

Allgemeine Mechanik

Übungsblätter

ETH Zürich, 2020 HS

PROF. N. BEISERT, DR. M. SCHIAVINA

© 2017–2020 Niklas Beisert, ETH Zürich.

Dieses Dokument sowie seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Reproduktion eines Teils dieses Werks in beliebiger Form ohne vorgängige schriftliche Erlaubnis der ETH Zürich ist nur zum privaten, wissenschaftlichen und nicht-gewerblichen Gebrauch gestattet.

Die aktuelle Version dieses Werks befindet sich unter:
<http://people.phys.ethz.ch/~nbeisert/lectures/>.

Inhaltsverzeichnis

Übungsblatt 1	1.1
1.1. Kreuzprodukt	1.1
1.2. Atwood-Maschine	1.2
1.3. Freies Teilchen in Kugelkoordinaten	1.2
1.4. Abheben von einer Kugel	1.2
Übungsblatt 2	2.1
2.1. Galilei-Gruppe	2.1
2.2. Galilei-Invarianz	2.1
2.3. Erhaltungsgrößen im Zentralpotential	2.1
2.4. Abrutschendes Seil	2.2
Übungsblatt 3	3.1
3.1. Das Foucaultsche Pendel	3.1
3.2. Raketentechnik	3.1
3.3. Rotierende Scheibe mit Ball	3.2
3.4. Gezeitenkräfte und Äquivalenzprinzip	3.2
Übungsblatt 4	4.1
4.1. Hohmann-Transfer	4.1
4.2. Zerfall eines Doppelsterns	4.2
4.3. Streuquerschnitt für abstossende Zentralkraft	4.2
Übungsblatt 5	5.1
5.1. Stabilität von kreisförmigen Umlaufbahnen	5.1
5.2. Der Ring-Oszillator	5.1
5.3. Periheldrehung	5.2
Übungsblatt 6	6.1
6.1. Gekoppelte Pendel	6.1
6.2. Bowling	6.1
6.3. Angetriebenes Pendel	6.2
6.4. Treppensteigen	6.2
Übungsblatt 7	7.1
7.1. Atwood-Maschine mit träger Rolle	7.1
7.2. Frei rotierendes Ellipsoid	7.1
7.3. Rollende Münze	7.2
Übungsblatt 8	8.1
8.1. Lorentz-Transformationen	8.1
8.2. Lorentz-Boosts und Kommunikation im Weltraum	8.1
8.3. Rundreise in der Raumzeit	8.2
Übungsblatt 9	9.1
9.1. Relativistischer Doppler-Effekt	9.1
9.2. Relativistischer Doppler-Effekt mittels Energiebetrachtung	9.2
9.3. Relativistische Kinematik	9.2

Übungsblatt 10	10.1
10.1. Atwood-Maschine mittels Lagrange-Formalismus	10.1
10.2. Lagrange-Funktion und Bewegungsgleichungen	10.1
10.3. Rutschende Kette	10.2
10.4. Minimale Rotationsfläche	10.2
Übungsblatt 11	11.1
11.1. Fallendes Seil	11.1
11.2. Teilchen auf Zylinder und Paraboloid	11.2
11.3. Separierbare Systeme	11.2
Übungsblatt 12	12.1
12.1. Galilei-Invarianz und Lagrange-Formalismus	12.1
12.2. Symmetrietransformationen	12.1
12.3. Symmetrie und Laplace-Runge-Lenz-Vektor	12.2
Übungsblatt 13	13.1
13.1. Teilchen auf Fläche im Hamiltonschen Formalismus	13.1
13.2. Poisson-Algebra des Drehimpulses	13.1
13.3. Kanonische Transformationen	13.2
13.4. Harmonischer Oszillator in bewegtem Kasten	13.2
Übungsblatt 14	14.1
14.1. Hamilton-Funktion und Reibungskräfte	14.1
14.2. Zeitabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung	14.1
14.3. Zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung	14.2
14.4. Kanonische Flüsse und erzeugende Funktionen	14.2

1.1. Kreuzprodukt

In dieser Aufgabe betrachten wir einige nützliche Identitäten zum Kreuzprodukt zweier dreidimensionaler Vektoren

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

und zum eng verwandten total antisymmetrischen Tensor ε^{ijk} mit $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, der über folgende Eigenschaften definiert ist

$$\varepsilon^{ijk} = -\varepsilon^{jik} = -\varepsilon^{ikj}, \quad \varepsilon^{123} := +1. \quad (1.2)$$

Hinweis: Die Teilaufgaben können in jeder gewünschten Reihenfolge bearbeitet werden.

- a) Zeige die Identität $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$.
- b) Zeige die Identitäten $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$.
- c) Zeige die Identität $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$.
- d) Zeige, dass das Kreuzprodukt sich unter Rotationen $R \in \text{SO}(3)$ wie ein Vektor verhält,

$$(R\vec{a}) \times (R\vec{b}) = R(\vec{a} \times \vec{b}). \quad (1.3)$$

Wie lautet die Verallgemeinerung der Identität für $R \in \text{O}(3)$?

- e) Wie hängt ε^{ijk} mit ε^{jki} , ε^{kij} und ε^{kji} zusammen?
- f) Bestimme alle nichttrivialen Komponenten des total antisymmetrischen Tensors ε^{ijk} .
- g) Zeige, dass das Kreuzprodukt mit dem total antisymmetrischen Tensor ε^{ijk} verwandt ist über die Beziehung

$$(\vec{a} \times \vec{b})^k = \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon^{ijk} a^i b^j. \quad (1.4)$$

- h) Zeige die Identität $\sum_{m=1}^3 \varepsilon^{ijm} \varepsilon^{klm} = \delta^{ik} \delta^{jl} - \delta^{il} \delta^{jk}$.
- i) Zeige die Identität $\sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon^{ijk} a^i b^j c^k = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.
- j) Zeige die Identität $\sum_{l,m,n=1}^3 \varepsilon^{lmn} M^{li} M^{mj} M^{nk} = \varepsilon^{ijk} \det M$ für eine 3×3 Matrix M .
- k) Bestimme eine 3×3 Matrix Ω zu dem Vektor $\vec{\omega}$, so dass $\vec{\omega} \times \vec{a} = \Omega \vec{a}$ für alle Vektoren \vec{a} . Welche Eigenschaft hat die Matrix Ω ?

→

1.2. Atwood-Maschine

Die Atwood-Maschine besteht aus zwei unterschiedlichen Massen m_1 und m_2 , welche mit einem Seil der Länge l verbunden und über eine Rolle aufgehängt sind.



- Welche beiden Kräfte wirken jede der Massen? Welche Kräfte wirken an der Rolle?
- Schreibe die Bewegungsgleichung für die Position(en) der Massen auf.
- Kannst du diese Gleichung benutzen, um die Gravitationskonstante g zu bestimmen? Wie kannst du die Messung besonders genau machen?

1.3. Freies Teilchen in Kugelkoordinaten

Bestimme die Bewegungsgleichungen eines freien Teilchens in Kugelkoordinaten

$$\vec{x} = (r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \sin \varphi, r \cos \vartheta). \quad (1.6)$$

Für den Fall, dass zusätzlich eine physikalische Kraft \vec{F} auf das Teilchen mit Masse m wirkt, zeige, dass die radiale Komponente der Beschleunigung gegeben ist durch

$$\ddot{r} = r\dot{\vartheta}^2 + r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + F_r/m. \quad (1.7)$$

1.4. Abheben von einer Kugel

Ein Massenpunkt befindet sich exakt auf dem Nordpol einer Kugel in einem homogenen vertikalen Schwerfeld mit Beschleunigung g . Der Massenpunkt ist also in einem instabilen Gleichgewicht, aus welchem er durch einen vernachlässigbar kleinen Stoss geworfen wird. Er gleitet daraufhin reibungsfrei die Kugeloberfläche hinunter. Unter welchem Winkel ϑ hebt der Massenpunkt von der Kugeloberfläche ab?



Hinweis: Die Geschwindigkeit des Massenpunkts als Funktion des Winkels kann man mittels der Erhaltung der Gesamtenergie bestimmen. Alternativ kann man die Bewegungsgleichung für $\vartheta(t)$ mit $\dot{\vartheta}$ multiplizieren und über die Zeit integrieren.

2.1. Galilei-Gruppe

Zeige, dass die Galilei-Transformationen

$$(t, \vec{x}) \mapsto (t', \vec{x}') = (\lambda t + a, R\vec{x} + \vec{v}t + \vec{b}), \quad (2.1)$$

wobei $R \in O(3)$, $\vec{v}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, $a \in \mathbb{R}$ und $\lambda = \pm 1$ seien, eine Gruppe bilden.

2.2. Galilei-Invarianz

Wir betrachten ein mechanisches System von n Massepunkten im \mathbb{R}^3 , das durch das folgende, Galilei-invariante Kraftgesetz beschrieben wird:

$$m_k \ddot{\vec{x}}_k = - \frac{\partial}{\partial \vec{x}_k} V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n). \quad (2.2)$$

- Betrachte den Fall zweier Massepunkte ($n = 2$), die zunächst in Ruhe seien. Zeige, dass die Bewegung der beiden Punkte in der Geraden verläuft, die die beiden Anfangspunkte verbindet.
- Formuliere und beweise ein analoges Ergebnis für den Fall von drei Massepunkten ($n = 3$), die zunächst in Ruhe seien.
- Zeige, dass es für zwei Massepunkte, die sich anfangs nicht notwendigerweise in Ruhe befinden, ein Inertialsystem gibt, in dem die Bewegung in einer Ebene verläuft.

2.3. Erhaltungsgrößen im Zentralpotential

Wir betrachten ein Teilchen in einem Zentralpotential, d.h. das Potential V hängt nur vom Abstand $r = \|\vec{x}\|$ zum Ursprung ab. Die Bewegungsgleichung lautet damit

$$m \ddot{\vec{x}} = - \frac{\partial}{\partial \vec{x}} V(\vec{x}) = - \frac{\vec{x}}{r} \frac{dV(r)}{dr}. \quad (2.3)$$

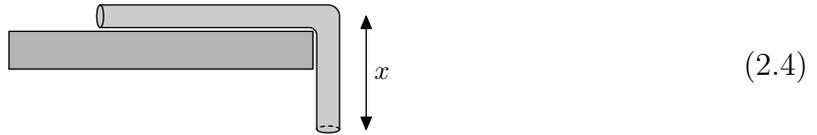
- Überzeuge dich zunächst davon, dass der Drehimpuls $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$ in diesem Fall eine Erhaltungsgröße ist.
- Wir verlangen nun, dass auch der Laplace-Runge-Lenz-Vektor $\vec{A} = \dot{\vec{x}} \times \vec{L} + V(r) \vec{x}$ eine Erhaltungsgröße sei. Welche zusätzliche Einschränkung an die r -Abhängigkeit des Potentials muss dann gestellt werden?

Hinweis: Zur Betrachtung der Differentialgleichung eignet sich die Methode der Separation der Variablen. Alternativ lässt sich ein Ansatz der Form $V(r) \sim e^{\lambda r} r^\alpha$ verwenden.

→

2.4. Abrutschendes Seil

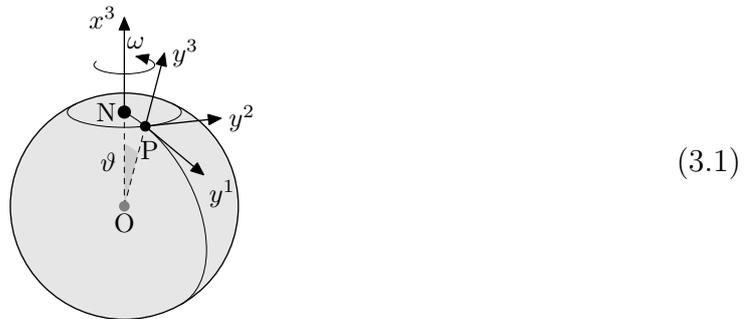
Wir betrachten ein Seil der Masse m und Länge l , das über die Kante eines Tisches hängt. Dabei wirke die Gravitation in Richtung x und wir vernachlässigen die Reibung zwischen Seil und Unterlage.



- a) Bestimme und löse die Bewegungsgleichung für das Ende des Seils unter der folgenden Anfangsbedingung: Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei das Seil in Ruhe und es hänge bereits das Stück x_0 herab.
- b) Welche Geschwindigkeit hat das Seil, wenn es den Unterlage gerade verlässt?

3.1. Das Foucaultsche Pendel

Wir betrachten ein Pendel mit Fadenlänge l an einem Punkt P auf der Erde mit Breitengrad $\frac{1}{2}\pi - \vartheta$ wie in der Abbildung. Wir verwenden ein mitrotiertes Koordinatensystem mit Koordinaten y^1, y^2, y^3 und Ursprung am Punkt P , in dem auch die Ruheposition des Pendels liegt. Die Erde rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Achse x^3 .



- a) Zeige, dass die Bewegungsgleichungen für kleine Auslenkungen $\vec{y} = (y^1, y^2)$ des Massenpunktes am Ende des Pendels zu führender Ordnung in $\omega \ll \sqrt{g/l}$ wie folgt geschrieben werden können:

$$\ddot{\vec{y}} = -\frac{g}{l}\vec{y} + 2\omega \cos \vartheta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dot{\vec{y}}. \quad (3.2)$$

- b) Bestimme die Periode T des Pendels, wobei $T/2$ als die Zeit zwischen zwei Nulldurchgängen von $\dot{\vec{y}}$ definiert sei. Bestimme weiterhin die Präzessionsperiode τ , d.h. die Zeit die erforderlich ist, bis sich die Schwingungsebene des Pendels vollständig gedreht hat.

Hinweis: Zur Lösung der Differentialgleichung bietet es sich an, die komplexe Funktion $z(t) = y^1(t) + iy^2(t)$ zu betrachten.

3.2. Raketentechnik

Raketen werden durch den Impuls der ausgestossenen Gase angetrieben, die mit einer Geschwindigkeit v_g aus der Rakete austreten. Da diese Gase Reaktionsprodukte des Treibstoffes sind, ist die Masse der Rakete nicht konstant, sondern nimmt im selben Mass ab, wie der Treibstoff verbraucht wird.

- a) Wir betrachten nun eine Rakete, die in einem homogenen Gravitationsfeld (bei vernachlässigtem Luftwiderstand) senkrecht nach oben geschossen wird. Stelle eine Gleichung für die Beschleunigung $a(t) = \dot{v}(t)$ auf, um die Bewegung der Rakete zu beschreiben.
- b) Die Nutzlast der Rakete hat die Masse m_0 und die Rakete führt zu Beginn Treibstoff der zusätzlichen Masse m_1 mit. Dieser soll gleichmässig verbrannt werden und nach einer Zeit τ aufgebraucht sein. Finde die Geschwindigkeit $v(t)$ für die Beschleunigungsphase $0 < t < \tau$.
- c) Formuliere eine Bedingung dafür, dass die Rakete abhebt. Auf welcher Höhe ist der Treibstoff aufgebraucht? Welche Höhe erreicht die Rakete insgesamt?

→

3.3. Rotierende Scheibe mit Ball

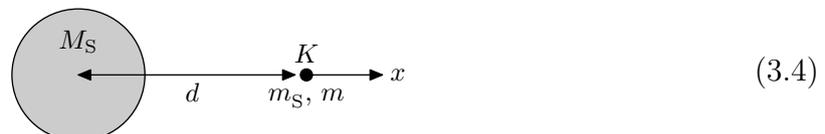
Wir betrachten eine Scheibe vom Radius R , die mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω in einem Inertialsystem K rotiert. Zur Zeit $t = 0$ schießen wir einen Ball der Masse m aus dem Mittelpunkt der Scheibe durch ein Rohr nach aussen. Dabei nehmen wir an, dass die Reibung zwischen Rohr und Ball gerade so ist, dass die Geschwindigkeit des Balls im mitrotierten System K' konstant ist. Dies erfordert einen sehr speziellen Aufbau. Wir wollen hierbei herausfinden, welche Kräfte dafür wirken müssen. Wir ignorieren die Gravitationskräfte.



- a) Gebe die realen und Scheinkräfte an, die auf den Ball im System K' wirken und löse die Bewegungsgleichungen. Welche Kräfte wirken in K ?
- b) Leite die Trajektorie des Balls im System K her.

3.4. Gezeitenkräfte und Äquivalenzprinzip

Wir betrachten ein Teilchen mit träger Masse m und schwerer Masse m_S , das sich im Gravitationsfeld eines Planeten mit schwerer Masse M_S bewegt. Wir nehmen an, dass $M_S \gg m_S$, sodass wir näherungsweise die Bewegung des Teilchens im stationären Potential des Planeten betrachten. Zur Zeit $t = 0$ befindet sich das Teilchen in einem Abstand d vom Mittelpunkt des Planeten. Wir betrachten zunächst das System K , das durch eine konstante Verschiebung mit dem stationären System des Planeten verbunden ist. Diese ist so gewählt, dass sich das Teilchen zur Zeit $t = 0$ bei $x = 0$ befindet.



- a) Schreibe das zweite Newtonsche Gesetz für das Teilchen in K . Entwickle die Gravitationskraft um $x = 0$, um folgende Gleichung zu erhalten:

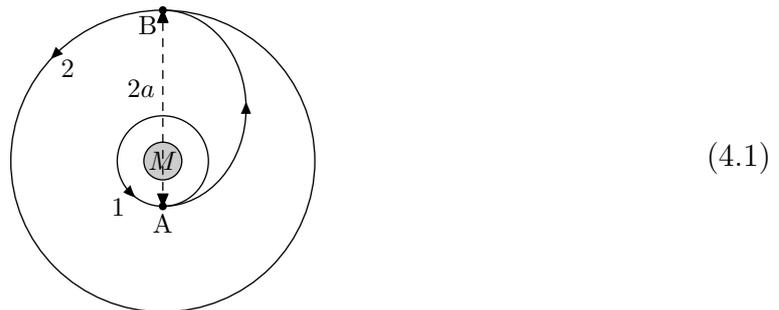
$$\ddot{x} = -\frac{m_S}{m} GM_S \left(\frac{1}{d^2} - \frac{2x}{d^3} + \dots \right). \quad (3.5)$$

Wann ist es eine gute Näherung, nur die ersten beiden Terme zu behalten? Wie sind diese zu interpretieren? Wie hängt das Problem von den physikalischen Eigenschaften des Teilchens ab, wenn das schwache Äquivalenzprinzip $m_S = m$ gilt?

- b) Im Folgenden behalten wir nur die ersten zwei Terme und *nehmen an*, dass $m_S = m$ gilt. Zeige, dass der erste Term in (3.5) in einem geeigneten, in K gleichmässig beschleunigten System K' verschwindet. Interpretiere erneut die Terme, die im zweiten Newtonschen Gesetz erscheinen. Wann lässt sich der hier entstandene zeitabhängige Term vernachlässigen?
- c) Vernachlässige nun den zeitabhängigen Teil der in Teil b) gefundenen Lösung. Wir betrachten nun zwei zusätzliche, frei fallende Teilchen in K , deren Anfangspositionen $x(0) = \pm\delta$ seien und die sich zur Zeit $t = 0$ in Ruhe befinden. Berechne den Abstand der beiden Teilchen als Funktion der Zeit.

4.1. Hohmann-Transfer

Wir betrachten den nach Walter Hohmann benannten Hohmann-Transfer eines Satelliten der Masse m_2 zwischen zwei kreisförmigen Bahnen mit Radien r_1 und r_2 um einen Himmelskörper der Masse m_1 . Um aus der ersten Bahn in die zweite zu gelangen, benutzen wir den Raketenantrieb für zwei Kraftstöße an den Punkten A und B (siehe Abbildung). Ein Kraftstoss bedeutet hier eine instantane Veränderung des Impulses. Zwischen den Punkten A und B folgen wir einer elliptischen Bahn mit grosser Halbachse a .



Hinweis: Verwende das Schwerpunktsystem für diese Aufgabe.

- a) Was sind die Anfangs- und Endgeschwindigkeiten des Satelliten? Was sind die Geschwindigkeiten bei den Punkten A und B in der elliptischen Bahn und wie muss der Satellit seine Geschwindigkeit ändern, um den Übergang zwischen den Bahnen zu erreichen?
- b) Wie viel Zeit braucht es für diesen Transfer?
- c) Verwende den Hohmann-Transfer, um die Reise von der Erde zum Mars näherungsweise zu beschreiben. Berechne die benötigte Zeit, und vergleiche dein Ergebnis mit den NASA-Missionen Viking 1 (1976) und Curiosity (2012). Stimmen die Ergebnisse überein? Wieso (nicht)?

→

4.2. Zerfall eines Doppelsterns

Zwei Sterne der Massen m_1 und m_2 bewegen sich auf kreisförmigen Umlaufbahnen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt. Der zweite Stern explodiert auf sphärisch symmetrische Weise und lässt dabei die Masse m'_2 zurück. Die ausgestossene Masse $\Delta m_2 = m_2 - m'_2$ verlässt den Doppelstern unverzüglich und ohne auf den ersten Stern zu stossen.

- Was ist die Gesamtenergie $E = T_{\text{kin}} + V$ des Doppelsterns vor der Explosion? Zeige, dass $V = -2T_{\text{kin}}$.
- Schreibe die kinetische Energie T_{kin} vor der Explosion im Schwerpunktsystem als Funktion der Differenz der Geschwindigkeiten $\dot{\vec{x}}_1 - \dot{\vec{x}}_2$.
- Unter welcher allgemeinen Bedingung ist ein solches System gebunden? Zeige, dass dieses System nach der Explosion gebunden bleibt, falls

$$\Delta m_2 < \frac{1}{2}(m_1 + m_2). \quad (4.2)$$

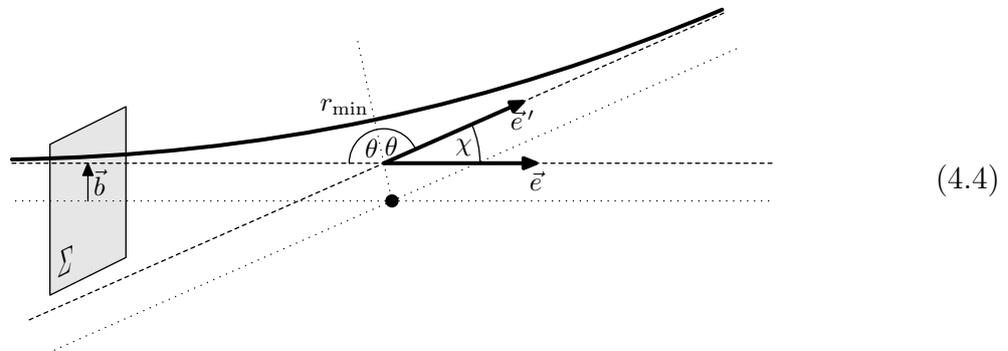
Gebe ein Beispiel von Massen m_1 , m_2 , und Δm_2 , sodass der Doppelstern nach der Explosion nicht mehr gebunden ist.

4.3. Streuquerschnitt für abstossende Zentralkraft

Betrachte die Streuung eines Teilchens der Energie $E > 0$ in einem abstossenden Zentralkraftfeld

$$\vec{F}(\vec{x}) = \frac{C}{\|\vec{x}\|^4} \vec{x}, \quad (4.3)$$

wobei C eine Konstante ist.



- Berechne den Streuwinkel $\chi = \pi - 2\theta$ als Funktion des Stossparameters b .
Hinweis: Verwende eine Substitution, um das Integral in die folgenden Form zu bringen:

$$\int_0^\infty \frac{du}{\cosh u} = \frac{\pi}{2}. \quad (4.5)$$

Du kannst auch versuchen, dieses Integral selbst auszurechnen. Lässt sich die Berechnung des Integrals ganz umgehen?

- Leite daraus den differentiellen Streuquerschnitt her:

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega} = \frac{\pi^2 C}{2E} \frac{\pi - \chi}{\chi^2 (2\pi - \chi)^2 \sin \chi}. \quad (4.6)$$

Hinweis: $x(2-x) = 1 - (1-x)^2$.

5.1. Stabilität von kreisförmigen Umlaufbahnen

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m , das durch eine Zentralkraft mit Potential $V(r)$ auf einer kreisförmigen Umlaufbahn gehalten wird. Wir betrachten kleine Abweichungen von der kreisförmigen Umlaufbahn, die auf Schwingungen um den Gleichgewichtsabstand führen. Dabei wollen wir uns auf solche Abweichungen beschränken, die in der gleichen Ebene wie die kreisförmige Bahn liegen und den gleichen Drehimpuls haben.

- a) Wir betrachten Störungen erster Ordnung um die kreisförmige Umlaufbahn,

$$r(t) = r_0 + \epsilon \rho(t) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad \varphi(t) = \omega t + \epsilon \theta(t) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (5.1)$$

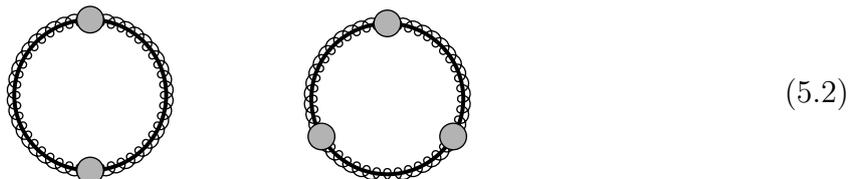
wobei r_0 den Radius der kreisförmigen Umlaufbahn bezeichnet, ω die Kreisfrequenz dieser Umlaufbahn ist und $\epsilon \ll 1$ die Störung parametrisiert. Bestimme die Bewegungsgleichung für die Funktionen $\rho(t)$ und $\theta(t)$ aus der ersten Ordnung der Entwicklung in ϵ .

- b) Das Potential sei nun von der Form $V(r) = -k r^{-\alpha+1}$. Zeige, dass stabile Schwingungen auftreten, falls $\alpha < 3$ ist.

Hinweis: Leite eine Beziehung zwischen ω^2 und $V'(r_0)$ her.

5.2. Der Ring-Oszillator

Wir betrachten den Fall von n identischen Massen, die durch entsprechend viele identische Federn verbunden sind. Dabei sind sowohl die Massen als auch die Federn gezwungen, sich entlang einer Kreisbahn zu bewegen, siehe Abbildung. Finde die Eigenschwingungen des Systems für die Fälle $n = 2$ und $n = 3$.



→

5.3. Periheldrehung

Die Lösung des Zweikörperproblems in der Newtonschen Mechanik besagt, dass sich die Planeten entlang ortsfester Ellipsen um die Sonne bewegen. In der Beobachtung der Bahn des Merkur stellt man allerdings fest, dass sich der sonnennächste Punkt, das Perihel, seiner Bahn langsam um die Sonne dreht. Der beobachtete Wert für diese Drehung beträgt 574.10 ± 0.65 Bogensekunden in 100 Jahren. Die Periheldrehung ist überwiegend auf den Einfluss der anderen Planeten zurückzuführen, aufgrund dessen man eine Periheldrehung von 531.63 ± 0.69 Bogensekunden in 100 Jahren erwartet. Die Diskrepanz zum beobachteten Wert wurde 1915 durch Albert Einstein mithilfe der allgemeinen Relativitätstheorie erklärt. Diesen ersten empirischen Test der allgemeinen Relativitätstheorie wollen wir in dieser Aufgabe nachvollziehen.

Die allgemeine Relativitätstheorie bedingt eine Korrektur des Gravitationspotentials,

$$V(r) = -\frac{g\mu}{r} + \frac{\alpha}{r^3}, \quad (5.3)$$

wobei wir $\alpha = -g\mu^2 c^{-2}$ als kleinen Störparameter auffassen, in dem wir im Folgenden entwickeln werden.

- a) In dieser Aufgabe arbeiten wir mit der Bahnkurve $r(\varphi)$. Dabei erweist es sich als hilfreich, den Parameter $u = r^{-1}$ einzuführen. Schreibe dafür zunächst die Gleichung

$$\frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) = E - V(r) \quad (5.4)$$

unter Ausnutzung der Beziehung $\dot{\varphi} = lr^{-2}$ als Gleichung für $u(\varphi)$ und $u'(\varphi)$. Leite nun die erhaltene Gleichung nach φ ab, um folgende Gleichung zu erhalten

$$\mu l^2 (u'' + u) = -\tilde{V}'(u), \quad \tilde{V}(u) := V(u^{-1}). \quad (5.5)$$

- b) Aus der Vorlesung wissen wir, dass die oben hergeleitete Gleichung für $\alpha = 0$ durch die Ellipse gelöst wird

$$u_0(\varphi) = gl^{-2}(1 + \varepsilon \cos \varphi). \quad (5.6)$$

Wir betrachten nun die Entwicklung $u = u_0 + \alpha v + \mathcal{O}(\alpha^2)$ um die Ellipsenbahn. Verwende Gleichung (5.5) um folgende Gleichung für $v(\varphi)$ herzuleiten

$$v''(\varphi) + v(\varphi) = -3g^2 \mu^{-1} l^{-6} (1 + 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2 \cos^2 \varphi). \quad (5.7)$$

Das erste Perihel liege bei $\varphi = 0$ und wir verwenden die Anfangsbedingungen $u(0) = u_0(0)$ und $u'(0) = 0$. Bestimme daraus Anfangsbedingungen für $v(\varphi)$ und löse die obige Gleichung für diese Anfangsbedingungen.

Hinweis: Zeige zunächst das für eine beliebige Inhomogenität $b(\varphi)$, die Funktion

$$v(\varphi) = \int_0^\varphi d\psi b(\psi) \sin(\varphi - \psi) \quad (5.8)$$

eine Lösung der DGL $v''(\varphi) + v(\varphi) = b(\varphi)$ ist.

- c) Wir bestimmen die Periheldrehung pro Umlauf aus der Bedingung $u'(2\pi + \Delta\varphi) = 0$. Hierbei gehen wir davon aus, dass $\Delta\varphi$ von der Ordnung α ist. Nutze die soeben hergeleitete Lösung $v(\varphi)$, um herzuleiten, dass gilt

$$\Delta\varphi = 6\pi g^2 l^{-2} c^{-2}. \quad (5.9)$$

6.1. Gekoppelte Pendel

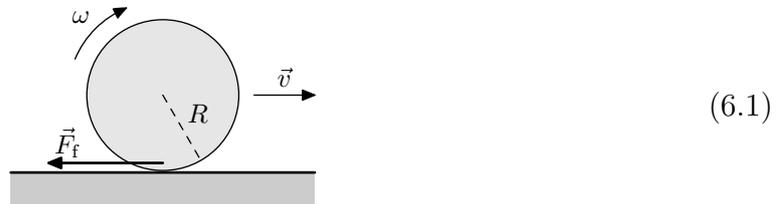
Wir betrachten ein System aus zwei identischen Pendeln der Länge $l_1 = l_2 = l$ mit Massen $m_1 = m_2 = m$ im homogenen Schwerfeld mit Beschleunigung g . Die Pendel bewegen sich beide in einer Ebene, und der (kleine) Auslenkungswinkel der Pendel relativ zur Vertikalen wird mit θ_1 und θ_2 bezeichnet. Weiterhin sind die Pendel durch eine masselose Feder gekoppelt, deren Länge gleich dem Abstand der Aufhängepunkte ist. Wir definieren $\omega_g^2 = g/l$ und $\omega_s^2 = k/m$.

- Stelle die Bewegungsgleichungen für θ_1, θ_2 auf und finde die beiden Eigenschwingungen des Systems.
- Zur Zeit $t = 0$ seien die Pendel in Ruhe. Dann wird eines der beiden Pendel mit der Geschwindigkeit $l\dot{\theta}_1 = v$ angestoßen. Zeige, dass sich das erste Pendel nach einer gewissen Zeit T , die bestimmt werden soll, beinahe in Ruhe befindet. Hierbei nehmen wir an, dass $\omega_s \ll \omega_g$ gilt.

Hinweis: $\sin a + \sin b = 2 \cos \frac{1}{2}(a - b) \sin \frac{1}{2}(a + b)$.

6.2. Bowling

Wir betrachten eine Scheibe mit Trägheitsmoment $I = \beta m R^2$ auf einer horizontalen Ebene mit Reibung. Die Scheibe gleitet zunächst ohne zu rollen, d.h. die Geschwindigkeit der Schwerpunktsbewegung ist v_0 und die Winkelgeschwindigkeit um den Schwerpunkt ist Null. Die Scheibe wird nun durch die Reibung mit dem Untergrund in Drehung versetzt, bis sie schliesslich abrollt.



- Finde die Geschwindigkeit der Schwerpunktsbewegung der Scheibe, wenn sie begonnen hat abzurollen, also nicht mehr gleitet.
Hinweis: Es ist nicht notwendig, die genaue Form der Reibungskraft zu kennen.
- Betrachte den Kontaktpunkt P zwischen Scheibe und Untergrund. Was lässt sich über das Drehmoment der Scheibe um den Punkt P aussagen? Verwende dein Ergebnis, um das Ergebnis aus Teil a) erneut herzuleiten.
- Wieviel kinetische Energie geht durch das Rutschen verloren?
- Wir gehen nun davon aus, dass die Reibungskraft durch $|F_f| = \mu m g$ gegeben ist. Finde den den Zeitpunkt t und Abstand d , an dem die Scheibe anfängt abzurollen.
- Zeige, dass die durch die Reibung geleistete Arbeit der beim Rutschen verlorenen Energie entspricht, die in Teil c) gefunden wurde.
Hinweis: Die Multiplikation der Reibungskraft mit der in Teil d) gefundenen Distanz führt nicht auf dieses Ergebnis. Wieso nicht? Welche Distanz sollte man stattdessen betrachten?

→

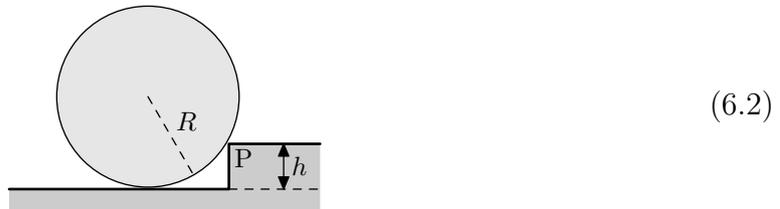
6.3. Angetriebenes Pendel

Wir betrachten ein Kind auf einer Schaukel der Länge l . Es startet mit einem Auslenkungswinkel θ_0 relativ zur Vertikalen. Sein Vater schiebt es entlang seiner Bewegung mit einer konstanten Kraft $F = \gamma mg$ an. Wir beschreiben die Situation näherungsweise durch eine punktförmige Masse m und die Schaukel durch ein masseloses Seil der Länge l .

- Wie gross ist der relative Fehler bei Verwendung der Kleinwinkelnäherung $\sin \theta \approx \theta$ bis hin zu einem Auslenkungswinkel von $\theta = 30^\circ = \pi/6$?
- Wie viel Zeit vergeht, bis das Kind den Winkel $\theta = 0$ erreicht? Welche Geschwindigkeit hat es dann?

6.4. Treppensteigen *Optional:*

Ein Ball mit Radius r und Trägheitsmoment $I = \frac{2}{5} mR^2$ rollt ohne zu rutschen auf dem Untergrund. Die anfängliche Geschwindigkeit seiner Schwerpunktsbewegung ist v_0 . Der Ball trifft dann auf eine Stufe der Höhe $h < R$.



Wir nehmen nun an, dass der Stoss zwischen Stufe und Ball inelastisch und instantan ist. Weiterhin nehmen wir an, dass der Punkt P des Balls, der die Stufe getroffen hat, unmittelbar nach dem Stoss in Ruhe ist und der Ball lediglich um diesen Punkt rotiert.

- Finde die Winkelgeschwindigkeit ω' , mit der der Ball um den Punkt P rotiert.
Hinweis: Die Energie ist beim inelastischen Stoss nicht erhalten. Welche Grösse ist hier stattdessen erhalten und wieso? Beachte, dass der instantane Impulsübertrag durch den Stoss vom Punkt P wegzeigt.
- Kann der Ball nach dem Stoss über die Stufe hinwegrollen? Nimm an, dass der Ball an der Kante der Stufe klebt und dass seine Rotation um den Punkt P in einer Aufwärtsbewegung resultiert. Wie gross muss v_0 wenigstens sein, damit der Ball über die Stufe rollen kann?
Hinweis: Finde eine geeignete Erhaltungsgrösse.
- Unter welcher Bedingung hebt der Ball durch den Stoss ab?

Hinweis: Der Krümmungsradius einer ebenen Kurve $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ ist gegeben durch

$$r = \left| \frac{(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)^{3/2}}{\dot{x}_1 \ddot{x}_2 - \dot{x}_2 \ddot{x}_1} \right|. \quad (6.3)$$

7.1. Atwood-Maschine mit träger Rolle

Wir werfen einen zweiten Blick auf Aufgabe 1.2 und berücksichtigen dabei das Trägheitsmoment der Rolle. Als Erinnerung, die Atwood-Maschine besteht aus zwei unterschiedlichen Massen m_1 und m_2 , welche mit einem Seil der Länge l verbunden und über eine Rolle aufgehängt sind. Die Rolle hat die Form eines homogenen Zylinders von Radius R , Dicke d und Masse m_P .

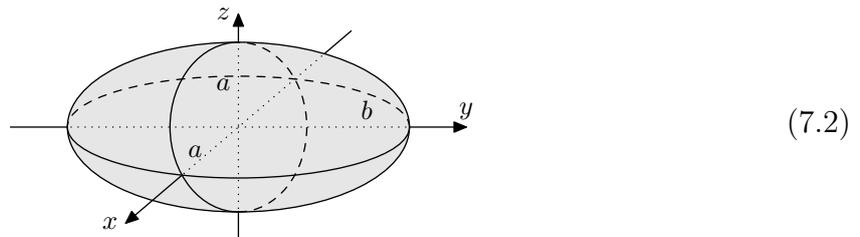
- a) Berechne das relevante Trägheitsmoment I der Rolle. Bestimme daraus den Drehimpuls L der Rolle in Abhängigkeit der Geschwindigkeit v der Massen und zeige, dass $L = \frac{1}{2} m_P R v$.
- b) Schreibe die Bewegungsgleichung für die Position(en) der Massen auf.
- c) Löse die Bewegungsgleichungen und zeige, dass

$$x_1(t) = \frac{(m_1 - m_2)gt^2}{2(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_P)}. \tag{7.1}$$

- d) Bestimme die potentielle Energie V , die kinetische Energie T_{lin} der Massen sowie die Rotationsenergie T_{rot} der Rolle als Funktionen der Zeit t . Verifiziere, dass die Gesamtenergie erhalten ist. Wie gross ist das Verhältnis $T_{\text{rot}}/T_{\text{lin}}$?

7.2. Frei rotierendes Ellipsoid

Wir betrachten ein Ellipsoid mit Hauptachsen a, b, a . Es hat eine gleichmässige Massendichte ρ und Gesamtmasse m und rotiert frei im einem Inertialensystem.



- a) Bestimme den Trägheitstensor und zeige, dass er die folgende Form hat:

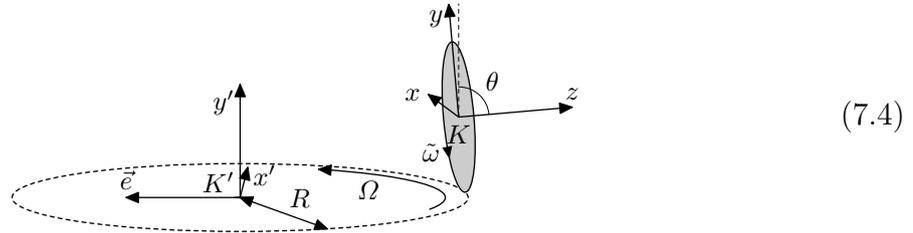
$$I = \frac{1}{5}m \text{diag}(a^2 + b^2, 2a^2, a^2 + b^2). \tag{7.3}$$

- b) Was sind die Erhaltungsgrössen im Inertialsystem? Was implizieren sie für die Werte, die der Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ annehmen kann?
- c) Löse die Eulerschen Gleichungen für allgemeine Anfangsbedingungen für $\vec{\omega}$. Was ist die Frequenz der Präzession?

→

7.3. Rollende Münze

Wir betrachten eine dünne Münze vom Radius r mit gleichmässiger Massenverteilung und Gesamtmasse m , die auf einem Kreis vom Radius R abrollt ohne zu rutschen. Die Münze rollt mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω entlang des Kreises und steht dabei in einem konstanten Winkel θ zum Boden, wie in der Abbildung gezeigt.



Wir führen ein beschleunigtes Bezugssystem K ein, welches im Schwerpunkt der Münze zentriert ist, dessen z -Achse mit der Symmetrieachse der Münze übereinstimmt und dessen y -Achse grösstenteils nach oben zeigt. Zusätzlich sei das Inertialsystem K' im Zentrum des Kreises fixiert so dass die y' -Achse mit der Symmetrieachse des Kreises übereinstimmt.

- Welche Kräfte wirken auf die Münze im Inertialsystem K' und wie lautet die Beziehung zwischen Ω und der Winkelgeschwindigkeit $\tilde{\omega}$ der Münze um ihre Symmetrieachse? Drücke $\tilde{\omega}$ im beschleunigten Bezugssystem K durch die Grössen R, r, θ, Ω aus.
- Bestimme die Hauptträgheitsmomente der Münze. Schreibe den Drehimpulsvektor \vec{S} im beschleunigten System K und finde die horizontal nach Aussen gerichtete Komponente $\vec{e} \cdot \vec{L}$ im Laborsystem K' , wobei der Einheitsvektor \vec{e} in Richtung des Auflagepunkts der Münze zeigt.
- Welches Drehmoment \vec{M} wirkt auf die Münze im Inertialsystem K' ? Bestimme auch den Betrag des Drehmoments. Drücke Ω durch die Grössen g, R, r, θ aus, indem du die Präzessions-Bedingung $\|\dot{\vec{L}}\| = \Omega \vec{e} \cdot \vec{L}$ verwendest. Zeige, dass $R > \frac{5}{6} r \cos \theta$ gelten muss, damit die Bewegung möglich ist.

8.1. Lorentz-Transformationen

Betrachte die folgende einparametrische Familie von Matrizen $L(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$:

$$L(\theta) = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix}. \quad (8.1)$$

- a) Zeige, dass sie die folgende algebraische Relation erfüllen

$$L(\theta_1) L(\theta_2) = L(\theta_1 + \theta_2), \quad (8.2)$$

und folgere, dass sie eine Gruppe bilden.

Hinweis: Die folgenden Additionstheoreme sind hierfür hilfreich:

$$\begin{aligned} \sinh(x + y) &= \sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x, \\ \cosh(x + y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y. \end{aligned} \quad (8.3)$$

- b) Zeige, dass weiterhin die Minkowski-Metrik $\eta := \text{diag}(-1, +1)$ invariant ist

$$L(\theta)^\top \eta L(\theta) = \eta. \quad (8.4)$$

8.2. Lorentz-Boosts und Kommunikation im Weltraum

In dieser Aufgabe betrachten wir Transformationen zwischen Inertialsystemen.

- a) Ein Inertialsystem bewege sich mit Geschwindigkeit $\vec{v} = (v \cos \varphi, v \sin \varphi, 0)$ relativ zu einem anderen. Zeige, dass die zugehörige Lorentz-Transformation L_φ durch die folgende Matrix dargestellt ist

$$L_\varphi(v) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \cos \varphi & \gamma\beta \sin \varphi & 0 \\ \gamma\beta \cos \varphi & \gamma \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi & (\gamma - 1) \sin \varphi \cos \varphi & 0 \\ \gamma\beta \sin \varphi & (\gamma - 1) \sin \varphi \cos \varphi & \gamma \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.5)$$

Was erhältst du für einen Boost entlang der Diagonalen der x, y -Ebene mit $\varphi = 135^\circ$?

Zwei Raumschiffe A und B starten zum gleichen Zeitpunkt von einer Raumstation mit Geschwindigkeiten \vec{v}_A und \vec{v}_B relativ zur Raumstation. Der im Ruhesystem der Raumstation gemessene Winkel zwischen den Geschwindigkeiten sei φ .

- b) Raumschiff B startet eine Uhr beim Abflug von der Raumstation. Als das Raumschiff von einem Asteroiden getroffen wird, geht die Uhr kaputt und bleibt bei der Zeit t_B stehen. Wie viel Zeit t_A ist im Ruhesystem des Raumschiffs A vom Abflug des Raumschiffs bis zum Kaputtgehen der Uhr vergangen?
- c) Die Rechnung in Teil b) ist unphysikalisch. Warum?
- d) Ein sinnvollerer Vergleich von Zeiten ergibt sich, wenn Raumschiff B seine Zeit durch ein Lichtsignal an A übermittelt, und die Zeiten auf A verglichen werden. Nimm an, dass B zum Zeitpunkt t_B das Signal zuerst zur Raumstation schickt, und diese es ohne Zeitverzögerung an A weiterschickt. Zu welchem Zeitpunkt $t_{A, \text{signal}}$ erreicht das Signal das Raumschiff A ?

→

8.3. Rundreise in der Raumzeit

Die Effekte der Speziellen Relativitätstheorie sind beizeiten unintuitiv. In dieser Aufgabe betrachten wir eine Komposition von Lorentz-Transformationen mit seltsamen Ergebnis. Betrachte ein Raumschiff, welches auf eine Rundreise in die Raumzeit mit relativistischen Geschwindigkeiten aufbricht. Das Raumschiff beschleunigt auf die Geschwindigkeit v und dreht sich dann um einen rechten Winkel (ohne dabei abzubremesen). Dieses Manöver wird viermal wiederholt. Wir vernachlässigen die Verschiebungen während der Reise und betrachten ausschliesslich die Orientierung und den Bewegungszustand des Raumschiffs.

Hinweis: Es genügt, eine Raumzeit mit $2 + 1$ Dimensionen anzunehmen, d.h. man kann die z -Koordinate ignorieren.

- a) Wir benötigen zwei Transformationen der Raumzeit: Ein Lorentz-Boost in der x -Richtung mit Geschwindigkeit v und eine Rotation in der x,y -Ebene um 90° . Finde die Matrizen R und L , welche die Rotation und den Boost beschreiben.
- b) Zeige, dass $R^4 = \text{id}$, und interpretiere das Ergebnis.
- c) Die Rundreise (bis auf Verschiebungen) wird durch die Lorentz-Transformation $L_4 := (RL)^4$ beschrieben. Berechne L_4 und zeige, dass man folgende Matrix erhält ($\beta := v/c$ und $\gamma := 1/\sqrt{1 - \beta^2}$)

$$L_4 = \begin{pmatrix} \gamma^4 - 2\gamma^3\beta^2 & \gamma^4\beta - \gamma^3\beta - \gamma^3\beta^3 & \gamma^3\beta - \gamma^2\beta \\ -\gamma^3\beta + \gamma^2\beta & -\gamma^3\beta^2 + \gamma^2 & -\gamma^2\beta^2 \\ -\gamma^4\beta + \gamma^3\beta + \gamma^3\beta^3 & -\gamma^4\beta^2 + 2\gamma^3\beta^2 & -\gamma^3\beta^2 + \gamma^2 \end{pmatrix}. \quad (8.6)$$

Beachte, dass einige Vorzeichen je nach Wahl der Konventionen abweichen können.

- d) Entwickle L_4 für kleines β bis zur dritten Ordnung. Zeige, dass die Transformation eine Rotation um den Winkel β^2 und ein Lorentz-Boost mit Geschwindigkeit $\frac{1}{2}\sqrt{2}\beta^3c$ entlang der Diagonale der x,y -Ebene mit $\varphi = 135^\circ$ beschreibt.
- e) Angenommen, das Raumschiff führt das Manöver ein fünftes Mal durch. Bestimme $L_5 := (RL)^5$. Was erhältst du für $\beta = (\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2})^{1/2} \approx 0.786$? Wie interpretierst du dieses Ergebnis?

9.1. Relativistischer Doppler-Effekt

Wir leiten nun den relativistischen Doppler-Effekt für elektromagnetische Wellen bzw. Licht her. Eine Lichtquelle bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v auf eine Beobachterin zu, die im System K ruht. Die Quelle emittiert dabei Licht mit einer Frequenz f_0 gemessen im mitbewegten System K' . Die Beobachterin misst nun n Perioden der elektromagnetischen Welle innerhalb einer Zeitspanne Δt . Wir wollen nun die Beziehung zwischen der von der Beobachterin gemessenen Frequenz f und der im mitbewegten System gemessenen Frequenz f_0 bestimmen.

- Wie gross ist der Abstand vom Anfang bis zum Ende des Wellenzugs? Schlussfolgere hieraus die Wellenlänge λ und Frequenz f , die von der Beobachterin gemessen werden.
- Betrachte nun die Situation aus der Sicht der Quelle und geben einen Ausdruck für n in Abhängigkeit von f_0 an.
- Setze die Zeiten in beiden Systemen in Beziehung mittels

$$t' = \frac{t + xv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x' = \frac{x + vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (9.1)$$

Diese Beziehung nennt man *Zeitdilatation*. Leite damit einen Ausdruck für f als Funktion von f_0 und v her.

- Wiederhole die obige Analyse für den Fall, dass sich die Quelle mit der Geschwindigkeit v von der Beobachterin entfernt und zeige, dass gilt

$$f = \frac{\sqrt{1 - \beta}}{\sqrt{1 + \beta}} f_0. \quad (9.2)$$

- Für den nicht-relativistischen Doppler-Effekt im Fall von Schallwellen findet man

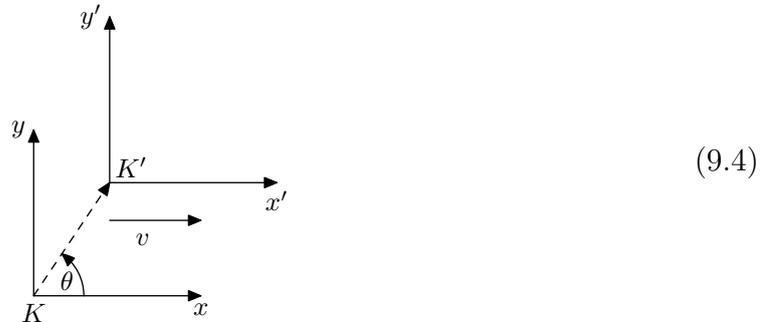
$$f = \frac{\tilde{c} + v}{\tilde{c} - v_0} f_0, \quad (9.3)$$

wobei \tilde{c} die Schallgeschwindigkeit, v die Geschwindigkeit der Beobachterin und v_0 die Geschwindigkeit der Quelle bezeichnet. Welcher qualitative Unterschied zum relativistischen Doppler-Effekt zeigt sich hier? Erkläre, warum das obige Ergebnis nicht das Relativitätsprinzip verletzt.

→

9.2. Relativistischer Doppler-Effekt mittels Energiebetrachtung

Wir betrachten eine Lichtquelle, die sich an einem Beobachter mit endlicher Distanz und mit Relativgeschwindigkeit v vorbeibewegt. Die Frequenz des ausgestrahlten Lichts im Ruhesystem K der Quelle betrage f_0 und θ beschreibe den Emissionswinkel in K desjenigen Lichts, welches gerade vom Beobachter empfangen wird.



- Die Energie eines Photons beträgt $E = hf$, wobei h die Plancksche Konstante ist und f die Frequenz bezeichnet. Bestimme den Vierer-Impuls eines Photons in K .
- Wende eine geeignete Poincaré-Transformation an, um den Vierer-Impuls im System K' des Beobachters zu erhalten. Verwende diesen, um die Frequenz f' des vom Beobachter empfangenen Lichts als Funktion von f_0 , v und θ auszudrücken.
Hinweis: Wie wirkt die Raumzeit-Translation, die benötigt wird, um die Ursprünge der Systeme K und K' aufeinander abzubilden, auf den Vierer-Impuls?
- Bei welchem Winkel θ' wird der Beobachter in K' die Lichtquelle zu diesem Zeitpunkt wahrnehmen?

9.3. Relativistische Kinematik

Die Produktion von Higgs-Teilchen am LHC wurde durch die Kollision zweier kollinear Protonenstrahlen erreicht. Wir betrachten die Kollisionen im Ruhesystem K des LHC. Wir bezeichnen die Masse des Higgs-Teilchens mit $M = 125 \text{ GeV}/c^2$ und die Masse eines Protons mit $m = 938 \text{ MeV}/c^2$.

- Angenommen die Protonen bewegen sich entlang der x -Achse mit genau gegensätzlicher Geschwindigkeit, um bei der Kollision ein Higgs-Teilchen in Ruhe zu erzeugen. Bestimme die dafür benötigte Energie und Geschwindigkeit der Protonen.
- Angenommen ein bewegtes Proton trifft ein Proton, welches sich im System K in Ruhe befindet. Was ist die Energie und Geschwindigkeit um ein Higgs-Teilchen erzeugen zu können? Was schliesst du daraus?

Wir betrachten nun den Zerfall des Higgs-Teilchens: Unter vielen anderen Zerfallskanälen, kann es in ein Paar von Photonen zerfallen. Dieser Zerfallsprozess ist zwar sehr selten aber interessant, weil die beiden hochenergetischen Photonen leicht zu erkennen sind.

- Wir nehmen an, dass wir zwei Photonen mit Energien E_1 und E_2 bei einem Winkel θ zwischen den Strahlen messen. Wenn diese Photonen aus dem Zerfall eines einzelnen Teilchens stammen, wie gross ist die Masse dieses Teilchens?
- Bestimme die Geschwindigkeit des zerfallenden Teilchens im Bezugssystem K .

10.1. Atwood-Maschine mittels Lagrange-Formalismus

Wir betrachten erneut die Atwood-Maschine, die wir bereits in Aufgabe 1.2 und Aufgabe 7.1 gesehen haben: Zwei unterschiedliche Massen m_1 und m_2 sind mit einem Seil der Länge l verbunden und über eine Rolle mit Radius r in einem homogenen Gravitationsfeld aufgehängt. Diesmal wollen wir den Lagrange-Formalismus benutzen.

Zunächst vernachlässigen wir die Trägheit der Rolle.

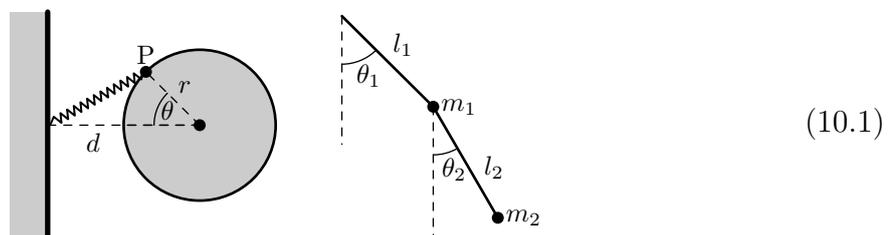
- a) Was sind geeignete verallgemeinerte Koordinaten um sicherzustellen, dass die Länge des Seils konstant ist? Drücke die kinetische und potentielle Energie in diesen Koordinaten aus und gib die Lagrange-Funktion an.
- b) Stelle die Euler-Lagrange-Gleichungen auf. Wie steht dein Ergebnis zu der in Aufgabe 1.2 gefundenen Beschleunigung in Beziehung? Warum müssen wir die Spannung des Seils hier nicht betrachten?

Berücksichtigen wir nun zusätzlich die Trägheit der Rolle, welche durch einen homogenen Zylinders der Dicke d und Masse m_P modelliert wird.

- c) Welche verallgemeinerten Koordinaten können wir verwenden, um die Bewegung der Rolle zu beschreiben? Eliminiere diese verallgemeinerten Koordinaten durch die Einführung einer geeigneten Zwangsbedingung.
- d) Stelle die kinetische Energie der Rolle und die Lagrange-Funktion auf. Schreibe die Euler-Lagrange-Gleichung für dieses System. Überprüfe, dass die Antwort zu Aufgabe 7.1 die Bewegungsgleichung löst. Warum tritt hier kein Drehmoment auf?

10.2. Lagrange-Funktion und Bewegungsgleichungen

Bestimme die Lagrange-Funktion und Bewegungsgleichungen der abgebildeten Systeme. Es ist nicht nach der Lösung der Bewegungsgleichungen gefragt.

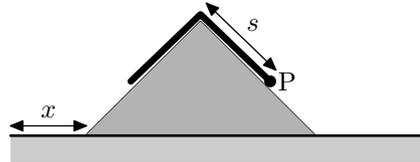


- a) Eine Scheibe mit Radius r und Masse m ist an ihrem Mittelpunkt aufgehängt und kann frei um ihn rotieren. Zusätzlich verbindet eine Feder mit Federkonstante k und Ruhelänge l_0 einem Randpunkt P der Scheibe mit einer nahegelegenen Wand. Dort ist sie an der gleichen Höhe wie der Mittelpunkt der Scheibe befestigt und der Abstand zum Mittelpunkt der Scheibe beträgt d .
- b) Ein Doppelpendel mit festen Längen l_i in einem gleichmässigen Gravitationsfeld.

→

10.3. Rutschende Kette

Eine homogene Kette der Länge l und Masse m liegt über der Spitze eines gleichschenkligen dreieckigen Blocks der Masse $2m$, dessen nach oben ausgerichtete Ecke rechtwinklig ist. Am rechten Ende der Kette P ist eine Masse m befestigt. Der gesamte Aufbau unterliegt der Schwerkraft und wir vernachlässigen alle Reibungskräfte. Zur Zeit $t = 0$ sei das System in Ruhe und auf der rechten Seite hänge die Kette das Stück $s(0) = l/2$ herab.

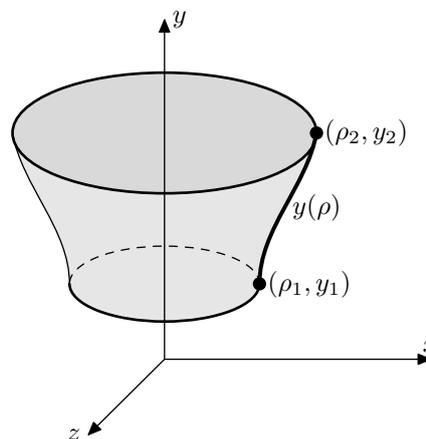


(10.2)

- Bestimme die Lagrange-Funktion des Systems.
- Löse die Bewegungsgleichungen für die gegebenen Anfangsbedingungen unter der Annahme, dass $s(t) \leq l$ gilt.
- Bestimme die Zeit t_f , zu der das linke Ende der Kette über die Spitze des Blocks rutscht und die Distanz x_f , um die sich der Block bis dahin bewegt.

10.4. Minimale Rotationsfläche

Wir betrachten eine Rotationsfläche, die wir aus der Drehung einer Kurve $y(\rho)$ um die y -Achse erhalten. Die Kurve verbindet die Punkte (ρ_1, y_1) und (ρ_2, y_2) , wobei wir annehmen wir, dass $y_1 < y_2$ und $\rho_1 \leq \rho_2$ sind. Wir können die Kurve ebenfalls durch die Funktion $\rho(y)$ beschreiben und werden im Folgenden beide Beschreibungen betrachten. In beiden Fällen wollen wir mithilfe der Variationsrechnung diejenige Kurve finden, für die der Flächeninhalt minimal wird.

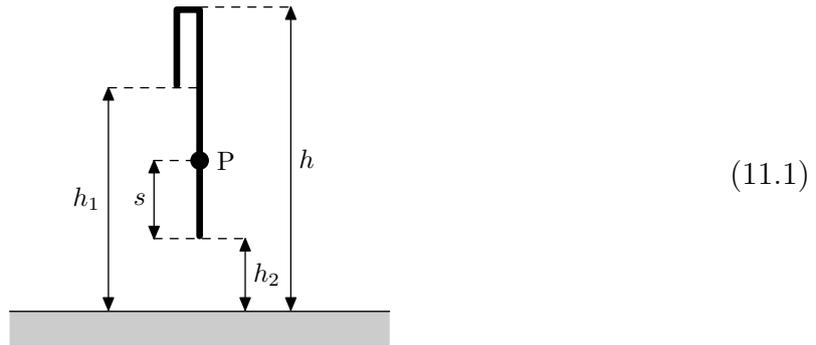


(10.3)

- Erkennst du für eine der beiden Beschreibungen ein Problem?
Hinweis: Die Abbildung zeigt das Problem nicht. Betrachte die Randbedingungen für den Fall $\rho_1 = \rho_2$.
- Schreibe den Flächeninhalt A als Funktional $A[y(\rho)]$ und als Funktional $A[\rho(y)]$.
- Bestimme die Euler-Lagrange-Gleichungen in beiden Fällen. Wähle diejenige Beschreibung aus, die dir einfacher erscheint und löse die Euler-Lagrange-Gleichungen. Finde mithilfe deiner Lösung auch die Lösung für die andere Beschreibung.

11.1. Fallendes Seil

Ein Seil der Länge l und mit gleichmässiger linearer Massendichte ρ wird vertikal in die Luft geworfen und so losgelassen, dass es die unten dargestellte Form annimmt. Wir nehmen dabei an, dass das Seil beliebig stark biegsam sei, sodass der Knick von vernachlässigbarer Dicke ist und wir das Seil durch zwei vertikale Teilstücke der Länge $h - h_1$ und $h - h_2$ (die sich zur Länge l des Seils addieren) beschreiben können.



- a) Verwende h_1 und h_2 als verallgemeinerte Koordinaten, und zeige, dass die Lagrange-Funktion folgende Form annimmt:

$$L = \frac{1}{2}(h - h_1)\rho\dot{h}_1^2 + \frac{1}{2}(h - h_2)\rho\dot{h}_2^2 - \frac{1}{2}\rho g(h - h_1)(h + h_1) - \frac{1}{2}\rho g(h - h_2)(h + h_2). \quad (11.2)$$

Bestimme die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen.

- b) Setze $x = h_1 - h_2$ und $y = h_1 + h_2$ ein, und zeige, dass die Bewegungsgleichung für die x -Koordinate gegeben ist durch

$$(l^2 - x^2)\ddot{x} = x\dot{x}^2. \quad (11.3)$$

- c) Verwende die in Teil b) gefundene Bewegungsgleichung, um \dot{x} als Funktion von l , x und einer Integrationskonstanten im Bereich in dem $\dot{x}(t) \neq 0$ gilt zu bestimmen. Zeige, dass \dot{x} unendlich gross wird, wenn das Seil seine Form verändert und der Knick das Ende des Seils erreicht (die Peitsche knallt). Wie ist die andere (triviale) Lösung $\dot{x}(t) = 0$ für alle t zu interpretieren?

Hinweis: Betrachte die Ausdrücke $(d/dt) \log(\dot{x})$ und $(d/dt) \log(l^2 - x^2)$ und vergleiche sie mit (11.3), um \dot{x} zu erhalten.

- d) Die Seilspannung an einem gegebenen Punkt P im Abstand s vom unteren Ende des Seils (siehe Abbildung) beträgt $Z = \rho s(\ddot{h}_2 + g)$. Zeige, dass für $\dot{x} \neq 0$ gilt

$$Z = \frac{\rho s c^2}{2(l + x)(l^2 - x^2)}, \quad (11.4)$$

wobei c eine Konstante ist, die aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden kann. Wie verhält sich Z im Grenzfall $x \rightarrow l$?

→

11.2. Teilchen auf Zylinder und Paraboloid

In diesem Problem wirken zwei Kraftfelder auf ein Teilchen der Masse m : die Gravitation (in negative z -Richtung) und eine Kraft $\vec{F} = -k\vec{x}$ zum Koordinatenursprung gerichtet. Zuerst ist die Bewegung des Teilchen auf eine Zylinderoberfläche mit $x^2 + y^2 = R^2$ beschränkt.

- Wähle geeignete generalisierte Koordinaten, und bestimme die Lagrange-Funktion des Systems.
- Bestimme die Euler-Lagrange-Gleichungen, und zeige, dass daraus Drehimpulserhaltung folgt.

Jetzt bewegt sich das Punktteilchen unter dem Einfluss der gleichen Kraftfelder auf einer parabolischen Oberfläche, die durch die Gleichung $z = c^2(x^2 + y^2)$ beschrieben wird.

- Verwende einen Lagrange-Multiplikator λ um die Zwangsbedingung zu implementieren und schreibe die Lagrange-Funktion des Systems in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) . Ermittle die Euler-Lagrange-Gleichungen für das System.
- Zeige, dass für jeden Wert des Drehimpuls $L_z = mr^2\dot{\varphi} \neq 0$, die kreisförmige Trajektorie $r(t) = r_0$ eine Lösung der Bewegungsgleichungen ist, wenn r_0 eine Gleichung der folgenden Art erfüllt

$$Ar_0^6 + Br_0^4 - L_z^2 = 0. \quad (11.5)$$

Bestimme den Wert von A und B .

11.3. Separierbare Systeme

Wir betrachten ein System, in dem die kinetische und potentielle Energie als Funktionen der verallgemeinerten Koordinaten q_i in der folgenden Form vorliegen:

$$T = \sum_i f_i(q_i)\dot{q}_i^2, \quad V = \sum_i V_i(q_i). \quad (11.6)$$

Beachte, dass dies nicht die allgemeinste Form ist, die T und V annehmen können; wir betrachten hier eine spezielle Klasse von Systemen und/oder eine geeignete Wahl von Koordinaten.

- Zeige, dass sich die Euler-Lagrange-Gleichungen für ein solches System separieren lassen, d.h. dass jede Gleichung nur eine der verallgemeinerten Koordinaten und ihre Ableitungen enthält.
- Verwende die Bewegungsgleichungen, um zu zeigen, dass die Größen $E_i = f_i(q_i)\dot{q}_i^2 + V_i(q_i)$ erhalten sind, dass wir also jeder Koordinate eine effektive Energie zuordnen können, die unter der Zeitentwicklung des Systems erhalten ist.
- Verwende die Tatsache, dass die E_i Erhaltungsgrößen sind, um ein Integral zu finden, das die Zeit t als Funktion der Koordinate q_i ausdrückt, d.h. $t = g_i(q_i)$ für eine geeignete Funktion g_i . Unter der Annahme, dass die Funktion g_i auf einem hinreichend kleinen Intervall bijektiv ist, kann die Zeitentwicklung der Koordinate dann mithilfe der Inversen als $q_i = g_i^{-1}(t)$ geschrieben werden.

12.1. Galilei-Invarianz und Lagrange-Formalismus

Unser Ziel in dieser Aufgabe ist es, die Lagrange-Funktion eines Teilchens in einem Galilei-invarianten System herzuleiten.

- a) Betrachte die unbestimmte Lagrange-Funktion eines Teilchens $L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$. Nimm an, dass unser System invariant unter Rotationen und Translationen ist. Welche Bedingungen sind dadurch an die funktionale Abhängigkeit von L geknüpft? Kann man das erste Newtonsche Gesetz davon ableiten?
- b) Betrachte zwei allgemeine Lagrange-Funktionen, die über die totale Zeitableitung einer weiteren Funktion miteinander in Verbindung stehen

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} F(q, t). \quad (12.1)$$

Inwiefern unterscheiden sich die Bewegungsgleichungen, die jeweils von L und L' erzeugt werden?

- c) Betrachte die eingeschränkte Lagrange-Funktion aus Teil a). Wie ändert sie sich unter dem Galilei-Boost $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{\kappa}t$? Benutze diesen Ausdruck, um die explizite Form von L aufzuschreiben, die Galilei-invariant ist. Interpretiere das Ergebnis.

12.2. Symmetrietransformationen

Wir betrachten eine Lösung $x = x(t)$ eines harmonischen Oszillators mit Masse m und Federkonstante k . Zeige, dass die Transformation $x' = \phi_\lambda(x, t) := x + \lambda \cos(\omega t)$ mit $\omega = \sqrt{k/m}$ eine Symmetrietransformation des harmonischen Oszillators ist. Berechne dann die dazugehörige Erhaltungsgrösse und zeige durch explizite Rechnung, dass diese tatsächlich erhalten ist.

Hinweis: Zeige, dass die Lagrange-Funktion des harmonischen Oszillators bis auf die totale Zeitableitung einer Funktion $K_\lambda(x, t)$ invariant ist.

→

12.3. Symmetrie und Laplace-Runge-Lenz-Vektor

In dieser Aufgabe betrachten wir die nach dem Noether-Theorem zum Laplace-Runge-Lenz-Vektor zugehörige Symmetrie. Für diese wurde in der Vorlesung das erzeugende Vektorfeld gefunden

$$\vec{v} = \frac{\delta_{\vec{\kappa}} \vec{x}}{\delta \lambda} = \mu (2(\vec{\kappa} \cdot \vec{x}) \dot{\vec{x}} - (\dot{\vec{\kappa}} \cdot \vec{x}) \vec{x} - (\vec{x} \cdot \dot{\vec{x}}) \vec{\kappa}), \quad (12.2)$$

das die Deformation einer Lösung \vec{x} der Bewegungsgleichungen in eine andere Lösung beschreibt

$$\vec{x}' = \vec{x} + \delta \lambda \vec{v} + \mathcal{O}(\delta \lambda^2). \quad (12.3)$$

Als Ausgangspunkt betrachten wir die folgende Lösung für einen Kreisorbit

$$\vec{x}(t) = (R \cos \omega t, R \sin \omega t, 0), \quad \omega = \sqrt{g} R^{-3/2}. \quad (12.4)$$

Wir wenden die obige Transformation an, und zeigen dann, dass sie den Kreisorbit in einen elliptischen Orbit deformiert.

- a) Zeige zunächst, dass die Transformation die folgende Deformation für die Wahl $\vec{\kappa} = (\kappa \cos \vartheta, \kappa \sin \vartheta, \rho)$ erzeugt

$$r(t) = R + \lambda \mu \kappa R^2 \omega \sin(\omega t - \vartheta) + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (12.5)$$

- b) Bestimme weiter die Exzentrizität, Ausrichtung und grosse Halbachse der Deformation in linearer Ordnung im Deformationsparameter λ . Vergleiche dazu (12.5) mit der Entwicklung in λ von

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad (12.6)$$

welche eine Ellipse mit einem der Brennpunkte im Koordinatenursprung beschreibt. Hierbei bezeichnet a die Länge der grossen Halbachse, ε die Exzentrizität und φ_0 bestimmt die Ausrichtung der Ellipse in der Ebene.

- c) Betrachte die Variationen der Erhaltungsgrössen E , \vec{L} und \vec{A} um eine beliebige Lösung der Bewegungsgleichungen und zeige, dass gilt

$$\frac{\delta_{\vec{\kappa}} E}{\delta \lambda} = 0, \quad \frac{\delta_{\vec{\kappa}} \vec{L}}{\delta \lambda} = \vec{\kappa} \times \vec{A}, \quad \frac{\delta_{\vec{\kappa}} \vec{A}}{\delta \lambda} = -2\mu E \vec{\kappa} \times \vec{L}. \quad (12.7)$$

Hinweis: Verwende die Bewegungsgleichung $\ddot{\vec{x}} = -g\vec{x}/r$, um zu zeigen, dass gilt

$$\frac{\delta_{\vec{\kappa}} \dot{\vec{x}}}{\delta \lambda} = \mu \left[(\vec{\kappa} \cdot \dot{\vec{x}}) \dot{\vec{x}} - \frac{g}{r^3} (\vec{\kappa} \cdot \vec{x}) \vec{x} - \left(\dot{\vec{x}}^2 - \frac{g}{r} \right) \vec{\kappa} \right]. \quad (12.8)$$

- d) *Optional:* Bestätige, dass die Resultate von Teil c) mit den Deformationen der Pfad-Parameter aus Teil b) übereinstimmen.
- e) *Fortgeschritten:* Drücke die Relationen (12.7) als eine Lie Algebra der Rotationen und $\vec{\kappa}$ -Transformationen (oder äquivalent als Poisson Algebra der erhaltenen Ladungen \vec{L} und \vec{A}) aus. Kannst du die Algebra interpretieren?

13.1. Teilchen auf Fläche im Hamiltonschen Formalismus

In Aufgabe 11.2 haben wir die Bewegung eines Teilchens der Masse m entlang einer gegebene Fläche (Zylinder oder Paraboloid) betrachtet, welches unter dem Einfluss der Gravitation (in negativer z -Richtung) und einer weiteren Kraft $\vec{F} = -k\vec{x}$ hin zum Koordinatenursprung steht.

Wenn sich das Teilchen auf einer Zylinderoberfläche mit Radius R bewegt, dann ist die Lagrange-Funktion gegeben durch

$$L = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}k(z^2 + R^2) - mgz. \quad (13.1)$$

- a) Finde die zugehörige Hamilton-Funktion. Leite die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen her und löse sie.

Wenn sich das Teilchen auf einer Paraboloidfläche mit der Gleichung $z = c^2(x^2 + y^2)$ bewegt, ist die Lagrange-Funktion in zylindrischen Koordinaten gegeben durch

$$L = \frac{1}{2}m((1 + 4c^4r^2)\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{1}{2}k(c^4r^2 + 1)r^2 - mgc^2r^2. \quad (13.2)$$

- b) Finde die zugehörige Hamilton-Funktion und die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.

13.2. Poisson-Algebra des Drehimpulses

In der Vorlesung wurde das Hamiltonsche Vektorfeld $\mathcal{D}[F]$ zu einer Phasenraumfunktion $F(x, p)$ eingeführt als Differentialoperator

$$\mathcal{D}[F] := \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right). \quad (13.3)$$

Hierbei beschränken wir uns auf den Fall eines Teilchens im dreidimensionalen Euklidischen Raum und betrachten $\{\partial/\partial x_i, \partial/\partial p_i\}$ als Basis des Tangentialraums an \mathbb{R}^6 im Punkt (x, p) . In der Vorlesung wurden weiter verschiedene Wege beschrieben, wie man Poisson-Klammern der Funktion F aus dem Hamiltonschen Vektorfeld berechnen kann. Diese wollen wir hier nachvollziehen.

- a) Bestimme zunächst die Hamiltonschen Vektorfelder zu den Phasenraumfunktionen Ort x_i , Impuls p_i und Drehimpuls $L_i = \sum_k \varepsilon_{ijk} x_j p_k$.
- b) Verwende die Beziehung $\mathcal{D}[F]G = \{F, G\}$, um die folgenden Poisson-Klammern herzuleiten

$$\{L_i, x_j\} = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} x_k, \quad \{L_i, p_j\} = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} p_k, \quad \{L_i, L_j\} = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} L_k. \quad (13.4)$$

- c) Verwende nun die symplektische Form

$$\omega = \sum_{i=1}^3 dx_i \wedge dp_i \quad (13.5)$$

und leite die obigen Poisson-Klammern aus der Beziehung $\omega(\mathcal{D}[F], \mathcal{D}[G]) = \{F, G\}$ her.

→

13.3. Kanonische Transformationen

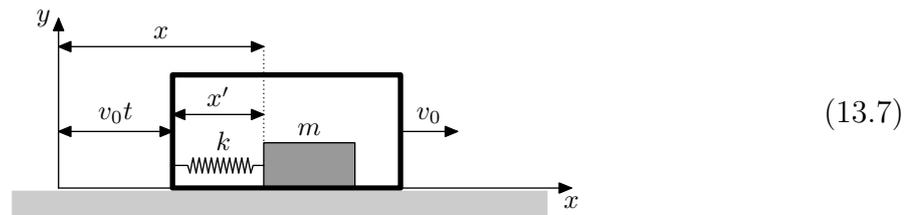
Zeige, dass die folgende Transformation kanonisch ist:

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_1, & P_1 &= +p_1 - 2p_2, \\ Q_2 &= p_2, & P_2 &= -2q_1 - q_2. \end{aligned} \quad (13.6)$$

- Zeige, dass die kanonischen Poisson-Klammern $\{Q_i, Q_j\}$, $\{Q_i, P_j\}$, $\{P_i, P_j\}$ in den neuen Koordinaten die erwartete Form haben.
- Zeige, dass das Kriterium $A^T \varepsilon A = \varepsilon$ zutrifft, wobei A die Jacobi-Matrix der Transformation bezeichne und ε die symplektische Struktur.
- Zeige, dass die symplektische Form $\sum_i dQ_i \wedge dP_i$ invariant ist.

13.4. Harmonischer Oszillator in bewegtem Kasten

Ein Kasten gleite reibungslos längs der x -Achse mit konstanter Geschwindigkeit v_0 . Auf dem Kastenboden schwingt ebenfalls in x -Richtung und reibungslos eine Masse m , die durch eine Feder (Federkonstante: k) an der hinteren Kastenwand befestigt ist.



- Leite die Hamilton-Funktion H im ruhenden Koordinatensystem her. Ist H eine Erhaltungsgröße? Ist H gleich der Gesamtenergie E ? Formuliere ausserdem die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.
- Leite die Hamilton-Funktion H im mitbewegten Koordinatensystem des Kastens her. Abgesehen davon, betrachte die gleiche Aufgabenstellung wie in der vorherigen Teilaufgabe. Was verändert sich?
- Es bezeichne p' den zu x' konjugierten Impuls im mitbewegten Koordinatensystem des Kastens. Zeige, dass die folgende Transformation mit $\omega = \sqrt{k/m}$ kanonisch ist

$$x' = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q + d, \quad p' = \sqrt{2Pm\omega} \cos Q. \quad (13.8)$$

- Bestimme die Hamilton-Funktion als Funktion von P und Q und löse die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen um $Q(t)$ und $P(t)$ zu finden.
- Schreibe die Lösung in den ursprünglichen Koordinaten $x'(t)$ und $p'(t)$, und zeichne die Trajektorie im Phasenraum.

14.1. Hamilton-Funktion und Reibungskräfte

Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einer Dimension in einem Potential $V(q)$ und werde gebremst durch die Reibungskraft $F = -2m\gamma\dot{q}$, welche proportional zur Geschwindigkeit ist.

- a) Zeige, dass die folgende Lagrange-Funktion geeignete Bewegungsgleichungen ergibt:

$$L(q, \dot{q}, t) = e^{2\gamma t} \left(\frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) \right). \quad (14.1)$$

- b) Bestimme den zu q konjugierten Impuls p und die Hamilton-Funktion $H(q, p, t)$.
c) Wir betrachten eine kanonische Transformation, die durch die folgende erzeugende Funktion definiert ist

$$F_2(q, \bar{p}, t) = q \bar{p} e^{\gamma t}. \quad (14.2)$$

Finde die transformierte Hamilton-Funktion $\bar{H}(\bar{q}, \bar{p}, t)$.

Betrachte jetzt das Potential $V(q) = \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$ eines harmonischen Oszillators.

- d) Welche der Hamilton-Funktionen H und \bar{H} ist eine Erhaltungsgrösse? Weshalb?
e) Finde die Lösung $q(t)$ im unterkritisch gedämpften Fall $\gamma < \omega$. Drücke dabei die Integrationskonstante, also hier die Amplitude der Schwingung, durch die oben gefundene Erhaltungsgrösse aus.

14.2. Zeitabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung

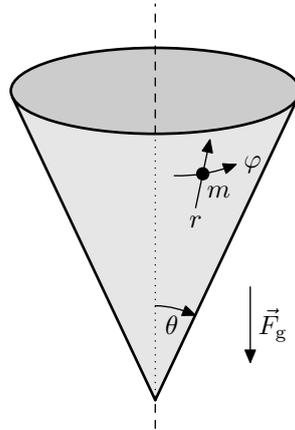
Wir betrachten ein Teilchen der Masse m , das sich in zwei Dimensionen (x, z) unter dem Einfluss der Gravitationskraft $F_z = -mg$ bewegt.

- a) Schreibe die Hamilton-Funktion des Systems. Erkläre, warum hier die Beziehung $H = T + V$ verwendet werden kann.
b) Formuliere und löse die zeitabhängigen Hamilton-Jacobi-Gleichungen für das Problem. Wie hängt $S(q, t)$ von der Zeit t ab?
Hinweis: Verwende den Separationsansatz $S(q, t) = \tilde{S}(q) + S_t(t)$.
c) Verwende deine obige Lösung $S(q, t)$, um die Funktionen $x(t)$, $z(t)$ und $z(x)$ zu bestimmen, und prüfe, ob sie deinen Erwartungen entsprechen.

→

14.3. Zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung

Betrachte eine Punktmasse m , welche sich ohne Reibung auf der Fläche eines Kegels mit Öffnungswinkel 2θ unter dem Einfluss der Gravitation bewegt. Ein homogenes Graviationsfeld ist parallel zur Kegelhachse nach unten gerichtet.



(14.3)

- Leite die Hamilton-Funktion in Kugelkoordinaten her und bestimme die Bewegungsgleichungen. Berücksichtige dabei die Zwangsbedingungen. Nenne zwei Erhaltungsgrößen.
- Stelle nun die zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung für dieses Problem auf und löse sie.
Hinweis: Verwende einen Separationsansatz der Form $S(\varphi, r) = S_1(\varphi) + S_2(r)$ in Polarkoordinaten (φ, r) , um die Hamilton-Jacobi-Gleichung zu lösen.
- Wie findet man eine (implizite) Lösung der Bewegungsgleichungen? Die auftretenden Integrale müssen nicht explizit berechnet werden. Wie sind die Konstanten, die in der Lösung auftauchen, zu interpretieren?

14.4. Kanonische Flüsse und erzeugende Funktionen

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass wir einem kanonischen Fluss ϕ_λ eine erzeugende Funktion F zuordnen können,

$$\frac{\partial F}{\partial z}(\phi_\lambda(z)) = \varepsilon \frac{\partial \phi_\lambda}{\partial \lambda}(z). \quad (14.4)$$

Dabei bezeichnet $z = (z^1, \dots, z^{2N}) = (q^1, \dots, q^N, p_1, \dots, p_N)$ die Koordinaten und

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & +\text{id}_N \\ -\text{id}_N & 0 \end{pmatrix} \quad (14.5)$$

die Koeffizienten der symplektischen Form. Wir betrachten nun speziell einen zweidimensionalen harmonischen Oszillator mit Hamilton-Funktion

$$H = T + V = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{k}{2} (x^2 + y^2). \quad (14.6)$$

- Schreibe den kanonischen Fluss, der Drehungen in der x, y -Ebene beschreibt und bestimme die erzeugende Funktion. Ist sie eine Erhaltungsgröße? Interpretiere das Ergebnis.
- Schreibe den kanonischen Fluss, der Translationen in x -Richtung beschreibt und bestimme die erzeugende Funktion. Ist sie eine Erhaltungsgröße? Interpretiere das Ergebnis.