

Elektrodynamik

Übungsblätter

ETH/Uni Zürich, FS16

PROF. N. BEISERT

© 2016 ETH Zurich

Dieses Dokument sowie seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Reproduktion eines Teils dieses Dokuments in beliebiger Form ohne vorgängige schriftliche Erlaubnis der ETH Zürich ist nur zum privaten, wissenschaftlichen und nicht-gewerblichen Gebrauch gestattet.

Inhaltsverzeichnis

Blatt 1	1.1
1.1. Vektoranalysis	1.1
1.2. Satz von Gauß	1.2
1.3. Satz von Stokes	1.2
1.4. Potential und elektrische Feldstärke	1.2
Blatt 2	2.1
2.1. Stabiles Gleichgewicht	2.1
2.2. Energie im Plattenkondensator	2.1
2.3. Elektrische Feldstärke in einer Hohlkugel	2.1
2.4. delta-Funktion	2.1
2.5. Imaginäre Dipole	2.2
Blatt 3	3.1
3.1. Kapazitäten	3.1
3.2. Eindimensionale Greensche Funktion	3.1
3.3. Leitende Kugel im elektrischen Feld	3.2
Blatt 4	4.1
4.1. Greensche Funktionen in der Elektrostatik	4.1
4.2. Kugelförmiger Hohlraum	4.1
4.3. Sphärische Multipolmomente eines Würfels	4.2
Blatt 5	5.1
5.1. Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten	5.1
5.2. Entwicklung des Potentials in Legendre-Polynomen	5.1
5.3. Greensche Funktion in zwei Dimensionen	5.2
5.4. Rotationsübungen	5.3
5.5. Magnetfeld einer kreisförmigen Leiterschleife	5.3
5.6. Magnetisches Moment einer rotierenden Kugelschale	5.4
5.7. Stromdurchflossener Leiter	5.4
5.8. Magnetisches Feld einer endlichen Spule	5.4
Blatt 6	6.1
6.1. Kondensator mit Dielektrikum	6.1
6.2. Vektorpotential einer Leiterschleife	6.1
6.3. Eisenrohr im Magnetfeld	6.2
Blatt 7	7.1
7.1. Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld	7.1
7.2. Induktion im Magnetfeld	7.1
7.3. Selbstinduktion eines Koaxialkabels	7.1
Blatt 8	8.1
8.1. Dynamik eines elektrischen Schaltkreises	8.1
8.2. Der Poynting-Vektor	8.2
Blatt 9	9.1

9.1. Invarianter Abstand	9.1
9.2. Elektromagnetischer Feldtensor	9.1
9.3. Relativistische Kraft	9.2
9.4. Fourier-Transformation	9.2
Blatt 10	10.1
10.1. Teilweise polarisiertes Licht	10.1
10.2. Gruppengeschwindigkeit	10.2
Blatt 11	11.1
11.1. Strahlung einer linearen Antenne	11.1
11.2. Dipolstrahlung	11.2
11.3. Energie- und Impulsfluss einer ebenen Welle	11.2
Blatt 12	12.1
12.1. Optik gemäss dem Prinzip der kleinsten Wirkung	12.1
12.2. Brechung von ebenen Wellen	12.2
12.3. Lichtstreuung	12.2
Blatt 13	13.1
13.1. Strahlung in relativistischer Kreisbewegung	13.1
13.2. Liénard-Wiechert Potential	13.2
13.3. Luftspiegelung	13.2
Blatt 14	14.1
14.1. Rechteckiger Hohlleiter	14.1
14.2. Koaxialer Wellenleiter	14.1

1.1. Vektoranalysis

In der Elektrodynamik treten häufig Standardidentitäten der Vektoranalysis auf. Diese sollen mit dieser Aufgabe wieder ins Gedächtnis zurückgerufen werden.

Definitionen/Konventionen: Wir schreiben die bekannten vektoriellen Ableitungsoperatoren grad, div, rot i.d.R. mittels des Vektors $\vec{\nabla}$ partieller Ableitungen $\nabla_i := \partial/\partial x_i$ als

$$\text{grad } F := \vec{\nabla} F, \quad \text{div } \vec{A} := \vec{\nabla} \cdot \vec{A}, \quad \text{rot } \vec{A} := \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (1.1)$$

Die Komponenten eines dreidimensionalen Vektorprodukts $\vec{a} \times \vec{b}$ sind gegeben durch

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_j b_k. \quad (1.2)$$

Hier ist ε_{ijk} der total antisymmetrische Tensor für \mathbb{R}^3 mit $\varepsilon_{123} = +1$.

a) Zeige zunächst, dass

$$\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \quad \text{und} \quad \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijl} = \delta_{kl}. \quad (1.3)$$

b) Zeige nun die folgenden Identitäten für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}), \quad (1.4)$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}, \quad (1.5)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}). \quad (1.6)$$

c) Beweise schliesslich die folgenden Identitäten für beliebige skalare Felder F und vektorielle Felder \vec{A}, \vec{B} :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} F) = 0, \quad (1.7)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0, \quad (1.8)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}, \quad (1.9)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (F \vec{A}) = (\vec{\nabla} F) \cdot \vec{A} + F \vec{\nabla} \cdot \vec{A}. \quad (1.10)$$

→

1.2. Satz von Gauß

Betrachte folgende Vektorfelder \vec{A}_i in zwei Dimensionen

$$\vec{A}_1 = (3xy(y-x), x^2(3y-x)), \quad (1.11)$$

$$\vec{A}_2 = (x^2(3y-x), 3xy(x-y)), \quad (1.12)$$

$$\vec{A}_3 = (x/(x^2+y^2), y/(x^2+y^2)) = \vec{x}/\|\vec{x}\|^2. \quad (1.13)$$

- a) Berechne den Fluss von \vec{A}_i durch den Rand des Quadrats Q mit den Eckpunkten $\vec{x} = (\pm 1, \pm 1)$

$$I_i = \oint_{\partial Q} dx \vec{n} \cdot \vec{A}_i. \quad (1.14)$$

- b) Berechne die Divergenz von \vec{A}_i und dessen Integral über die Fläche desselben Quadrats Q

$$I'_i = \int_Q dx^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_i. \quad (1.15)$$

1.3. Satz von Stokes

Betrachte das Vektorfeld

$$\vec{A} = (x^2y, x^3 + 2xy^2, xyz). \quad (1.16)$$

- a) Berechne das Integral entlang eines Kreises S um den Ursprung in der xy -Ebene mit Radius R

$$I = \oint_S d\vec{x} \cdot \vec{A}. \quad (1.17)$$

- b) Berechne die Rotation \vec{B} des Vektorfeldes \vec{A}

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (1.18)$$

- c) Berechne nun den Fluss der Rotation \vec{B} durch die von S berandete Kreisscheibe D , $\partial D = S$

$$I' = \int_D dx^2 \vec{n} \cdot \vec{B}. \quad (1.19)$$

1.4. Potential und elektrische Feldstärke

Vier Punktladungen sind an den Ecken $(a, 0)$, (a, a) , $(0, a)$, $(0, 0)$ eines Quadrates angebracht. Bestimme das Potential und die elektrische Feldstärke in der Ebene dieses Quadrates. Skizziere die Feldlinien und die Äquipotentiallinien für folgende Ladungsverteilungen:

a) $+q, +q, +q, +q$;

b) $-q, +q, -q, +q$;

c) $+q, +q, -q, -q$.

Hinweis: In Mathematica sind die Befehle `ContourPlot` und `StreamPlot` nützlich.

2.1. Stabiles Gleichgewicht

Zwei Kugeln, jeweils mit Ladung $+q$, liegen auf einer Isolatorplatte in der Ebene $z = 0$ und können sich dort reibungsfrei bewegen. Unter der Platte befindet sich bei $\vec{x} = (0, 0, -b)$ eine weitere Kugel mit Ladung $-2q$ fest fixiert. Behandle die Kugeln als Punktladungen und finde stabile Positionen für die Kugeln auf der Platte.

2.2. Energie im Plattenkondensator

Zwei Platten mit Ladung $+Q$ und $-Q$ und Fläche A sind parallel zueinander im (kleinen) Abstand d angeordnet. Wie gross ist die Energie, die im elektrischen Feld zwischen den Platten gespeichert ist?

2.3. Elektrische Feldstärke in einer Hohlkugel

Eine geladene Kugel mit homogener Ladungsdichte ρ und Radius R_A enthalte einen um den Vektor \vec{a} gegen den Mittelpunkt verschobenen, kugelförmigen Hohlraum mit Radius $R_I < R_A - \|\vec{a}\|$. Berechne die elektrische Feldstärke im Hohlraum.

Hinweis: Verwende den Satz von Gauß sowie das Superpositionsprinzip zur Berechnung der elektrischen Feldstärke.

2.4. delta-Funktion

Die delta-Funktion wird oft gebraucht, um in einer Ladungsdichte Punktladungen darzustellen. Sie ist definiert durch die folgende Eigenschaft bei Integration über eine glatte Testfunktion f mit kompakten Träger:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x - a) = f(a). \quad (2.1)$$

a) Zeige, dass sie als Grenzwert $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} g_{\epsilon}(x) = \delta(x)$ geschrieben werden kann, wobei

$$g_{\epsilon}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} e^{-x^2/(2\epsilon)}. \quad (2.2)$$

b) Zeige ebenso $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_{\epsilon}(x) = \delta(x)$ mit

$$h_{\epsilon}(x) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{x - i\epsilon} - \frac{1}{x + i\epsilon} \right). \quad (2.3)$$

c) Zeige, dass die Ableitung der delta-Funktion die folgende Eigenschaft besitzt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta'(x - a) = -f'(a). \quad (2.4)$$

→

2.5. Imaginäre Dipole

Gegeben sind zwei Punktladungen q und q' im Abstand d sowie eine Ebene im Abstand αd von q , die auf der Verbindung von q und q' senkrecht steht.

- a) Zeige, dass die Ebene genau dann eine Äquipotentialebene ist, wenn $q' = -q$ und $\alpha = 1/2$ gilt.

Hinweis: Betrachte zuerst das Potential in grosser Entfernung.

Betrachte nun eine Punktladung q mit den kartesischen Koordinaten $(a, b, 0)$ im freien Bereich eines Raumes, der ausser für positive x und y mit einem geerdeten Leiter gefüllt ist.

- b) Begründe, dass zwei Spiegelladungen – eine bezüglich der Ebene $x = 0$, eine bezüglich $y = 0$ – nicht genügen, um die Randbedingungen für den Leiter zu erfüllen.
- c) Führe unter Ausnutzung der Symmetrie der Anordnung eine zusätzliche Spiegelladung ein und zeige explizit, dass diese die begrenzenden Ebenen zu Äquipotentialebenen macht. Skizziere die Ladungsanordnung.

Betrachte schliesslich eine Punktladung im freien Segment eines Raumes, der bis auf den Bereich des Winkels $0 \leq \varphi \leq \pi/n$ (n ganzzahlig) mit einem geerdeten Leiter gefüllt ist.

- d) Bestimme graphisch eine Verteilung von Spiegelladungen, die das elektrische Feld dieser Ladung im freien Raumsegment reproduziert. Was ist die elektrische Feldstärke auf der Schnittgeraden der beiden Begrenzungsebenen?
- e) *optional:* Skizziere die Feldlinien der Ladungsverteilung aus Teilaufgabe d).

3.1. Kapazitäten

Ein einfacher Kondensator besteht aus zwei isolierten Leitern, auf denen gleich grosse entgegengesetzte Ladungen $Q_1 = +Q$ und $Q_2 = -Q$ sitzen. Die beiden Leiter haben dann im Allgemeinen unterschiedliches elektrisches Potential, und $U = \Phi_1 - \Phi_2$ bezeichne die Potentialdifferenz. Eine charakteristische Grösse des Kondensators ist die Kapazität C , die definiert ist durch

$$C = \frac{|Q|}{|U|}. \quad (3.1)$$

Berechne die Kapazität für die folgenden Anordnungen:

- zwei grosse parallele Ebenen mit Fläche A und kleinem Abstand d ($A \gg d^2$);
- zwei konzentrische, leitende Kugeloberflächen mit Radien a und b ($b > a$);
- zwei koaxiale, leitende Zylinderflächen der Länge L und der Radien a, b ($L \gg b > a$).

3.2. Eindimensionale Greensche Funktion

Man betrachte den Raum zwischen zwei unendlich grossen, geerdeten Leiterplatten, die parallel zueinander an den Punkten $x = 0$ und $x = d$ aufgestellt sind. Eine weitere Platte mit Flächenladungsdichte σ befindet sich bei $x = a$ mit $0 < a < d$.

- Zeige, dass die Herleitung des Potentials $\Phi(\vec{x})$ für $0 \leq x \leq d$ äquivalent ist zur Berechnung einer eindimensionalen Greenschen Funktion und somit zur Lösung der folgenden Gleichung,

$$\Delta_x G(x, a) = -\delta(x - a) \quad \text{wobei} \quad \Delta_x := \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad (3.2)$$

mit den Dirichlet Randbedingungen $G(0, a) = G(d, a) = 0$.

Um die Lösung der folgenden Teilaufgaben zu vereinfachen, bietet es sich an, das Koordinatensystem so zu verschieben, dass die geladene Platte sich bei $x = 0$ und die geerdeten Leiterplatten sich bei $x = -a$ bzw. $x = d - a$ befinden.

- Teile den Raum in zwei ladungsfreie Regionen $-a < x < 0$ und $0 < x < d - a$ auf, und löse dort die zwei separaten, homogenen Laplace-Gleichungen für das Potential. Integriere dann die Poisson-Gleichung von $x = -\epsilon$ bis $x = +\epsilon$, und betrachte den Grenzwert $\epsilon \rightarrow 0$, um die Bedingungen zu finden, welche die zwei Lösungen für das Potential in $x = 0$ verbinden. Bestimme schliesslich das Potential für den gesamten Bereich $-a < x < d - a$.
- Bestätige das obige Resultat, indem Du die Differentialgleichung für das Potential unter Berücksichtigung der Randbedingungen bei $x = -a$ und $x = d - a$ direkt integrierst.
- Führe eine Fouriertransformation der Differentialgleichung für das Potential durch, löse die transformierte Gleichung im Fourier-Raum und transformiere die Lösung zurück in den Ortsraum. Überzeuge Dich von der Existenz einer partikulären Lösung, welche mit den vorherigen übereinstimmt.

→

3.3. Leitende Kugel im elektrischen Feld

Eine leitende Kugel, auf der die Gesamtladung Q sitzt, wird in ein homogenes elektrisches Feld $\vec{E} = E\vec{e}_z$ gebracht. Wie verändert sich das elektrische Feld durch die Anwesenheit der Kugel? Wie ist die Ladung auf der Oberfläche der Kugel verteilt?

Hinweise: Motiviere den folgenden Ansatz in Kugelkoordinaten

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = f_0(r) + f_1(r) \cos \vartheta, \quad (3.3)$$

und löse die Poisson-Gleichung im Aussenraum $\Delta\Phi = 0$ mit dem Laplace-Operator

$$\Delta\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial\Phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2\Phi}{\partial \varphi^2}. \quad (3.4)$$

Benutze anschliessend die folgenden Randbedingungen, um die gesuchte Lösung zu finden:

- Weit weg von der Kugel soll das homogene Feld dominieren.
- Die Oberfläche der leitenden Kugel muss eine Äquipotentialfläche sein.
- Das elektrische Feld muss den Satz von Gauß erfüllen.

4.1. Greensche Funktionen in der Elektrostatik

In dieser Aufgabe werden wir die Greensche Funktion der Elektrostatik genauer analysieren. Wir betrachten Greensche Funktionen G auf einem Volumen V mit Dirichlet- bzw. Neumann-Randbedingungen auf der Oberfläche ∂V .

- a) Drücke die Differenz $G(y, z) - G(z, y)$ als Integral über die Oberfläche ∂V aus. Verwende dazu die zweite Greensche Identität

$$\int_V dx^3 (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) = \oint_{\partial V} dx^2 \vec{n} \cdot (\phi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \phi) \quad (4.1)$$

mit $\phi(x) = G(y, x)$ and $\psi(x) = G(z, x)$. Benutze, dass $\Delta_x G(y, x) = -\delta^3(x - y)$.

- b) Zeige, dass die Greensche Funktion $G_D(x, y)$ mit Dirichlet-Randbedingung $G_D(x, y) = 0$ für alle $y \in \partial V$ symmetrisch in x und y ist.
- c) Begründe, dass $\vec{n}_y \cdot \vec{\nabla}_y G_D(x, y) \rightarrow -\delta^2(x - y)$ für $x \rightarrow \partial V$ und $y \in \partial V$. Im Fall $x \not\rightarrow y$ nutze die Dirichlet-Randbedingung für $G_D(x, y)$. Um den Spezialfall $x \rightarrow y$ zu verstehen, integriere den obigen Ausdruck über alle $y \in \partial V$ vor Ausführung des Grenzwerts.

- d) Betrachte nun die (alternative Formulierung der) Neumann-Randbedingung

$$\vec{\nabla}_x [\vec{n}_y \cdot \vec{\nabla}_y G_N(x, y)] = 0 \quad \text{für alle } y \in \partial V. \quad (4.2)$$

Zeige, dass $G_N(x, y)$ im Allgemeinen nicht symmetrisch in x und y ist. Konstruiere eine Greensche Funktion $\tilde{G}_N(x, y) = G_N(x, y) + H(y) + K(x)$, welche symmetrisch in x und y ist. Was muss für H und K gelten damit \tilde{G}_N weiterhin eine geeignete Greensche Funktion ist?

4.2. Kugelförmiger Hohlraum

Das Potential auf der Oberfläche eines kugelförmigen Hohlraumes mit Radius R sei gegeben durch eine beliebige Funktion $U(\vartheta, \varphi)$.

- a) Zeige, dass sich das Potential im Inneren der Hohlkugel schreiben lässt als

$$\Phi(x) = \int \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi' \frac{R(R^2 - r^2) U(\vartheta', \varphi')}{4\pi(r^2 + R^2 - 2rR \cos \gamma)^{3/2}}, \quad (4.3)$$

wobei γ den Winkel zwischen x und x' bezeichnet. Bestimme $\cos \gamma$ in Abhängigkeit der Variablen $\vartheta, \varphi, \vartheta'$ und φ' .

Hinweis: Bestimme die Greensche Funktion unter Verwendung der Spiegelladungsmethode und verwende Kugelkoordinaten.

- b) Gib die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung mit Hilfe der Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell, m}$ an. Verwende dann die Orthonormalitätsrelationen, um die Koeffizienten für die gegebenen Randbedingungen zu bestimmen.
- c) Finde das Potential $\Phi(x)$ innerhalb der Hohlkugel explizit für die Randbedingung

$$U(\vartheta, \varphi) = U_0 \cos \vartheta. \quad (4.4)$$

→

4.3. Sphärische Multipolmomente eines Würfels

Es seien positive und negative Punktladungen $\pm q$ auf den Ecken eines Würfels mit Kantenlänge a angeordnet. Das Zentrum des Würfels liegt im Koordinatenursprung und die Kanten sind parallel zu den x, y, z -Achsen ausgerichtet. Die Ladung an der Ecke mit $x, y, z > 0$ sei positiv. Ladungen auf benachbarten Ecken haben entgegengesetztes Vorzeichen.

- a) Bestimme die Lage der Ladungen in kartesischen Koordinaten und in Kugelkoordinaten.
- b) Bestimme die Ladungsdichte in kartesischen Koordinaten und anschliessend in Kugelkoordinaten. Verwende hierbei

$$\delta^3(x - x_0) = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \delta(r - r_0) \delta(\vartheta - \vartheta_0) \delta(\varphi - \varphi_0), \quad (4.5)$$

sowie $\sin \vartheta = \sin(\pi - \vartheta)$ und $\cos(\pi - \vartheta) = -\cos \vartheta$.

- c) Berechne die sphärischen Dipol-, Quadrupol- und Oktupolmomente dieser Ladungsverteilung. Verwende hierbei

$$q_{\ell, m} = \int dx^3 \rho(x) r^\ell Y_{\ell, m}^*(\vartheta, \varphi), \quad m = -\ell, -(\ell - 1), \dots, +(\ell - 1), +\ell. \quad (4.6)$$

Die benötigten Kugelflächenfunktionen lauten:

$$\begin{aligned} Y_{00} &= 1, & Y_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{2}} \sin \vartheta e^{i\varphi}, \\ Y_{10} &= \sqrt{3} \cos \vartheta, & Y_{22} &= \sqrt{\frac{15}{8}} \sin^2 \vartheta e^{2i\varphi}, \\ Y_{21} &= -\sqrt{\frac{15}{2}} \cos \vartheta \sin \vartheta e^{i\varphi}, & Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{4}} (3 \cos^2 \vartheta - 1), \\ Y_{33} &= -\sqrt{\frac{35}{16}} \sin^3 \vartheta e^{3i\varphi}, & Y_{32} &= \sqrt{\frac{105}{8}} \cos \vartheta \sin^2 \vartheta e^{2i\varphi}, \\ Y_{31} &= -\sqrt{\frac{21}{16}} (5 \cos^2 \vartheta - 1) \sin \vartheta e^{i\varphi}, & Y_{30} &= \sqrt{\frac{7}{4}} (5 \cos^3 \vartheta - 3 \cos \vartheta). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Weiter gilt: $Y_{\ell, -m} = (-1)^m Y_{\ell, m}^*$, und somit $q_{\ell, -m} = (-1)^m q_{\ell, m}^*$.

5.1. Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten

Wir rufen uns zunächst die Multipolentwicklung des Potentials in Erinnerung. Gegeben sei eine räumlich begrenzte Ladungsverteilung $\rho(x')$. Das zugehörige Potential $\Phi(x)$ kann ausserhalb der Region, in der $\rho(x')$ nicht verschwindet, wie folgt entwickelt werden:

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Q_{\ell,m}}{2\ell+1} \frac{1}{r^{\ell+1}} Y_{\ell,m}(\vartheta, \varphi), \quad (5.1)$$

wobei $Y_{\ell,m}(\vartheta, \varphi)$ die Kugelflächenfunktionen bezeichnet und $Q_{\ell,m}$ die Multipolmomente. Letztere sind definiert durch

$$Q_{\ell,m} = \int dx'^3 Y_{\ell,m}^*(\vartheta', \varphi') r'^{\ell} \rho(x'). \quad (5.2)$$

Betrachte nun eine kreisförmige Schleife mit Radius R in der x,y -Ebene, deren Mitte am Ursprung liegt und welche eine lineare Ladungsdichte $\lambda = \lambda_0 \cos \varphi$ trägt. φ ist der Azimutwinkel gemessen in der x,y -Ebene.

- a) Finde einen Ausdruck in Kugelkoordinaten für die Ladungsdichte $\rho(x')$ der Schleife.
- b) Berechne die Multipolmomente $Q_{\ell,m}$ und benutze sie um die führenden zwei nicht-verschwindenden Beiträge zum Potential $\Phi(x)$ für $\|x\| > R$ zu bestimmen. Diskutiere die Eigenschaften der resultierenden Multipole.
- c) Berechne das elektrische Feld $\vec{E}(x)$ für $\|x\| > R$, welches zu den Dipol- und Quadrupolmomenten gehört.

5.2. Entwicklung des Potentials in Legendre-Polynomen

Man nehme an, dass das Potential auf einer Kugelschale bei Radius R nur vom Polarwinkel ϑ abhängt und gegeben ist durch $\Phi_0(\vartheta)$. Innerhalb und ausserhalb der Kugel sei der Raum leer.

- a) Finde Ausdrücke für das Potential $\Phi(r, \vartheta)$ innerhalb und ausserhalb der Kugelschale und für die Ladungsdichte $\sigma(\vartheta)$ auf der Kugelschale.
- b) Werte die erhaltenen Ausdrücke für $\Phi_0(\vartheta) = U \cos^2 \vartheta$ aus.

Hinweis: Die ersten drei Legendre-Polynome lauten:

$$P_0(\cos \vartheta) = 1, \quad P_1(\cos \vartheta) = \cos \vartheta, \quad P_2(\cos \vartheta) = \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2}. \quad (5.3)$$

Für die Legendre-Polynome gelten die Beziehungen:

$$\int_0^{\pi} P_n(\cos \vartheta) P_m(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = 0 \quad \text{if } n \neq m, \quad (5.4)$$

sowie

$$\int_0^{\pi} P_n^2(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \frac{2}{2n+1}. \quad (5.5)$$

→

Betrachte nun eine Kugelfläche vom Radius R mit konstanter Ladungsverteilung $\sigma = Q/(4\pi R^2)$ bis auf einen runden Bereich am Nordpol, der durch den Kegel $\vartheta < \alpha$ definiert ist und in dem die Ladungsdichte verschwindet.

c) Zeige, dass das Potential innerhalb der Kugel ausgedrückt werden kann durch:

$$\Phi(r, \vartheta) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2\ell+1} [P_{\ell+1}(\cos \alpha) - P_{\ell-1}(\cos \alpha)] \frac{r^\ell}{R^{\ell+1}} P_\ell(\cos \vartheta), \quad (5.6)$$

wobei für $\ell = 0$ gilt $P_{\ell-1}(x) = -1$. Wie lautet das Potential ausserhalb der Kugel?

d) Finde den Betrag und die Richtung des elektrischen Feldes am Ursprung für die Konfiguration in Teil c).

5.3. Greensche Funktion in zwei Dimensionen

a) In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit Greenschen Funktionen in zwei Dimensionen. Betrachte die Greensche Funktion im Inneren des Quadrates $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ mit Dirichlet-Randbedingungen auf den Kanten. Zeige, dass die Greensche Funktion, welche diese Randbedingungen erfüllt, die folgende Entwicklung hat,

$$G(x, y, x', y') = 2 \sum_{n=1}^{\infty} g_n(y, y') \sin(n\pi x) \sin(n\pi x'). \quad (5.7)$$

Die Koeffizienten $g_n(y, y')$ erfüllen die Bedingungen

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - n^2 \pi^2 \right) g_n(y, y') = -\delta(y' - y), \quad (5.8)$$

$$g_n(y, 0) = g_n(y, 1) = 0. \quad (5.9)$$

Benutze dabei, dass für $0 \leq x, x' \leq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x) \sin(n\pi x') = \frac{1}{2} \delta(x - x'). \quad (5.10)$$

b) Die homogene Lösung der Differentialgleichung für g_n kann als Linearkombination von $\sinh(n\pi y')$ und $\cosh(n\pi y')$ geschrieben werden. Mache einen Ansatz in beiden Bereichen $y < y'$ und $y > y'$, der die Randbedingungen und die Diskontinuität der ersten Ableitung erfüllt, die durch die delta-Funktion erzwungen wird. Zeige, dass g_n explizit geschrieben werden kann als

$$g_n(y, y') = \frac{\sinh(n\pi y_{<}) \sinh(n\pi(1 - y_{>}))}{\pi n \sinh(n\pi)}, \quad (5.11)$$

wobei $y_{<}$ ($y_{>}$) der jeweils kleinere (grössere) Wert von y und y' ist.

c) Das Quadrat habe nun eine homogene Ladungsdichte ρ . Ausserdem nehmen wir an, dass die Linien, die das Quadrat begrenzen, geerdet sind. Benutze die Greensche Funktion, die wir zuvor hergeleitet haben, und zeige, dass das Potential geschrieben werden kann als

$$\Phi(x, y) = \frac{4\rho}{\pi^3 \epsilon_0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin((2m+1)\pi x)}{(2m+1)^3} \cdot \left(1 - \frac{\sinh((2m+1)\pi(1-y)) + \sinh((2m+1)\pi y)}{\sinh((2m+1)\pi)} \right). \quad (5.12)$$

→

5.4. Rotationsübungen

Die Drehgruppe (in N Dimensionen) wird beginnend mit der Gruppe der linearen Abbildungen eines Vektorraumes definiert, welche das kanonische Skalarprodukt erhalten.

- a) Zeige, dass eine lineare Transformation, die die Norm aller Vektoren erhält, auch das Skalarprodukt zweier beliebiger Vektoren erhält. Zeige dann, dass eine Matrix, die die Norm aller Vektoren erhält, orthogonal ist.
- b) Zeige, dass die Determinante jeder orthogonalen Matrix $+1$ oder -1 ist.

Orthogonale Matrizen mit negativer Determinante stellen Transformationen dar, die eine Spiegelung beinhalten. Da wir hier nur Rotationen betrachten wollen, beschränken wir uns auf die Gruppe von Matrizen mit positiver Determinante, d.h. auf die spezielle orthogonale Gruppe $SO(N)$

- c) Gib die Matrizen an, die in drei Dimensionen Rotationen um einen infinitesimalen Winkel $\delta\varphi$ um die i -te Koordinatenachse beschreiben. Finde nach Abspaltung der Einheitsmatrix einen einfachen Ausdruck der resultierenden Matrizen unter Verwendung des total antisymmetrischen Tensors ε_{ijk} .
- d) Zeige, dass infinitesimale Rotationen bis auf Terme höherer Ordnung kommutieren, während makroskopische Rotationen typischerweise nicht kommutieren.
- e) Gib die infinitesimale Rotation um den Winkel $\delta\varphi$ um eine beliebige Achse mit Einheitsvektor \vec{n} an (verwende dabei, dass \vec{n} invariant unter dieser Rotation ist). Erweitere das Resultat auf Rotationen um makroskopische Winkel φ um \vec{n} durch eine grosse Zahl von sukzessiven infinitesimalen Rotationen. Zeige, dass jede Rotation mit $\varphi \in (0, 2\pi)$ und beliebigem \vec{n} (genau) eine weitere Darstellung mit anderem φ' , \vec{n}' hat.

5.5. Magnetfeld einer kreisförmigen Leiterschleife

Betrachte einen leitenden Draht in der Form eines Kreises mit Radius R im Zentrum der x,y -Ebene. Ein konstanter Strom I fliesse gegen den Uhrzeigersinn durch diese Schleife.

- a) Berechne das Magnetfeld \vec{B} an einem beliebigen Punkt auf der z -Achse.
- b) Berechne nun das Magnetfeld \vec{B} an einem beliebigen Punkt in der x,y -Ebene.

→

5.6. Magnetisches Moment einer rotierenden Kugelschale

Eine Kugelschale mit Radius R und Ladung Q (homogen auf der Oberfläche verteilt) rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$.

- a) Berechne die Stromdichte $\vec{j}(x) = \vec{v}(x)\rho(x)$.
- b) Berechne das magnetische Moment $\vec{m} = \frac{1}{2} \int dx^3 (\vec{x} \times \vec{j}(x))$ der Kugelschale.
- c) Zeige, dass das von dieser Kugelschale erzeugte Feld für $\|x\| \gg R$ das Feld eines magnetischen Dipols ist, und gib den führenden Term von \vec{B} an.
Hinweis: Verwende das Biot-Savart-Gesetz und betrachte nur die führenden nicht-verschwindenden Terme in $R/\|x\|$.
- d) Sei nun \vec{x}' ein Vektor mit $\vec{x}' \perp \vec{\omega}$ und $\|x'\| \gg R$. Berechne in niedrigster Ordnung die Kraft, die das in der vorangehenden Teilaufgabe berechnete Magnetfeld auf eine zweite gleichartige Kugelschale ausübt, die am Ort \vec{x}' mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ parallel zu $\vec{\omega}$ rotiert. Aufgrund des grossen Abstandes der beiden Kugelschalen ist es zulässig, sie als punktförmige Objekte mit magnetischem Moment zu behandeln.

5.7. Stromdurchflossener Leiter

Betrachte einen geraden, zylindrischen Draht mit Radius R entlang der z -Achse. Der Betrag der Stromdichte innerhalb des Drahtes hat die folgende Abhängigkeit vom Abstand zur Drahtmitte:

$$j(\rho) = j_0 e^{-\rho^2/R^2} \theta(R - \rho), \quad (5.13)$$

wobei $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\theta(x)$ die Einheits-Stufenfunktion ist.

- a) Bestimme den Gesamtstrom I , der durch den Draht fliesst, und drücke die Stromdichte j_0 durch I aus.
- b) Bestimme das magnetische Feld innerhalb und ausserhalb des Drahtes als Funktion des Gesamtstromes. Skizziere die Feldlinien und gib ihre Richtung an. Nimm dabei an, dass der Strom in die positive z -Richtung fliesst.

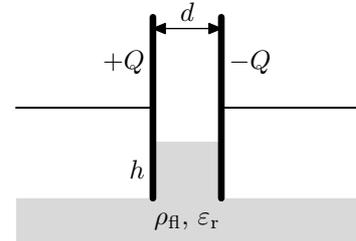
5.8. Magnetisches Feld einer endlichen Spule

Betrachte einen zylindrisch aufgewickelten Draht entlang der z -Achse. Der Radius dieser zylindrischen Spule sei R , ihre Länge sei L (von $z = -L/2$ bis $z = +L/2$). Sei nun $n = N/L$ die Windungszahl pro Längeneinheit und I der (konstante) Gesamtstrom, der durch den Draht fliesst. Randeffekte dürfen vernachlässigt werden.

Berechne die z -Komponente der magnetischen Flussdichte B für Punkte auf der Symmetrieachse. Bestimme das magnetische Feld für $L \rightarrow \infty$ bei konstantem n .

6.1. Kondensator mit Dielektrikum

Betrachte einen Plattenkondensator mit quadratischen Platten der Kantenlänge a und Abstand d . Der Kondensator werde mit der Ladung $\pm Q$ aufgeladen und anschliessend von der Spannungsquelle getrennt. Bringt man den geladenen Kondensator nun oberhalb einer dielektrischen Flüssigkeit (Dichte ρ_{fl} , Permittivität ϵ_r) an, so steigt die Flüssigkeit zwischen den Platten bis zu einer Maximalhöhe h_0 nach oben.



- Bestimme die im Kondensator gespeicherte elektrostatische Energie $W_{el}(h)$ in Abhängigkeit von der Steighöhe h und den oben definierten Grössen.
- Bestimme die potentielle Energie $W_{pot}(h)$ der Flüssigkeit zwischen den Platten als Funktion von h .
- Leite aus der Bedingung, dass die Gesamtenergie minimiert wird, eine Bestimmungsgleichung für h_0 her. Welche Ladungsmenge muss man bei $a = 20\text{cm}$, $d = 5\text{mm}$, $\epsilon_r = 3$, $\rho_{fl} = 0.8\text{g/cm}^3$ auf den Kondensator aufbringen, damit die Flüssigkeit bis zur Hälfte steigt?

6.2. Vektorpotential einer Leiterschleife

Eine kreisförmige Leiterschleife mit Radius a und einer vernachlässigbaren Dicke führe einen Strom I . Das Koordinatensystem sei so gewählt, dass der Draht in der x,y -Ebene liegt. Wir wollen das Vektorpotential der Stromdichte und daraus die zugehörige magnetische Induktion ausrechnen.

- Finde ein Vektorpotential für den Stromkreis anhand der Formel

$$\vec{A} = \mu_0 \int dx'^3 \frac{\vec{j}(x')}{4\pi \|x - x'\|}. \quad (6.1)$$

Hinweis: Entwickle $1/\|x - x'\|$ in Kugelflächenfunktionen und benütze die Identität $Y_{\ell,-m} = (-1)^m Y_{\ell,m}^*$.

- Berechne aus dem Vektorpotential die magnetische Induktion an der Stelle x mit $\|x\| < a$. In Übung 5.5 haben wir gesehen, dass die magnetische Induktion a) auf der z -Achse und b) in der Ebene der Schleife (x,y -Ebene) jeweils in die z -Richtung zeigt. Kannst du diese Resultate bestätigen?

Hinweis: Verwende, dass

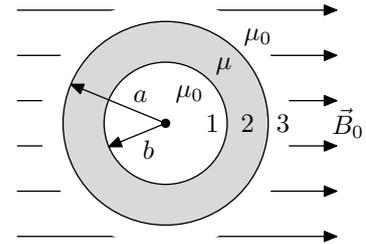
$$P_\ell^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_\ell(x). \quad (6.2)$$

- Nimm nun an, dass die Leiterschleife von einem Eisenmantel mit unendlicher relativer Permeabilität umgeben wird. Was ändert sich für die magnetische Induktion? Wie würde man vorgehen um das Problem zu lösen (keine Rechnung)?

→

6.3. Eisenrohr im Magnetfeld

Ein unendlich langer Hohlzylinder (Innenradius b , Außenradius a) werde mit seiner Achse senkrecht zu einer ursprünglich homogenen magnetischen Flussdichte \vec{B}_0 platziert. Der Hohlzylinder sei aus Eisen (Permeabilität μ). Es wird angenommen, dass die ursprüngliche Flussdichte \vec{B}_0 klein genug ist, dass das Eisen nicht saturiert wird, und dass die Permeabilität μ in dem relevanten Bereich konstant ist.



- a) Leite einen Ausdruck für \vec{B} im Hohlraum ($r < b$) her.

Hinweis: Verwende die Abwesenheit freier Ströme, um das Magnetfeld H über ein skalares Potential Φ mit $\vec{H} = -\vec{\nabla}\Phi$ zu ausdrücken. Die Laplace-Gleichung gilt in allen drei relevanten Raumbereichen. In Zylinderkoordinaten (r, φ, z) gilt für den Laplace-Operator

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (6.3)$$

Die Randbedingungen von H und B an den Grenzflächen sowie das Verhalten für $r \rightarrow 0$ und $r \rightarrow \infty$ fixieren die Konstanten in der Lösung der Differentialgleichung.

- b) Skizziere die magnetischen Feldlinien im gesamten Raumgebiet, bevor und nachdem der Zylinder im Feld platziert wird. Betrachte auch die Fälle eines paramagnetischen ($\mu_r > 1$), eines diamagnetischen ($\mu_r < 1$), und eines supraleitenden ($\mu_r = 0$) Zylinders.

7.1. Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld

Betrachte ein Punktteilchen mit Ladung q in einem elektromagnetischen Feld, beschrieben durch ein Vektorpotential A und ein skalares Potential Φ . Die Lagrange-Funktion des Teilchens ist gegeben durch

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + q\dot{x} \cdot \vec{A}(x, t) - q\Phi(x, t), \quad (7.1)$$

wobei x die Position des Teilchens beschreibt und m seine Masse.

a) Bestimme den kanonischen Impuls \vec{p} ,

$$p_i = \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}_i}. \quad (7.2)$$

Was ist die Relation zwischen dem kanonischen Impuls p und dem kinetischen Impuls $m\dot{x}$? Bestimme die Hamilton-Funktion mithilfe einer Legendre-Transformation,

$$H(x, p, t) = \vec{p} \cdot \dot{x} - L(x, \dot{x}, t). \quad (7.3)$$

b) Leite aus $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ her, dass

$$\sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) \dot{x}_j = (\dot{x} \times \vec{B})_i. \quad (7.4)$$

c) Leite aus den Hamiltonschen Gleichungen

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (7.5)$$

die Bewegungsgleichung für ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld her

$$m\ddot{x} = q(\vec{E} + \dot{x} \times \vec{B}). \quad (7.6)$$

7.2. Induktion im Magnetfeld

Gegeben sei ein homogenes Magnetfeld B parallel zur z -Achse. Im Magnetfeld befindet sich ein leitender Draht in der Form eines Kreises mit Radius R , der mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ rotiert. Die Rotationsachse liege in der Ebene des Leiters und verlaufe durch seinen Mittelpunkt. Sie bilde mit der Magnetfeldrichtung den Winkel ϑ . Berechne die im Leiter induzierte Spannung U als Funktion der Zeit.

7.3. Selbstinduktion eines Koaxialkabels

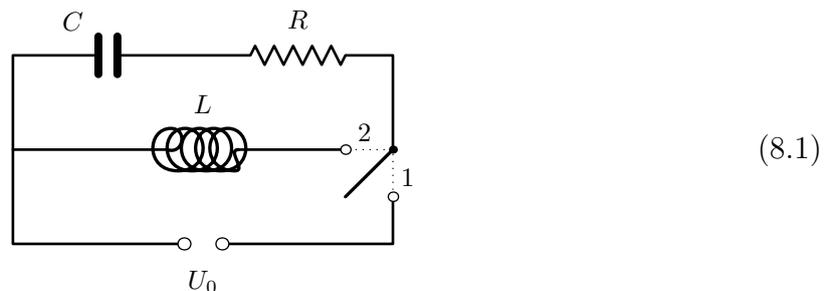
Ein Koaxialkabel bestehe aus zwei coaxialen leitenden Zylinderschalen mit den Radien R_1 und R_2 mit $R_1 < R_2$. Durch jede der beiden Zylinderschalen fließe entlang ihrer Achsen ein Strom I in entgegengesetzter Richtung. Berechne die Selbstinduktion pro Längeneinheit für das Koaxialkabel.

Hinweis: Bestimme zuerst das Magnetfeld des Kabels und dann aus der magnetischen Energie des Kabels seine Selbstinduktion über

$$W = \frac{1}{2}LI^2. \quad (7.7)$$

8.1. Dynamik eines elektrischen Schaltkreises

Betrachte den Schaltkreis in der folgenden Abbildung. Er bestehe aus einer Spannungsquelle U_0 , einem Widerstand R , einem Kondensator der Kapazität C , einer Spule der Induktivität L und einem Schalter.



Der Schalter stehe zunächst auf Position 1, somit bilden Spannungsquelle, Widerstand und Kondensator einen Stromkreis. Der Kondensator sei anfangs entladen.

- a) Stelle eine Differentialgleichung für die Ladung des Kondensators auf, löse sie, und berechne die Zeit, nach der der Kondensator 90% seiner Maximalladung trägt.

Nun wird der Schalter auf Position 2 gestellt, und somit bilden Kondensator, Widerstand und Spule einen Stromkreis. Der Kondensator sei vollständig geladen, wenn der Schalter bei $t = 0$ auf Position 2 gesetzt wird. Dementsprechend fliesse anfangs kein Strom im Stromkreis.

- b) Stelle eine Differentialgleichung für die Ladung des Kondensators im Fall $R = 0$ auf, löse sie, und bestimme die Frequenz des Stromkreises.
- c) Nimm nun stattdessen $R > 0$ an. Stelle die entsprechende Differentialgleichung auf, löse sie und skizziere die Ladung des Kondensators als Funktion der Zeit. Diskutiere die drei qualitativ unterschiedlichen Fälle, die auftreten können.

→

8.2. Der Poynting-Vektor

Die Maxwell-Gleichungen im Vakuum sind gegeben durch

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E}, \quad (8.2)$$

und die Lichtgeschwindigkeit beträgt $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$.

a) Zeige die folgende Identität,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (c^2 \vec{B}^2 + \vec{E}^2) = -c^2 \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{E} \cdot \vec{j}. \quad (8.3)$$

b) Betrachte ein Teilchen der Ladung q , welches sich mit der Geschwindigkeit \vec{v} in einem elektromagnetischen Feld bewege. Zeige, dass die Zeitableitung seiner kinetischen Energie gegeben ist durch

$$\dot{W}_{\text{kin}} = q \vec{v} \cdot \vec{E}. \quad (8.4)$$

Was ist das Äquivalent für eine kontinuierliche Ladungsverteilung?

c) Beweise den Satz von Poynting,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_V dx^3 (c^2 \vec{B}^2 + \vec{E}^2) + W_{\text{kin}} \right) = - \int_{\partial V} dx^2 \vec{n} \cdot \vec{S}, \quad (8.5)$$

wobei V ein beliebiges, zeitlich konstantes Volumen und ∂V dessen Oberfläche sei. Interpretiere die physikalische Bedeutung eines jeden Terms.

d) Der zeitgemittelte Poynting-Vektor mit Periode T ist gegeben durch

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}(t) dt. \quad (8.6)$$

Zeige, dass er für eine monochromatische Welle in einem nicht-leitenden Medium geschrieben werden kann als

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c^2 \text{Re}(\vec{E}_0 \times \vec{B}_0^*), \quad (8.7)$$

wobei \vec{E}_0 und \vec{B}_0 die komplexen Amplituden des elektrischen bzw. magnetischen Feldes mit der Zeitabhängigkeit $e^{i\omega t}$ sind,

$$\vec{E}(t) = \text{Re}(\vec{E}_0 e^{i\omega t}), \quad \vec{B}(t) = \text{Re}(\vec{B}_0 e^{i\omega t}). \quad (8.8)$$

9.1. Invarianter Abstand

Ein Lorentz-Boost mit beliebiger Richtung und Geschwindigkeit ist gegeben durch

$$t' = \gamma t - \frac{\gamma}{c^2} \vec{x} \cdot \vec{v}, \quad \vec{x}' = \vec{x} - \gamma \vec{v} t + (\gamma - 1) \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v}, \quad \text{wobei} \quad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (9.1)$$

- a) Finde eine Matrix $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu$ (in 1 + 3 Block-Form), so dass die obige Transformation von der Form $x'^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x^\nu$ ist.
- b) Bestätige, dass die Matrix $\Lambda^\mu{}_\nu$ aus Teilaufgabe a) die folgende Relation erfüllt

$$\Lambda^\lambda{}_\mu \eta_{\lambda\sigma} \Lambda^\sigma{}_\nu = \eta_{\mu\nu}. \quad (9.2)$$

Hinweis: O.b.d.A. kann man annehmen, dass $\vec{v} = v \vec{e}_z$.

- c) Das Abstandsquadrat zwischen zwei Punkten x_1 und x_2 der Raumzeit ist gegeben durch $s^2 = s^\mu s_\mu$ mit $s^\mu := x_1^\mu - x_2^\mu$. Zeige, dass es eine skalare Grösse ist und zudem invariant unter Poincaré-Transformationen.

9.2. Elektromagnetischer Feldtensor

Der elektromagnetische Feldtensor ist gegeben durch

$$F_{\mu\nu} = -\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c} E_x & \frac{1}{c} E_y & \frac{1}{c} E_z \\ -\frac{1}{c} E_x & 0 & -B_z & +B_y \\ -\frac{1}{c} E_y & +B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{1}{c} E_z & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.3)$$

- a) Zeige, dass der elektromagnetische Feldtensor invariant ist unter der Eichtransformation

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda \quad (9.4)$$

für ein beliebiges skalares Feld Λ .

- b) Der duale elektromagnetische Feldtensor wird definiert als

$$\tilde{F}_{\mu\nu} := \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}. \quad (9.5)$$

Bestimme die Matrixelemente von $\tilde{F}_{\mu\nu}$ analog zu dem obigen Ausdruck für $F_{\mu\nu}$.

- c) Bestätige, dass die homogenen Maxwell-Gleichungen $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$ und $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ ausgedrückt werden können als

$$\partial^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0. \quad (9.6)$$

- d) Berechne die Kontraktionen $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$ und $\tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$.

→

9.3. Relativistische Kraft

Zwei Teilchen im Abstand d bewegen sich mit identischer Geschwindigkeit v in eine Richtung senkrecht zu ihrem Abstand. Beide Teilchen tragen die Ladung q .

- Transformiere die elektromagnetischen Felder verursacht von den Teilchen aus dem Ruhesystem der Teilchen in das Bezugssystem des Beobachters. Berechne dann die Kraft zwischen den Teilchen im letzteren Bezugssystem.
- Die relativistische Vierer-Kraft ist definiert als $K^\mu := dp^\mu/d\tau$ mit der Eigenzeit τ des Teilchens. Zeige, dass $d/d\tau = \gamma d/dt$, wobei t die Zeit im Bezugssystem des Beobachters ist. Benutze dies um zu zeigen, dass die Komponenten der Vierer-Kraft im Bezugssystem des Beobachters die folgende Form haben

$$K^\mu = \gamma(\vec{F} \cdot \vec{v}/c, \vec{F}), \quad (9.7)$$

wobei \vec{F} die Kraft auf das Teilchen im Bezugssystem des Beobachters bezeichne.

Hinweis: Leite die Invariante $p^\mu p_\mu$ nach t ab.

- Stelle die Transformationsregel für K^μ zwischen dem Ruhesystem der Teilchen und dem Bezugssystem des Beobachters auf. Bestätige, dass die Kraft aus Teilaufgabe a) konsistent mit der transformierten Kraft aus dem Ruhesystem der Teilchen ist.

9.4. Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation in einem dreidimensionalen Raum und ihre Inverse seien gegeben durch

$$\tilde{f}(\vec{k}) = \int dx^3 f(\vec{x}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \quad f(\vec{x}) = \int \frac{dk^3}{(2\pi)^3} \tilde{f}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}. \quad (9.8)$$

Zeige die folgenden Identitäten für die Fourier-Transformation:

- $h(x) = af(x) + bg(x) \implies \tilde{h}(k) = a\tilde{f}(k) + b\tilde{g}(k) \quad (a, b \in \mathbb{C}).$
- $\vec{h}(x) = \vec{\nabla} f(x) \implies \tilde{\vec{h}}(k) = i\vec{k}\tilde{f}(k).$
- $h(x) = f(x)g(x) \implies \tilde{h}(k) = (2\pi)^{-3}(\tilde{f} * \tilde{g})(k) := (2\pi)^{-3} \int dk'^3 \tilde{f}(k') \tilde{g}(k - k').$
- $h(x) = f^*(x) \implies \tilde{h}(k) = \tilde{f}^*(-k).$
- $h(x) = \delta^3(x) \implies \tilde{h}(k) = 1.$
- $\vec{h}(x) = \vec{\nabla} \delta^3(x) \implies \tilde{\vec{h}}(k) = i\vec{k}.$

10.1. Teilweise polarisiertes Licht

Eine fast monochromatische elektromagnetische Welle in die Fortpflanzungsrichtung z besitzt die komplexe Notation

$$\vec{B} = \vec{e}_z \times \vec{E}, \quad \vec{E} = \vec{E}(t - \vec{e}_z \cdot \vec{x}/c), \quad \vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{-i\omega_0 t} \quad (10.1)$$

mit $\vec{E}_0 = (E_1, E_2, 0)$ in der x, y -Ebene. Wir nehmen an, dass die charakteristische Zeitskala von \vec{E}_0 (genannt Kohärenzzeit τ), über welche die Schwankungen von \vec{E}_0 korreliert sind, viel grösser als eine Periode mit Zeitskala $2\pi/\omega_0$, jedoch rasch veränderlich auf der Zeitskala optischer Polarisationsmessungen ist. Das erlaubt uns, die Fluktuationen zu mitteln und die Amplituden \vec{E}_0 als Zufallsvariablen aufzufassen. Wir bezeichnen Mittelwerte mit dem Symbol $\langle \cdot \rangle$. Wir wollen zeigen, dass die gesamte Information über die Polarisation der Welle in der folgenden hermiteschen Matrix enthalten ist

$$S = \begin{pmatrix} \langle E_1 E_1^* \rangle & \langle E_1 E_2^* \rangle \\ \langle E_2 E_1^* \rangle & \langle E_2 E_2^* \rangle \end{pmatrix} = S^\dagger. \quad (10.2)$$

a) Zeige, dass S von der folgenden Form

$$S = s_0 \sigma_0 + s_1 \sigma_1 + s_2 \sigma_2 + s_3 \sigma_3 := s_0 \sigma_0 + \vec{s} \cdot \vec{\sigma}, \quad (10.3)$$

wobei $s_i \in \mathbb{R}$ (Stokessche Parameter) und σ_i bezeichnet die Einheits- und Pauli-Matrizen

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (10.4)$$

Hinweis: Die Matrizen der Form S bilden einen Vektorraum der reellen Dimension 4.

b) Drücke die Stokesschen Parameter durch die Mittelwerte $\langle E_j E_k^* \rangle$ aus.

Hinweis: Stelle zuerst fest, dass $S \cdot T := \frac{1}{2} \text{tr}(ST)$ für Matrizen S und T von der Form (10.3) ein Skalarprodukt definiert. Dann prüfe $\sigma_i \sigma_j = i \varepsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij} \sigma_0$ und nutze das zusammen mit den Eigenschaften des Skalarproduktes, um die Stokesschen Parameter zu berechnen.

c) Zeige, dass $\|\vec{s}\| = s_0$ im Fall einer reinen Polarisation der elektromagnetischen Welle (\vec{E}_0 fest und triviale Mittelwerte) gilt.

Hinweis: Berechne die Spur von S^2 .

d) Zeige, dass im Allgemeinen $\|\vec{s}\| \leq s_0$ gilt.

Hinweis: Zeige, dass die Matrix S positiv definit ist und bestimme ihre Eigenwerte.

e) Finde eine physikalische Bedeutung für die Stokesschen Parameter. Was bedeutet $\vec{s} = 0$?

Hinweis: Berechne zuerst die Eigenwerte $\lambda_\pm^{(i)}$ und Eigenvektoren $\vec{e}_\pm^{(i)}$ der Pauli-Matrizen. Dann drücke s_i durch die Koeffizienten $\alpha_\pm^{(i)}$ in der Zerlegung $(E_1, E_2) = \alpha_+^{(i)} \vec{e}_+^{(i)} + \alpha_-^{(i)} \vec{e}_-^{(i)}$ aus. Berechne dann S und ihre Spur in der Eigenbasis $\{\vec{e}_+^{(i)}, \vec{e}_-^{(i)}\}$.

→

10.2. Gruppengeschwindigkeit

Ein eindimensionales Gaußsches Wellenpaket $\phi(x, t)$ bewege sich in einem dispersiven Medium (d.h. $\omega(k)$ hängt nicht-linear von k ab). Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei

$$\phi(x, t = 0) = \exp\left(-\frac{x^2}{2(\Delta x)^2}\right), \quad (10.5)$$

wobei wir Δx als Maß für die räumliche Ausdehnung des Wellenpakets auffassen. Die Zeitentwicklung ist gegeben durch

$$\phi(x, t) = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{\phi}(k) e^{ikx - i\omega(k)t}, \quad (10.6)$$

wobei $\tilde{\phi}(k)$ die Fourier-Transformierte von $\phi(x, t = 0)$ sei.

- a) Zeige mittels quadratischer Ergänzung, dass das Wellenpaket bei $t = 0$ auch im Fourier-Raum ein Gaußsches Profil hat. Welches Verhältnis besteht zwischen Δx und dem analog definierten Δk ? Was bedeutet dies?

Hinweis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) = \sqrt{2\pi} |\sigma|. \quad (10.7)$$

- b) Zeige, dass sich das Maximum des Wellenpakets in der Zeit t vom Ursprung um die Strecke $v_g t$ fortbewegt, wobei die *Gruppengeschwindigkeit* v_g gegeben ist durch

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0}. \quad (10.8)$$

Hier sei k_0 die Wellenzahl am Maximum von $\tilde{\phi}(k)$.

Hinweis: Entwickle $\omega(k)$ bis zur ersten Ordnung in k um k_0 , und ermittle die Änderung des Maximums des Wellenpakets mittels (10.6).

- c) Mit welcher Geschwindigkeit bewegen sich die einzelnen Phasen? Unter welcher Bedingung sind Phasen- und Gruppengeschwindigkeit der Welle gleich?
- d) Schätze ab, wie schnell sich das Wellenpaket verbreitert, indem Du einen Ausdruck für die Variation der Gruppengeschwindigkeit innerhalb des Pulses findest. Benutze dann die Relation zwischen Δk und Δx aus Teil a) und interpretiere das Ergebnis dementsprechend.

Hinweis: Schätze die Variation als Differenz Δv_g der Gruppengeschwindigkeiten für k_0 und $k_0 + \Delta k$ (analog zu (10.8)) ab und bestimme Δv_g durch Entwicklung von $\omega(k)$ um k_0 bis zur ersten beitragenden Ordnung.

11.1. Strahlung einer linearen Antenne

Betrachte eine dünne, lineare Antenne der Länge $2d$, welche auf der z -Achse zentriert im Ursprung liegt. Durch die Antenne verlaufe ein oszillierender Strom, dessen Wellenlänge der Länge der Antenne entspreche, $\lambda = 2d$, mit zugehöriger Frequenz $\omega = \pi c/d$. Die Amplitude des Stromes sei I_0 .

Hinweis: Diese Antenne unterscheidet sich von der in der in der Vorlesung diskutierten. Dort ist der oszillierende Strom symmetrisch um den Ursprung, hier dagegen antisymmetrisch. Die Endresultate sind deshalb nicht identisch.

- a) Zeige, dass das Vektorpotential $A(x, t)$ die folgende Form besitzt:

$$\vec{A}(x, t) = \mu_0 I_0 \vec{e}_z e^{-i\omega t} \int_{-d}^d dz' \frac{\sin(kz')}{4\pi r'} e^{ikr'}, \quad (11.1)$$

wo $r' = \|x - x'\|$ mit $\vec{x}' = z'\vec{e}_z$ und $k = \omega/c$ der Wellenvektor ist.

Im Folgenden betrachten wir die Strahlungszone, für die $r \gg 2d = \lambda$ gilt mit $r = \|x\|$. Hier können wir folgende Näherung annehmen:

$$\|x - x'\| = r - \vec{n} \cdot \vec{x}' \quad (11.2)$$

wo \vec{n} ein Einheitsvektor in Richtung \vec{x} ist.

- b) Berechne den exakten Ausdruck für die emittierte Strahlungsleistung je Raumwinkel-element, und zeichne die Winkelverteilung als Funktion des Polarwinkels ϑ auf.

Hinweis: Verwende die folgende Identität für die Berechnung des Vektorpotentials:

$$\int dx \sin(ax) e^{-ibx} = \frac{e^{-ibx}}{b^2 - a^2} (a \cos(ax) + ib \sin(ax)). \quad (11.3)$$

- c) Betrachte nun die Multipolentwicklung des Vektorpotentials,

$$e^{ik\vec{n} \cdot \vec{x}'} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} (\vec{n} \cdot \vec{x}')^m \quad (11.4)$$

und behalte nur die führenden Terme in k . Berechne die Strahlungsleistung je Raumwinkelement in dieser Näherung und zeichne die Winkelverteilung als Funktion von ϑ .

- d) Vergleiche die Ergebnisse in b) und c). Diskutiere die Gültigkeit der Näherung in der Multipolentwicklung.

→

11.2. Dipolstrahlung

Ein dünner, perfekt leitender Draht verbindet zwei kleine Metallkugeln bei $\vec{x} = (0, 0, \pm a)$. Die Ladungsdichte ist

$$\rho(x, t) = Q \delta(x) \delta(y) [\delta(z - a) - \delta(z + a)] \cos(\omega t) \quad (11.5)$$

mit a , Q und ω konstant. Der Strom zwischen den Metallkugeln fließt entlang des Drahtes.

- a) Berechne die Strahlungsleistung je Raumwinkelement im zeitlichen Mittel in Dipolnäherung mithilfe der Formel

$$\left\langle \frac{d^2 P}{d^2 \Omega} \right\rangle = \langle \|\ddot{\vec{p}}\|^2 \rangle \frac{\sin^2 \vartheta}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3}. \quad (11.6)$$

Wann hat die Dipolnäherung Gültigkeit?

- b) Bestimme die Stromdichte $\vec{j}(x', t_{\text{ret}})$ im Draht und berechne daraus das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{x}, t)$. Finde dann die Winkelverteilung der abgestrahlten Leistung $\langle d^2 P / d^2 \Omega \rangle$ im zeitlichen Mittel für einen Beobachter in weiter Entfernung ($\|x\| \gg a$) des Drahtes. Zeige, dass der hergeleitete Ausdruck für $\langle d^2 P / d^2 \Omega \rangle$ unter der Annahme $\lambda \gg a$ in führender Ordnung mit dem in Dipolnäherung erhaltenen Ergebnis aus a) übereinstimmt.

11.3. Energie- und Impulsfluss einer ebenen Welle

Wir betrachten eine monochromatische ebene Welle, die sich in z -Richtung fortpflanzt, in x -Richtung polarisiert ist und die Amplitude E_0 hat.

- a) Berechne den Poynting-Vektor S , und zeige, dass die Intensität I der Welle gegeben ist durch

$$I := \langle \|S\| \rangle = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2. \quad (11.7)$$

- b) Der Maxwell'sche Spannungstensor T ist definiert als

$$T_{ij} := \varepsilon_0 (E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \vec{E}^2) + \frac{1}{\mu_0} (B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \vec{B}^2). \quad (11.8)$$

Berechne T für die gegebene ebene Welle. Was sagt dies über den Impulsfluss aus?

Hinweis: Verwende die reelle Darstellung der ebenen Welle.

- c) Wie sind Impulsflussdichte und Energieflussdichte in diesem Fall verknüpft?

12.1. Optik gemäss dem Prinzip der kleinsten Wirkung

Das Fermatsche Prinzip besagt, dass Licht, welches sich zwischen zwei Raumpunkten \vec{x}_1 und \vec{x}_2 bewegt, den Pfad wählt, der die optische Weglänge minimiert. Letztere ist gegeben durch

$$S = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} n(\vec{x}) dl, \quad (12.1)$$

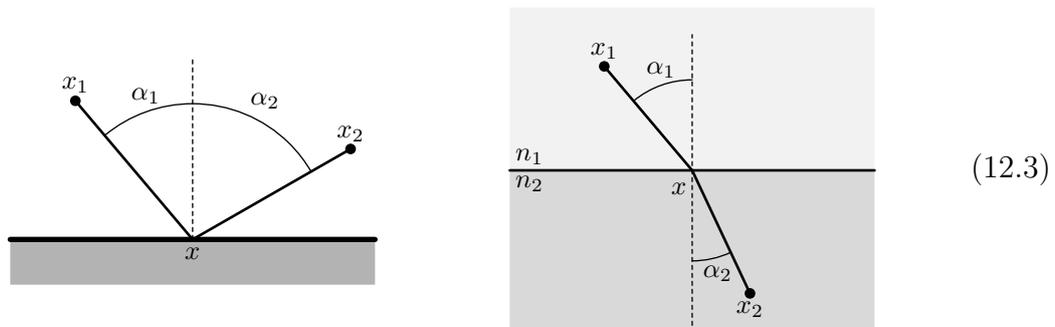
wobei $n(\vec{x})$ den Brechungsindex des Mediums bezeichnet und $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ die Länge des infinitesimalen Teilstückes $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ die Länge des infinitesimalen Teilstückes der Trajektorie, die \vec{x}_1 mit \vec{x}_2 verbindet, ist. Dies kann direkt als das Prinzip der kleinsten Wirkung interpretiert werden.

Hinweis: Es empfiehlt sich, die Trajektorie für das Integral mit einer Variablen t zu parametrisieren

$$S = \int_{t_1}^{t_2} n(\vec{x}(t)) \frac{dl}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} n(\vec{x}(t)) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt. \quad (12.2)$$

Da die Wahl von t nicht zu dem Integral beiträgt, kann man t (lokal) mit einer der Koordinaten identifizieren.

- a) Bestimme die Trajektorie eines Lichtstrahles zwischen zwei Raumpunkten in einem homogenen Medium.



- b) Betrachte nun Licht, das von einem ebenen Spiegel reflektiert wird. Der Lichtstrahl bewege sich von \vec{x}_1 im Vakuum zu einem Punkt \vec{x} auf der Oberfläche des Spiegels und von dort wieder im Vakuum zum Punkt \vec{x}_2 . Minimiere die Wirkung über alle möglichen Punkte \vec{x} auf dem Spiegel und vergleiche für den resultierenden Punkt \vec{x} Einfallswinkel und Ausfallswinkel.
- c) Betrachte schliesslich Licht, das sich zwischen zwei Medien mit verschiedenen Brechungsindizes n_1 und n_2 bewegt. Die Begrenzungsfläche zwischen den beiden Medien sei eben. Betrachte einen Lichtweg von Punkt \vec{x}_1 im Medium mit n_1 zu einem Punkt \vec{x}_2 im Medium mit n_2 , der die Begrenzungsfläche an dem Punkt \vec{x} passiert, der die Wirkung minimiert. Bestimme die Beziehung zwischen Einfallswinkel und Ausfallswinkel (Snelliussches Brechungsgesetz).

→

12.2. Brechung von ebenen Wellen

Eine ebene Welle falle senkrecht auf eine ebene Schicht zwischen zwei Medien. Die Brechungsindizes der drei nichtmagnetischen Medien seien n_1 , n_2 und n_3 . Die Dicke der Zwischenschicht sei d , während die anderen beiden Medien jeweils einen Halbraum füllen.

- a) Berechne die Reflektions- und Transmissionskoeffizienten (d.h. den reflektierten bzw. transmittierten Energiestrom bezogen auf den einfallenden Energiestrom).

Hinweis: Die zeitlich gemittelte Energiestromdichte einer komplexen Welle ist gegeben durch

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re}(\vec{E} \times \vec{B}^*). \quad (12.4)$$

- b) Das Medium mit dem Brechungsindex n_1 sei Teil eines optischen Systems (z.B. einer Linse), während das Medium mit Brechungsindex n_3 aus Luft bestehe ($n_3 = 1$). Die Oberfläche des ersten Mediums soll mit einer Schicht (Brechungsindex n_2) versehen werden, so dass bei einer bestimmten Frequenz ω_0 keine reflektierende Welle auftritt. Welche Dicke d und welchen Brechungsindex n_2 muss diese Schicht haben?

12.3. Lichtstreuung

Die klassische Theorie der Lichtstreuung (bekannt als Rayleigh-Theorie) wird verwendet, um die Streuung von Licht an kleinen Molekülen (mit einer im Vergleich zur Wellenlänge λ des einfallenden Lichtes viel kleineren Ausdehnung) zu beschreiben. Hier betrachten wir die elektrischen und magnetischen Felder sowie die Intensität von Licht, das an kleinen Teilchen gestreut wird.

- a) Betrachte zunächst eine ebene monochromatische Lichtwelle, die sich in x -Richtung ausbreitet und in z -Richtung polarisiert ist. Diese Welle wird an einem kleinen polarisierbaren, aber nicht magnetisierbaren Teilchen im Ursprung gestreut. Die einfallende Welle induziert im Teilchen ein Dipolmoment, das zum lokalen Feld proportional ist, $\vec{p}(t) = \alpha \vec{E}(0, t)$, wobei α seine Polarisierbarkeit ist. Bestimme elektrisches und magnetisches Feld der gestreuten Welle an einem Punkt \vec{x} im Fernfeld in Abhängigkeit vom einfallenden Feld E_0 , dem Abstand vom Ursprung r und dem Winkel ϑ zwischen \vec{x} und der z -Achse.

- b) Berechne die Intensität dieser gestreuten Lichtwelle an einem solchen Punkt \vec{x} im Fernfeld des streuenden Teilchens

Hinweis: Verwende den Poynting-Vektor.

- c) Verwende die in der vorigen Aufgabe hergeleitete Wellenlängenabhängigkeit ($\propto 1/\lambda^4$) der Streuwelle, um die blaue Farbe des wolkenlosen Himmels sowie die rote Farbe von Sonnenaufgang und Sonnenuntergang qualitativ zu erklären.

13.1. Strahlung in relativistischer Kreisbewegung

Eine Punktladung q bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit $v \approx c$ auf einer Kreisbahn mit Radius R in der x,z -Ebene. Zur Zeit t' durchläuft sie den Ursprung mit Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} = v\vec{e}_z$ und wird mit $\vec{a} = a\vec{e}_x = (v^2/R)\vec{e}_x$ beschleunigt.

Das elektrische Feld an der Stelle \vec{x} zur Zeit $t = t' + \|\vec{x} - \vec{x}'\|/c$ einer relativistischen Punktladung am Orte \vec{x}' mit Geschwindigkeit \vec{v} und Beschleunigung \vec{a} ist gegeben durch

$$\vec{E}(x, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\|\vec{x} - \vec{x}'\|}{((\vec{x} - \vec{x}') \cdot \vec{w})^3} \left[(1 - \beta^2)\vec{w} + \frac{1}{c^2} (\vec{x} - \vec{x}') \times (\vec{w} \times \vec{a}) \right], \quad (13.1)$$

wobei $\vec{w} := (\vec{x} - \vec{x}')/\|\vec{x} - \vec{x}'\| - \vec{v}/c$ und $\beta := v/c$.

- a) Mithilfe von Kugelkoordinaten und unter Vernachlässigung von Termen in (13.1), die schneller als $1/r$ abfallen, zeige dass das elektrische Feld, welches von einem Beobachter an der Position $\vec{x} = r\vec{e}_r$ mit grosser Distanz r gemessen wird, gegeben ist durch

$$\vec{E}_{\text{rad}}(x, t) = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \frac{(\beta - \cos\vartheta) \cos\varphi \vec{e}_\vartheta + (1 - \beta \cos\vartheta) \sin\varphi \vec{e}_\varphi}{(1 - \beta \cos\vartheta)^3}. \quad (13.2)$$

Für Strahlungsfelder ist \vec{E}_{rad} orthogonal zu $\vec{x} - \vec{x}'$ und der Poynting-Vektor für die Strahlungskomponenten der Felder ist

$$\vec{S}_{\text{rad}} = \frac{1}{\mu_0 c} \vec{E}_{\text{rad}}^2 \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|}. \quad (13.3)$$

- b) Benutze (13.2) und (13.3) um zu zeigen, dass der Poynting-Vektor am Ort des Beobachters gegeben ist durch

$$\vec{S}_{\text{rad}} = \frac{\mu_0 q^2 v^4}{16\pi^2 c r^2 R^2} \frac{(1 - \beta \cos\vartheta)^2 - (1 - \beta^2) \cos^2\varphi \sin^2\vartheta}{(1 - \beta \cos\vartheta)^6} \vec{e}_r. \quad (13.4)$$

- c) Zeige, dass die gesamte ins Unendliche emittierte Strahlungsleistung der Punktladung gegeben ist durch

$$P := \oint d^2\Omega r^2 \vec{e}_r \cdot \vec{S}_{\text{rad}} \frac{\vec{x} \cdot \vec{w}}{r} = \frac{\mu_0 q^2 v^4}{6\pi c R^2 (1 - \beta^2)^2}. \quad (13.5)$$

Man beachte, dass wir die Sphäre, auf der die Strahlung gemessen wird, konzentrisch zum Orbit wählen. Somit kommt es zu Retardierungseffekten, die den Faktor $\vec{x} \cdot \vec{w}/r$ in der obigen Formel erklären.

Hinweis: Folgende Integrale werden benötigt:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1 - \beta x)^3} = \frac{2}{(1 - \beta^2)^2}, \quad \int_{-1}^1 dx \frac{1 - x^2}{(1 - \beta x)^5} = \frac{4}{3(1 - \beta^2)^3}. \quad (13.6)$$

- d) Berechne die ins Unendliche abgestrahlte Energie während eines Kreisumlaufs. Welche Menge Energie wird von einem Elektron ($m_e = 511 \text{ keV}/c^2$) mit $\beta = 0.8$ and $R = 20 \text{ m}$ während eines Kreisumlaufs abgestrahlt? Vergleiche diesen Wert mit der gesamten relativistischen Energie des Teilchens.

→

13.2. Liénard-Wiechert Potential

Betrachte eine Ladung, die sich mit konstanter Geschwindigkeit v geradlinig entlang der positiven z -Achse ausgehend von $z = 0$ bei $t = 0$ bewege. Zeige, dass ihr skalares Potential gegeben ist durch

$$\Phi(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(z - vt)^2 + (1 - v^2/c^2)(x^2 + y^2)}}. \quad (13.7)$$

- a) Berechne das Potential direkt im Bezugssystem des Beobachters.
- b) Berechne das Potential zunächst im Ruhesystem der Ladung und transformiere es dann zurück in das Ruhesystem des Beobachters.

13.3. Luftspiegelung

An warmen Sommertagen lassen sich Reflexionen über aufgeheizten Oberflächen (z.B. Strassen) beobachten. Dieses Phänomen ist eine Konsequenz des mit der Höhe z variierenden Brechungsindex $n(z)$ der Luft. Um diesen Effekt zu modellieren, nehmen wir an, dass n oberhalb einer Höhe z_0 konstant $n_0 > 1$ ist und in den heissen Luftschichten darunter quadratisch mit abnehmender Höhe abnimmt (mit kleinem $a > 0$)

$$n(z) = \begin{cases} n_0 & \text{für } z \geq z_0, \\ n_0 - a(z - z_0)^2 & \text{für } 0 < z < z_0. \end{cases} \quad (13.8)$$

Finde den Pfad γ , welcher den optischen Weg

$$S = \int_{x_1}^{x_2} d\gamma n(\gamma). \quad (13.9)$$

zwischen zwei Endpunkten \vec{x}_1, \vec{x}_2 mit $z_1, z_2 \geq z_0$ minimiert. Nimm an, dass \vec{x}_1, \vec{x}_2 in horizontaler Ebene weit voneinander getrennt liegen, $|x_1 - x_2| \gg z_0$.

Hinweis: Parametrisiere den Pfad als Funktion von x und nimm an, dass $\partial z / \partial x$ vernachlässigbar klein ist.

14.1. Rechteckiger Hohlleiter

Betrachte einen unendlich langen Hohlleiter entlang der z -Achse, der einen rechteckigen Querschnitt $0 < x < d_x$ und $0 < y < d_y$ habe. Die Wände seien ideale Leiter. Aufgrund der Geometrie können wir folgenden Ansatz für die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen machen,

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, y, z, t) &= \operatorname{Re}(\vec{E}_0(x, y) e^{i(kz - \omega t)}), \\ \vec{B}(x, y, z, t) &= \operatorname{Re}(\vec{B}_0(x, y) e^{i(kz - \omega t)}).\end{aligned}\tag{14.1}$$

- a) Die 3D-Vektoren zerfallen in 2D-Vektoren (hier: x - und y -Komponenten) und Skalare (z -Komponente). Leite die Gleichungen für die x - und y -Komponenten von \vec{E}_0 und \vec{B}_0 in Abhängigkeit ihrer z -Komponenten aus den Maxwell-Gleichungen her und zeige, dass die folgenden Gleichungen gelten,

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2 \right] E_z &= 0, \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2 \right] B_z &= 0.\end{aligned}\tag{14.2}$$

- b) Drücke die Randbedingungen $E_{\parallel} = B_{\perp} = 0$ als Bedingungen an die z -Komponenten der Felder aus.
- c) Bestimme die Lösungen für sogenannte transversal-magnetische Wellen (TM-Wellen), für die $B_z = 0$ gilt.
- d) Zeige, dass es im idealen Hohlleiter keine transversal-elektromagnetischen (TEM) Wellen (d.h. Wellen mit $E_z = B_z = 0$) gibt.

Hinweis: Benutze den Satz von Gauß und das Faradaysche Gesetz, sowie die Randbedingungen für E_{\parallel} , um zu zeigen, dass es keine TEM-Wellen in diesem Hohlleiter gibt.

14.2. Koaxialer Wellenleiter

Eine elektromagnetische Welle propagiert entlang der z -Richtung zwischen zwei koaxialen, zylindrischen Leitern mit Radien $r_2 > r_1$ um die z -Achse.

- a) Zeige dass es möglich ist TEM-Moden zu haben und finde solch eine Lösung explizit.
- b) Ist die Frequenz für diese Mode beschränkt? Wie lautet die Dispersionsrelation?
- c) Berechne die durchschnittliche Leistung, die entlang der Zylinder Achse transportiert wird.

