant  $\delta S = \delta Q/T$ . Vérifier que

$$\sum_{i=1}^4 \delta S_i = 0. \quad (10)$$

**Exercice 2.4** Processus non-quasistatiques.

Considérer le processus non-quasistatique suivant. On prend un gaz parfait monoatomique ( $N$  particules) confiné dans un sous-volume  $V$  à l'intérieur d'un plus grand volume  $2V$  (le système est adiabatiquement isolé). Initialement, le gaz est contraint dans le sous-volume  $V$  par une paroi (voir Fig.) et il est en équilibre à température  $T$ . On enlève la paroi instantanément en permettant au gaz de se dilater jusqu'à le volume  $2V$ . Calculer le changement d'entropie et de température résultant de ce processus non-quasistatique.

**Exercice 2.5**

Montrer que les principes thermodynamiques et l'extensivité de l'énergie impliquent

$$U = TS - PV + \mu N \quad (\text{Euler}) \quad (11)$$

$$SdT - VdP + Nd\mu = 0 \quad (\text{Gibbs - Duhem}) \quad (12)$$