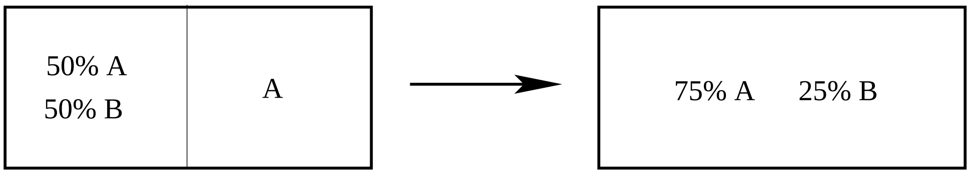
Physique Statistique I, 2007-2008

Examen intermédiaire. 9 novembre 2007.

Problème 1.

On considère deux volumes identiques V de gaz avec des caractéristiques physiques identiques. Le premier volume contient 50% de gaz de type A et 50% de gaz de type B. Le deuxième volume contient 100% de gaz A (voir Fig.). Les particules du gaz A sont indiscernables entre elles, de même que celles du gaz B, mais les particules de type A sont discernables de celles de type B. Toutes les propriétes physiques des gaz sont identiques et les deux volumes se trouvent dans le même état macroscopique à l'équilibre.

On connecte les deux volumes et les gaz se mélangent dans le volume total $2V$. Le nombre total de particules des deux gaz est N. *Calculer* l'augmentation d'entropie associée à ce processus irréversible.



Problème 2.

Considérons une particule en trois dimensions dans le potentiel central

$$U(r) = \alpha r^3$$

($r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$). Le hamiltonien s'écrit

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(r)$$

Calculer son énergie cinétique moyenne $\langle \frac{\vec{p}^2}{2m} \rangle$ dans l'ensemble microcanonique à l'énergie totale E.

Problème 3.

On joue à pile ou face en jettant une pièce de monnaie en l'air $N \gg 1$ fois. Les deux résultats (pile ou face) sont équiprobables à chaque lancer, et les lancers sont indépendants. On s'intéresse à la différence entre les deux résultats

$$\Delta N = |N_p - N_f|$$

Ici N_p et N_f sont respectivement les nombres de piles et faces (avec $N_p + N_f = N$). *Calculer* l'espérance mathématique $\langle \Delta N \rangle$ à l'ordre principal dans la limite $N \to \infty$. *Estimer* $\langle \Delta N \rangle$ pour $N = 10\,000$.

Indice: remarquez que $\langle \Delta N \rangle \neq \sqrt{\langle (\Delta N)^2 \rangle}$.

Formules principales du cours:

Equation du gaz parfait: $PV = NT$ (ou $PV = Nk_BT$).

Constante de Boltzmann: $k_B = 1.38 \cdot 10^{23} J/K$.

Variation de l'énergie interne dans un processus quasistatique: $dU = TdS - PdV$.

Energie du gaz parfait monoatomique: $U = \frac{3}{2}T$.

Equation de l'adiabatique pour un gaz parfait monoatomique:
$PV^{5/3} = \text{const}$ (ou $VT^{3/2} = \text{const}$).

Ensemble microcanonique:

$$\langle f(p,q)\rangle = \frac{1}{\rho(E)} \int d\Omega\, \delta(H(p,q) - E) f(p,q)$$

Densité d'états:

$$\rho(E) = \int d\Omega\, \delta(H(p,q) - E)$$

Entropie: $S = -\sum_i p_i \ln p_i$ ou $S = \ln W$.

Formules mathématiques:

Formule de Stirling:

$$N! \approx \sqrt{2\pi N} N^N / e^N.$$

Intégration par la méthode du point selle:

$$\int dx\, e^{f(x)} \approx \sqrt{\frac{2\pi}{-f''(x_0)}} e^{f(x_0)}.$$

Intégration gausienne:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2/2} = \sqrt{2\pi}$$

Fonction delta:

$$\delta(f(x) - f_0) = \sum_{f(x_i)=f_0} \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i)$$