Série 1.
Loi des grands nombres. Théorème de la limite centrale.

Exercice 1.1

On considère N particules ponctuelles, indiscernables et indépendantes équidistribuées dans une enceinte de volume $V \subset \mathbf{R}^3$. Soit une région $\Lambda \subset V$, $p = |\Lambda|/|V|$ la probabilité de présence d'une particule donnée dans Λ, $q = 1 - p$ et $\rho = N/|V|$ la densité de particules dans V. Soit K le nombre de particules dans le volume Λ, $\rho_\Lambda = K/|\Lambda|$ la densité de particules dans Λ.

(a) Ecart type de ρ_Λ.

Montrer que la probabilité de trouver (exactement) K particules dans Λ est donnée par

$$P_{\Lambda,V,N}(K) = p^K q^{N-K} \frac{N!}{(N-K)!K!} \,. \tag{1}$$

Montrer que le nombre moyen de particules dans Λ est donné par

$$\langle K \rangle = \sum_{K=0}^{N} K \cdot P_{\Lambda,V,N}(K) = Np = \rho|\Lambda| \,. \tag{2}$$

Montrer que les fluctuations de K sont données par

$$\left\langle (K - \langle K \rangle)^2 \right\rangle = Npq \,. \tag{3}$$

Montrer que les fluctuations de K rapportées au nombre moyen $\langle K \rangle$, sont

$$\frac{\sqrt{\langle (K - \langle K \rangle)^2 \rangle}}{\langle K \rangle} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{q}{p}} = \sqrt{\frac{q}{\langle K \rangle}} \,. \tag{4}$$

Application numérique : $|V| = 1dm^3$, $|\Lambda| = 1cm^3$, $N \sim 6 \cdot 10^{23}$. Etablir le résultat:

$$\frac{\sqrt{\langle (\rho_\Lambda - \rho)^2 \rangle}}{\rho} \sim 10^{-10} \,. \tag{5}$$

(b) Loi de Poisson.

On s'intéresse au comportement de la loi de probabilité (1) en limite thermodynamique, c'est-à-dire lorsque $N \to \infty$ et $|V| \to \infty$ avec $\rho = \text{const}$.

Prenant la limite avec $|\Lambda|$ fixé, montrer qu'on obtient la loi de Poisson:

$$\lim_{\substack{N\to\infty,\ |V|\to\infty \\ \rho=\text{const}}} P_{\Lambda,V,N}(K) = P_\lambda(K) \equiv e^{-\lambda} \frac{\lambda^K}{K!} \,, \tag{6}$$

où $\lambda = \rho|\Lambda|$.

Calculer la moyenne et l'écart quadratique moyen pour la distribution de Poisson:

$$\langle K\rangle = \sum_K K P_\lambda(K) = \lambda\,, \tag{7}$$

$$\langle (K - \langle K\rangle)^2\rangle = \lambda\,. \tag{8}$$

En utilisant la formule de Stirling: $N! \sim \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N}$ (voir l'exercice suivant), montrer que la loi de Poisson s'approche de la loi normale quand $\lambda \to \infty$:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sqrt{\lambda} P_\lambda(\lambda + x\sqrt{\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,. \tag{9}$$

Exercice 1.2 Théorème du col de Laplace. Formule de Stirling.

Soit $f(y)$, $a \le y \le b$, telle que $f(y)$ possède un minimum unique en $y = u$, $a < u < b$. Alors,

$$\begin{aligned} I(N) &:= \int_a^b dy\, e^{-Nf(y)} \\ &\sim e^{-Nf(u)} \int_a^b dy\, e^{-N\frac{(y-u)^2}{2} f''(u)} \\ &\sim e^{-Nf(u)} \sqrt{\frac{2\pi}{Nf''(u)}}, \qquad N \to \infty \end{aligned} \tag{10}$$

(a) Montrer que la formule s'obtient en développant $f(y)$ jusqu'à l'ordre quadratique autour de son minimum dans l'intégrand.

(b) En utilisant ce théorème et la représentation $N! = \int_o^\infty dt\, t^N e^{-t}$, démontrer la formule de Stirling:

$$N! \sim \sqrt{2\pi N}\, N^N e^{-N} \tag{11}$$

Exercice 1.3 Théorème de la limite centrale.

(a) Montrer que la moyenne et la variance de la somme de deux variables aléatoires indépendantes (pas nécessairement avec les mêmes distributions de probabilités) sont données respectivement par les sommes de leurs moyennes et variances. Ce résultat fournit une dérivation alternative des formules (2) et (3) de l'exercice 1.1.

(b) Fonction caractéristique d'une variable aléatoire.

Pour une distribution de probabilité $P(x)$ d'une variable réelle aléatoire x, on définit la fonction caractéristique $f(\alpha)$ comme la transformée de Fourier de $P(x)$:

$$f(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x)\, e^{i\alpha x}\, dx. \tag{12}$$

Avec cette definition, $f(0) = 1$, $f'(0) = i\langle x\rangle$, et $f''(0) = -\langle x^2\rangle$.

Montrer que la fonction caractéristique de la somme de deux variables aléatoires indépendantes est donnée par le produit de leur deux fonctions caractéristiques.

(c) Théorème de la limite centrale.

Soit X_1, X_2, ... un ensemble de variables aléatoires suivant la même statistique $P(X)$ et indépendantes. Supposons que l'espérance μ et l'écart type σ de $P(X)$ soient *finis*.

Considérons la somme de n variables $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. On sait déjà (point (a)) que l'espérance de S_n est $n\mu$ et que son écart type vaut $\sigma\sqrt{n}$.

Le *théorème de la limite centrale* affirme que la distribution de probabilité $P_n(S)$ pour S_n tend vers la loi normale quand n tend vers l'infini:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma\sqrt{n}\, P_n(n\mu + x\sigma\sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{13}$$

Ce théorème peut facilement être obtenu en utilisant les fonctions caractéristiques. Soit $f(\alpha)$ la fonction caractéristique de $P(X)$, celle de $P_n(S)$ est donnée par $[f(\alpha)]^n$ [voir la partie (b)]. Exprimer

$$P_n(S) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{2\pi}\, e^{n \ln f(\alpha) - i\alpha S} \tag{14}$$

et utiliser la méthode du col de Laplace (Exercice 1.2) pour prouver le théorème.